Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

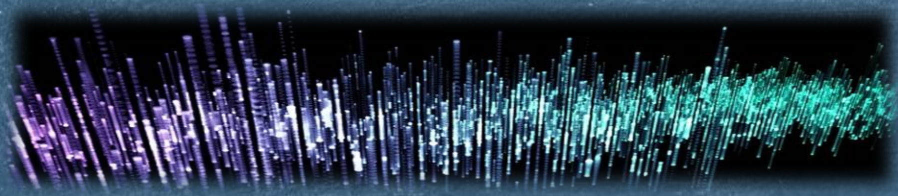
ΔΙΑΛΕΞΗ 11Η

- Μετασχηματισμός Ζ

Τι περιέχει το HY370?

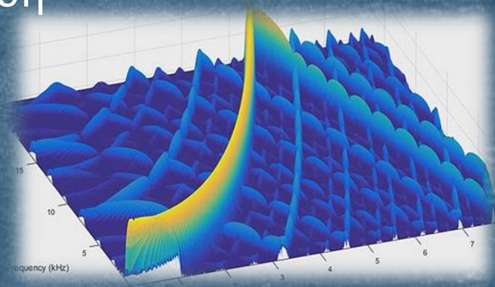
$1^{ο}$ Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



$2^{ο}$ Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας

- Παρ’ όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:

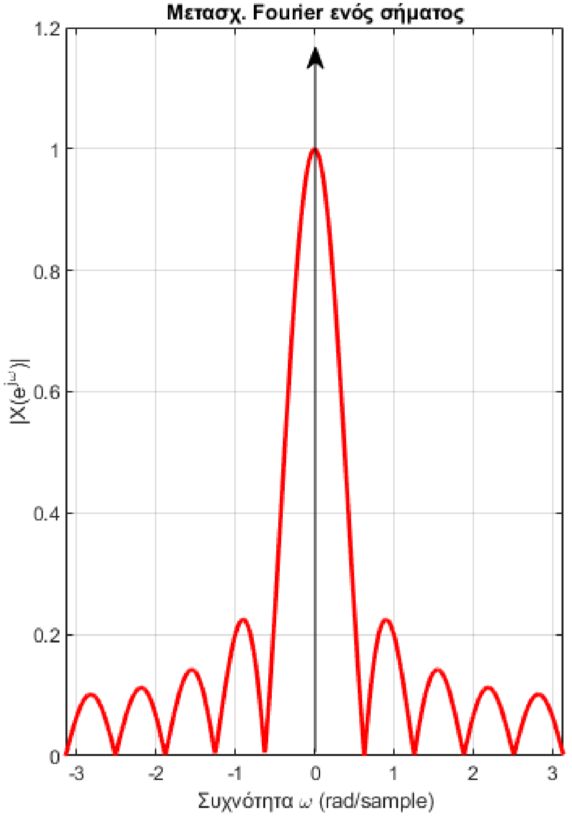
  1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  2. Υπάρχουν συστήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα

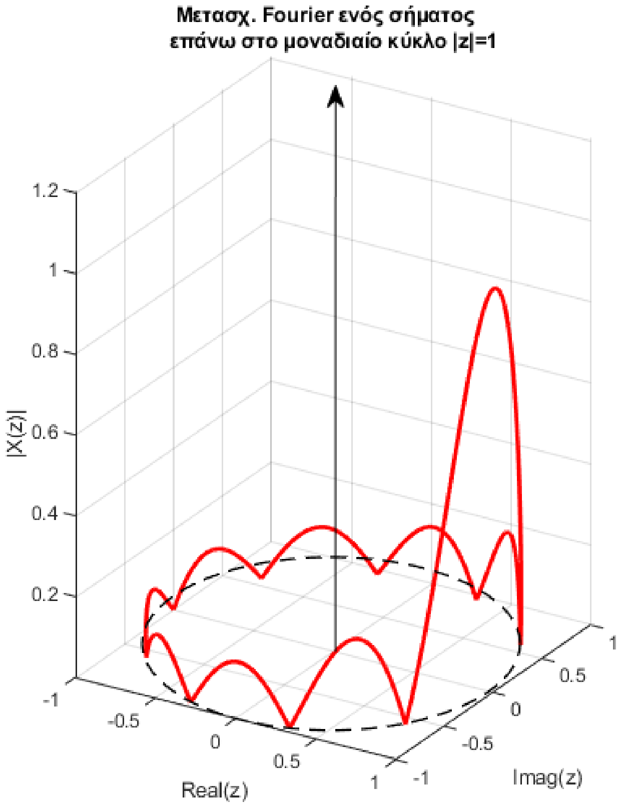
- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!

- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι’ αυτό?

- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους $e^{-j\omega n}$
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον *μοναδιαίο* κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου
- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα
- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
  - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?

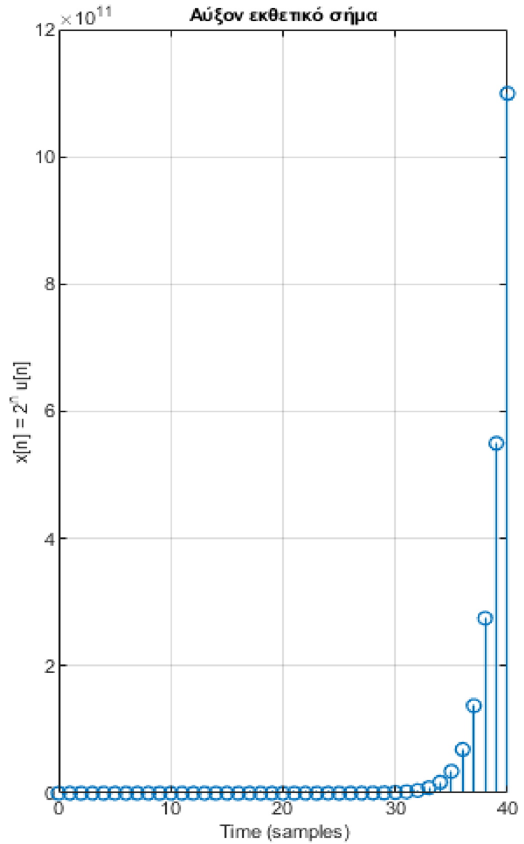


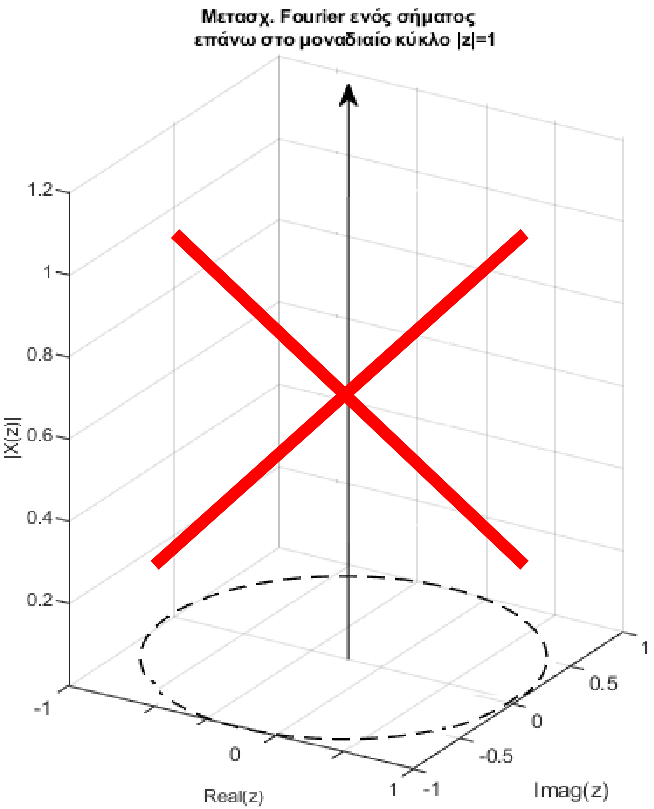


- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους
- Διαφορετικού πλάτους ίσως?





