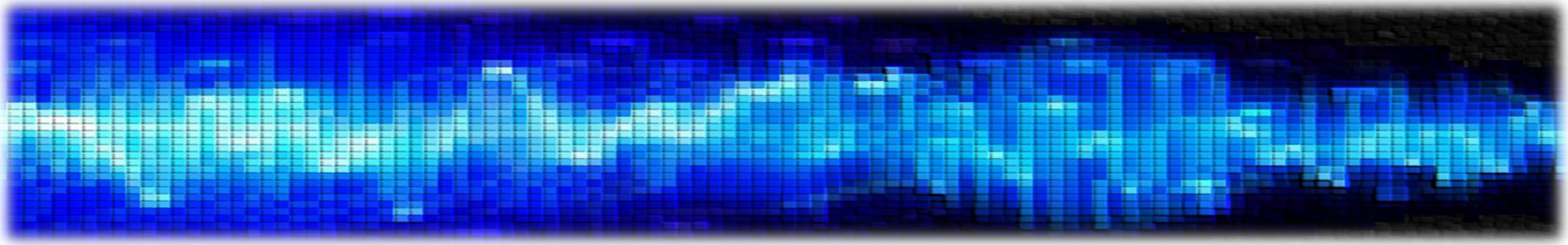
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η



- Συστήματα στο χώρο του Fourier

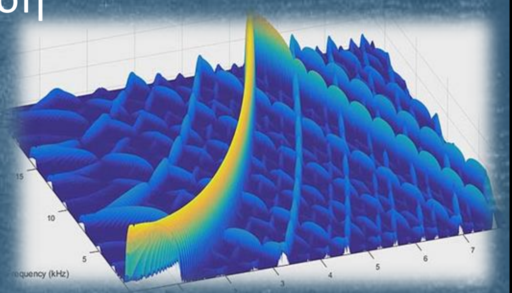
Τι περιέχει το ΗΥ370?

$1^{ο}$ Κομμάτι

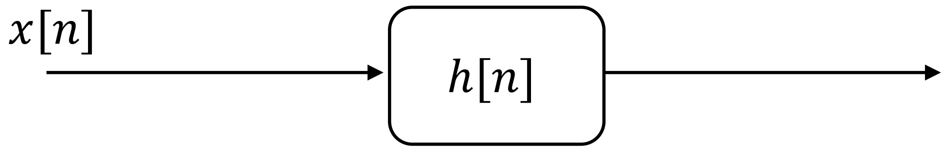
- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

$2^{ο}$ Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας (επανάληψη…)**



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

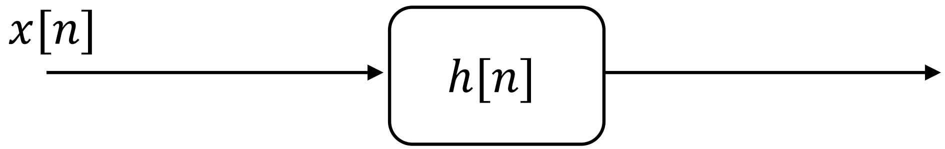
- Οπότε

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\updownarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Για να μπορούμε να εφαρμόζουμε το μετασχ. Fourier σε μια εξίσωση διαφορών, υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, ότι η απόκριση σε συχνότητα υπάρχει
  - Δεν είναι πάντα αληθές αυτό
- Για να υπάρχει η απόκριση σε συχνότητα αρκεί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

- Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί συνθήκη ευστάθειας του συστήματος!
- Άρα πρέπει να έχουμε ευσταθές σύστημα για να μπορούμε να πάρουμε το μετασχ. Fourier του!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

  - Τα πράγματα όσον αφορά την επίδραση της απόκρισης πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του είναι σχετικά ξεκάθαρα
    - Η απόκριση πλάτους πολλαπλασιάζεται με το φάσμα πλάτους της εισόδου
  - Φαινομενικά και η επίδραση της απόκρισης φάσης δε συνιστά κάτι πολύπλοκο
    - Η απόκριση φάσης προστίθεται στο φάσμα φάσης της εισόδου
  - Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη **χρονική δομή** ενός σήματος
  - Οπότε η επίδραση της απόκρισης φάσης διατηρεί ή όχι την αρχική χρονική δομή του σήματος
  - Όμως τελικά τα πράγματα δεν είναι τα όσο απλά για την απόκριση φάσης. Γιατί?
  - Γιατί η φάση ενός μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα!
    - Η πρόσθεση οποιουδήποτε ακέραιου πολλαπλάσιου του 2π διατηρεί την ίδια τιμή στη φάση

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

- Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης, το αποτέλεσμα είναι πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$
  - Αυτή η τιμή ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal phase value)