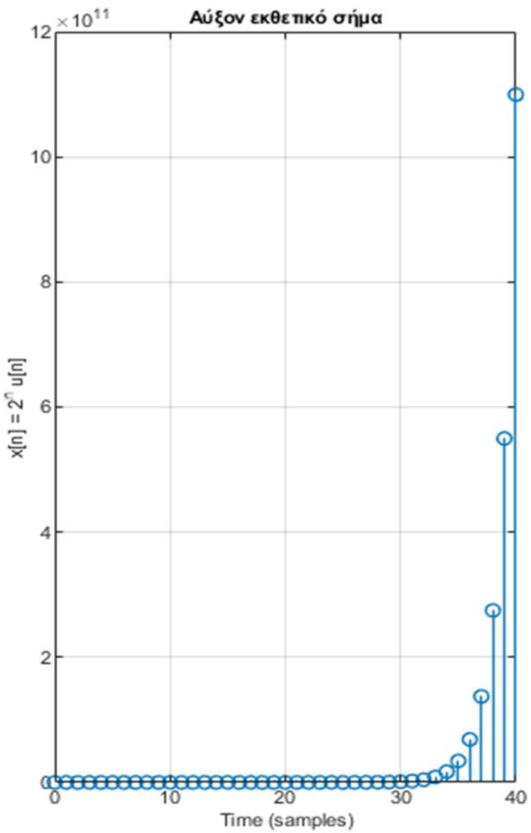
- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

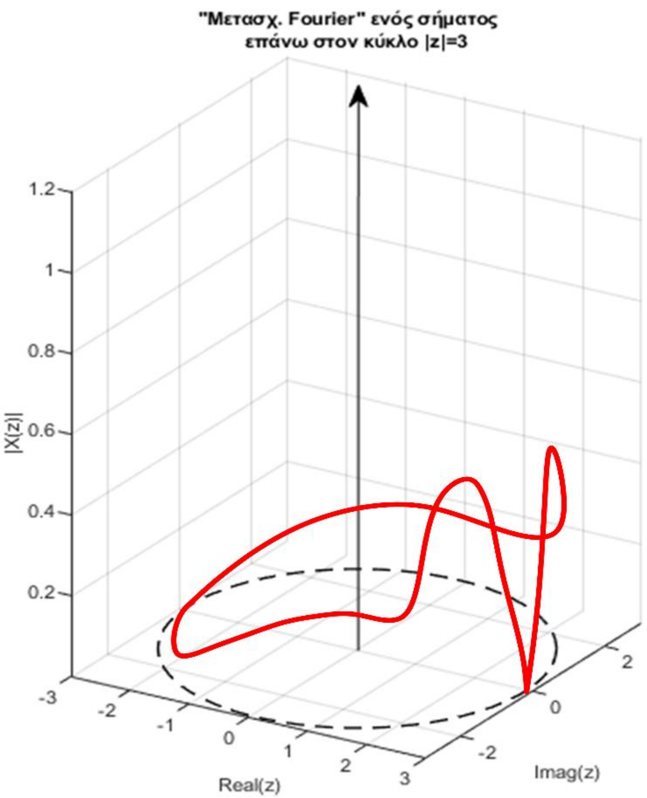
$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r





- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προφανώς όταν

$$\left|X\left(re^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]r^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
  - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη
- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2^n}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2}{r}\right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

- Θέτοντας

$$z = re^{j\omega}, \qquad r \in \Re_+$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

  - Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, |z| > 2$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot z^{-n}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \text{ για}$$

$$|a z^{-1}| < 1 \iff \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \iff |z| > |a|.$$

ROC : Πεδίο Σύγκλισης

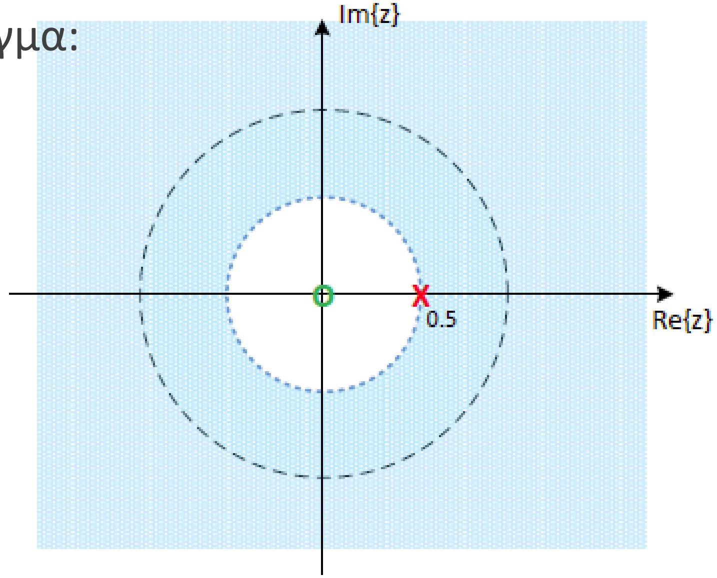
Άρα

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

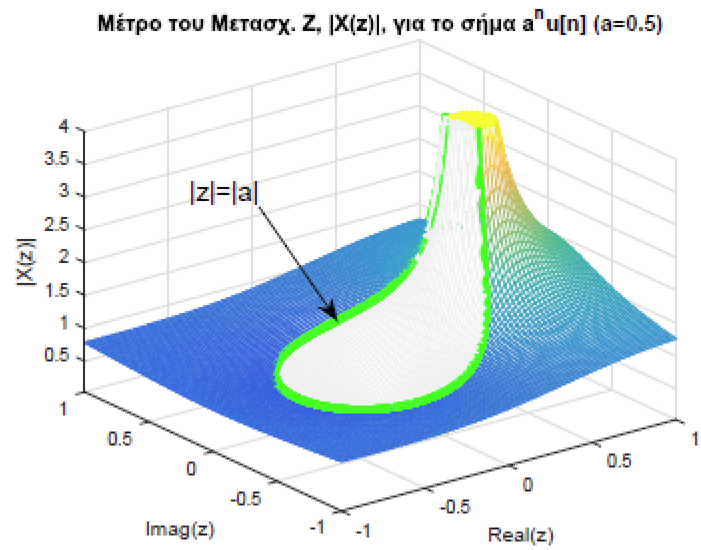
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

- Παράδειγμα:

$a = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$



(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Ζ για $a = 0.5$



(β') Μέτρο μετασχ. Ζ.

Έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Πόλοι: $z : H(z) \to +\infty \sim Q(z) = 0 \longrightarrow z = a$, πόλος

Μηδενικά: $z : H(z) = 0 \sim P(z) = 0 \longrightarrow z = 0$, μηδενικό

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-a^n u[-n-1]\right) z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n}$$

$$u[-n-1] = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \, 1 \, z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (az^{-1})^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n - 1\right)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z}, \quad |a^{-1}z| < 1$$

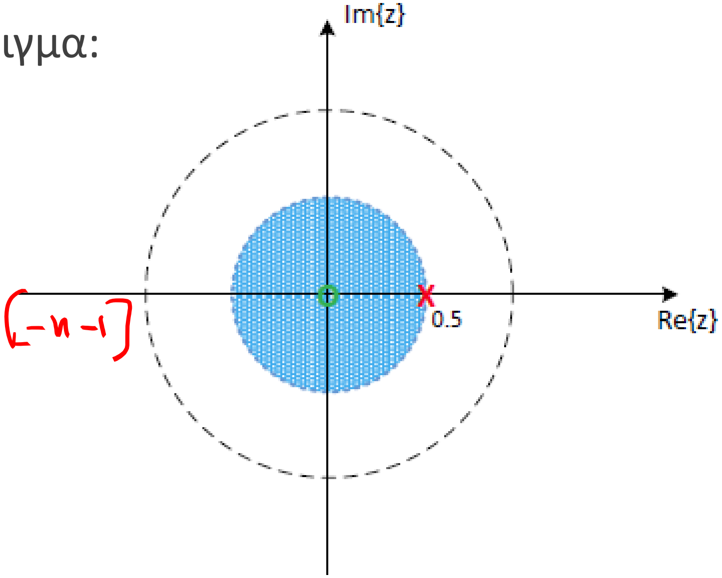
$$\overset{\text{MATH}}{\leadsto} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a| \longleftarrow \text{ROC}$$

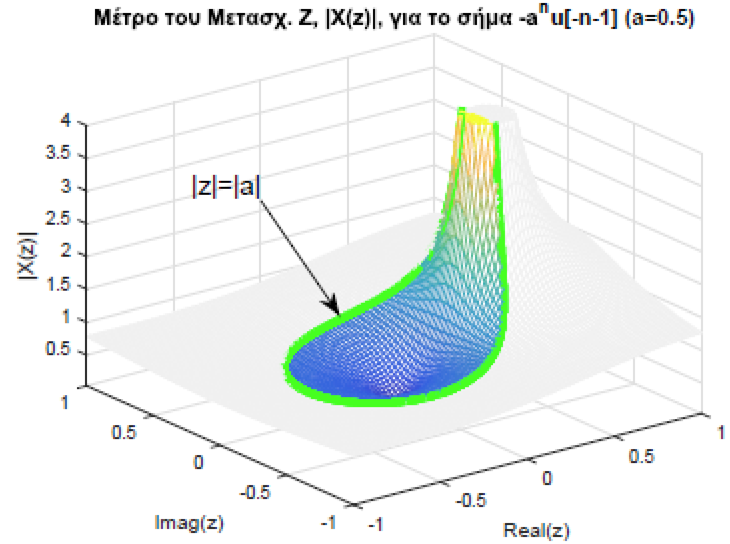
- Παράδειγμα:

$a = \frac{1}{2}$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$



(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β′) Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

Έχουμε $X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|.$

- <u>Πόλοι:</u> $z - a = 0 \Leftrightarrow z = a$

- <u>Μηδενικά:</u> $z = 0$

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = \underbrace{a^n u[n]}_{x_1[n]} - \underbrace{b^n u[-n-1]}_{x_2[n]} = x_1[n] + x_2[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x_1[n] + x_2[n]\right) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^n u[-n-1] z^{-n}$$

$$= \underset{|z|>|a|}{\frac{1}{1-az^{-1}}} + \underset{|z|<|b|}{\frac{1}{1-bz^{-1}}} = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})},$$

με ROC: $\{|z|>|a|\} \cap \{|z|<|b|\}$. $\leftarrow \neq \emptyset$?

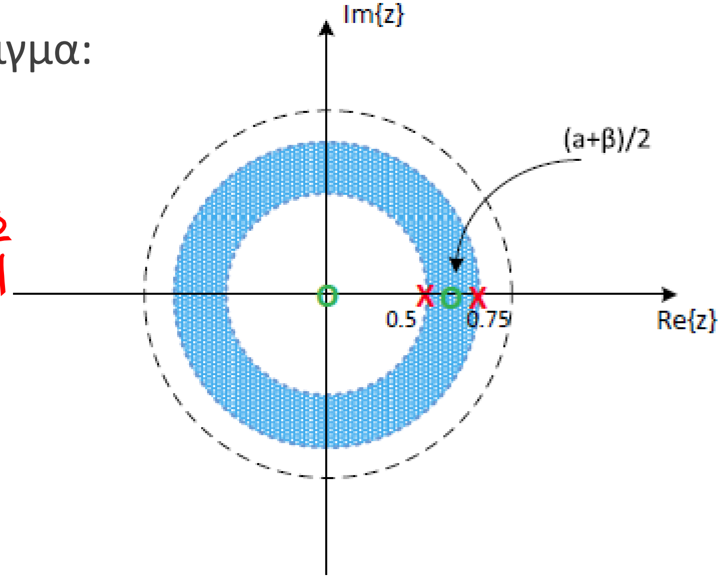
Αν $|b|>|a|$, τότε το ROC δεν είναι το κενό σύνολο

Αντίθετα, αν $|b| \leq |a|$, τότε το ROC είναι $\emptyset$, και άρα ο Μετασχ. Ζ δεν ορίζεται!

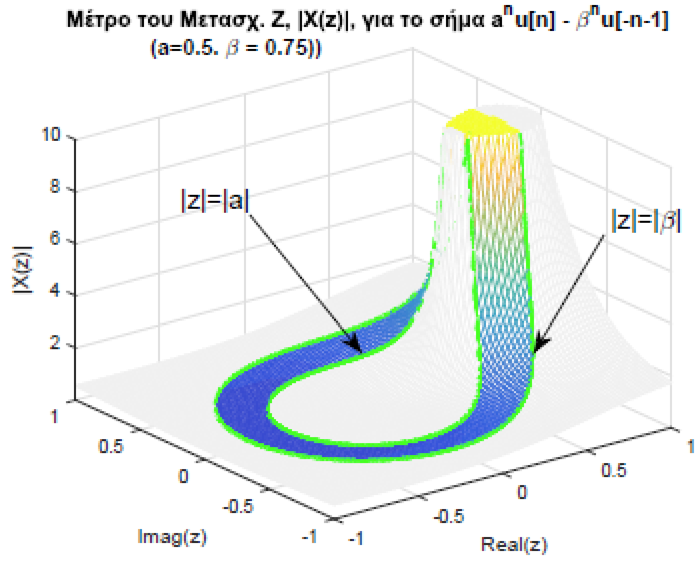
- Παράδειγμα:

$|a| = \frac{1}{2}$

$|b| = \frac{3}{4}$



(α′) Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

Είναι

$$X(z) = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{z^2(2-(a+b)z^{-1})}{(z-a)(z-b)}$$

$$= \frac{2z^2-(a+b)z}{(z-a)(z-b)} = \frac{z(2z-(a+b))}{(z-a)(z-b)}$$

Πόλοι: $z-a=0 \Rightarrow z=a$ και $z-b=0 \Rightarrow z=b$

Μηδενικά: $z=0$ και $z=\frac{a+b}{2}$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

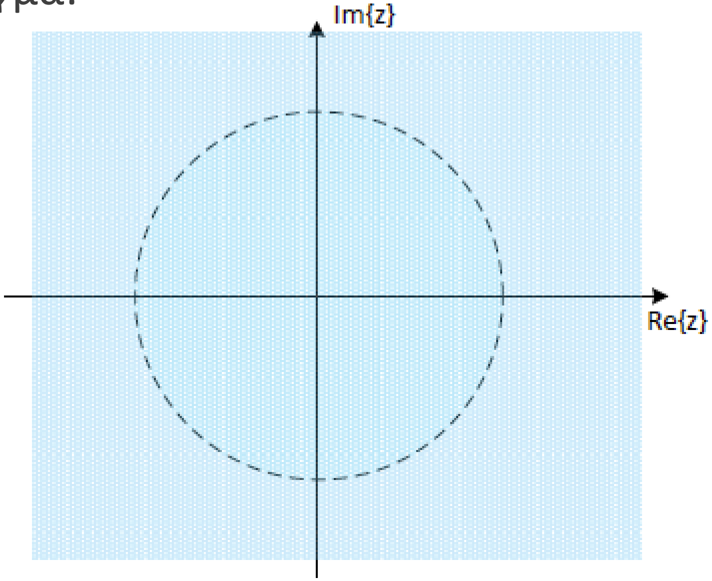
Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = \delta[0] \cdot z^{-0} = 1 \cdot 1 = 1 \quad \forall z.$$

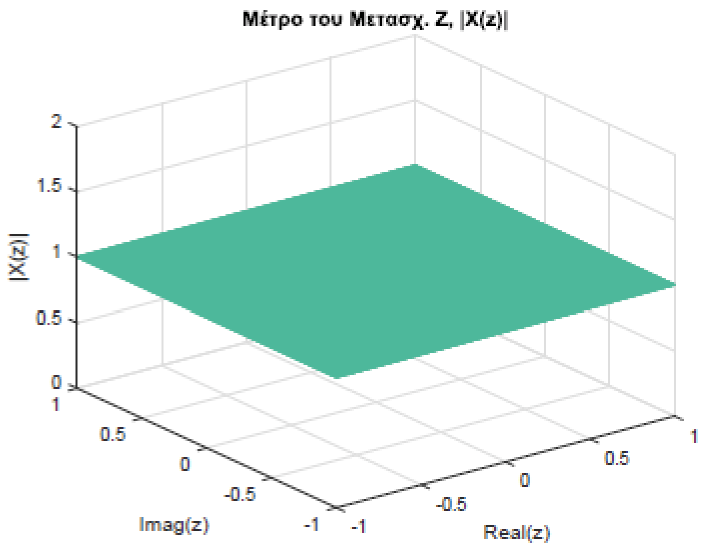
Άρα

$$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 1, \quad \forall z.$$

- Παράδειγμα:



(α′) Πεδίο σύγκλισης.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n]$.

- Παράδειγμα:

◦ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0]\, z^{-n} = 1 \cdot z^{-n_0} = z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$$

- $n_0 > 0$: $X(z) = \frac{1}{z^{n_0}}$ $\longrightarrow \lim_{z\to\infty} X(z) = 0$

  $\longrightarrow \lim_{z\to 0} X(z) = \infty$

- $n_0 < 0$: $X(z) = z^{-n_0}$ $\longrightarrow \lim_{z\to\infty} X(z) = \infty$

  $\longrightarrow \lim_{z\to 0} X(z) = 0$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$ ~ $n_0 = 2$

$x[n] = \delta[n-2]$, $y[n] = \delta[n+2]$

~ $X(z) = z^{-2}$ → <u>Δυο</u> πόλοι στο $z = 0$

→ <u>Δυο</u> μηδενικά στο $z \to \infty$

<u>ROC</u>

$|z| > 0$

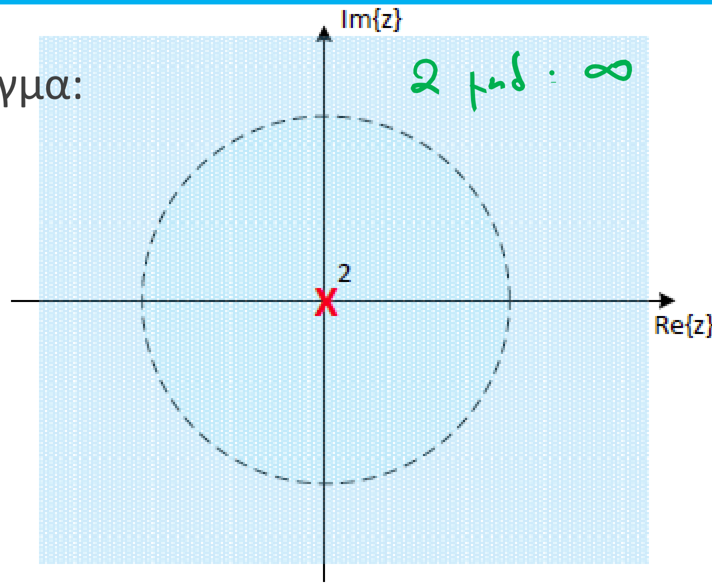
~ $Y(z) = z^{2}$ → <u>Δυο</u> μηδενικά στο $z = 0$

→ <u>Δυο</u> πόλοι στο $z \to \infty$

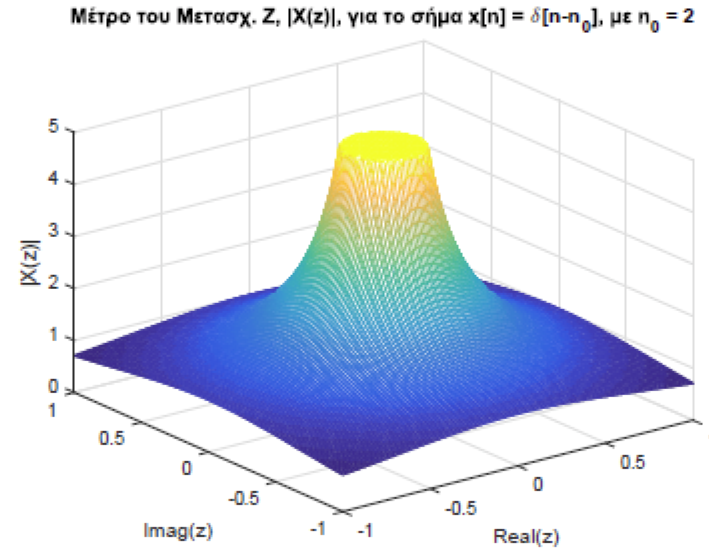
<u>ROC:</u>

$|z| < \infty$

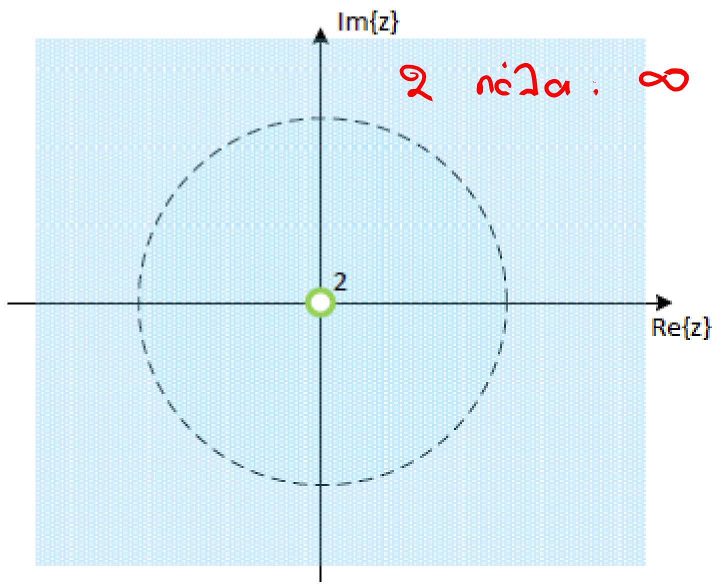
- Παράδειγμα:



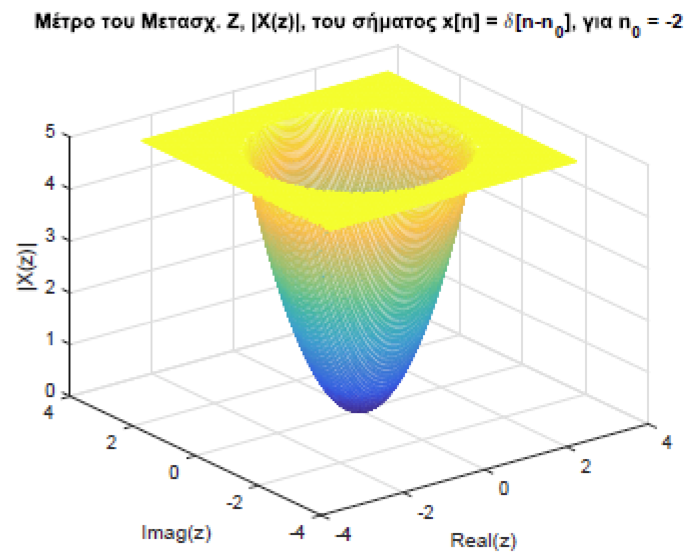
(α′) Πεδίο σύγκλισης.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = 2$.



(α′) Πεδίο σύγκλισης.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = -2$.

Συνεχίζεται... ☺