$$-\pi < ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] \leq \pi$$

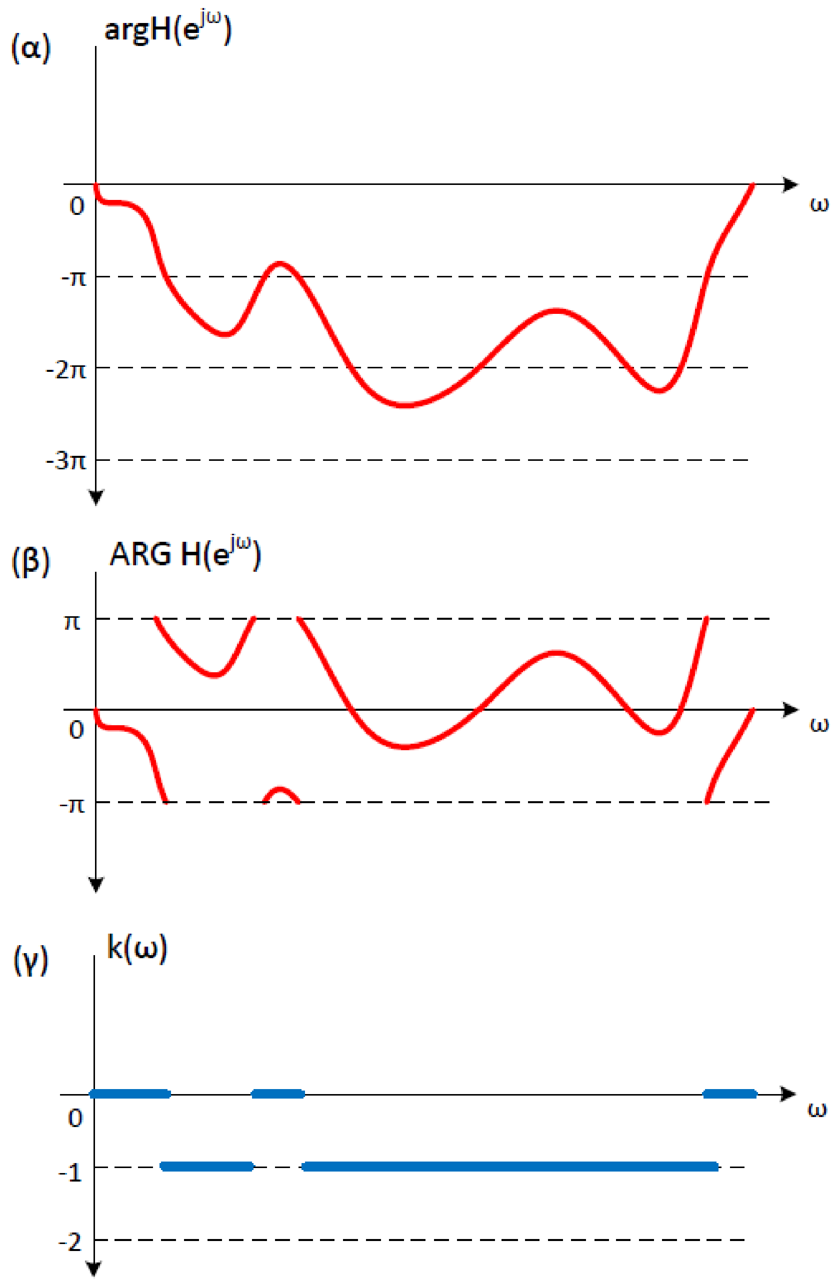
  - Οποιαδήποτε άλλη γωνία μπορεί να γραφεί με βάση την πρωτεύουσα φάση ως

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = \angle H\left(e^{j\omega}\right) = \arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = ARG\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] + 2\pi\boxed{k(\omega)} \longrightarrow \in Z$$

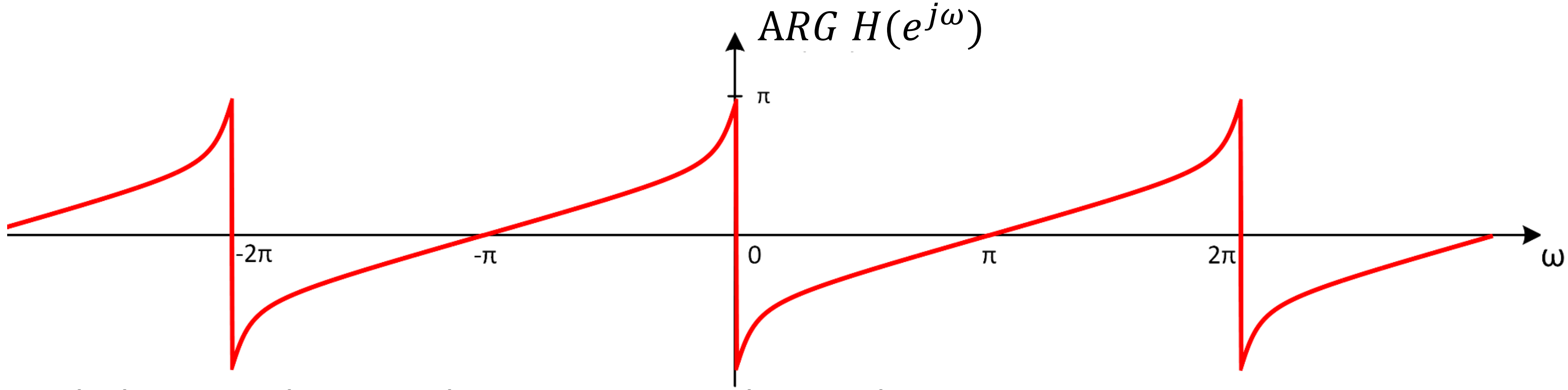
- Η διαδικασία εύρεσης της συνεχούς (ως προς ω) συνάρτησης φάσης από την πρωτεύουσα φάση που παίρνουμε από την αντίστροφη εφαπτομένη ονομάζεται **ξετύλιγμα φάσης (phase unwrapping)**

- Δείτε το ακόλουθο σχήμα

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**



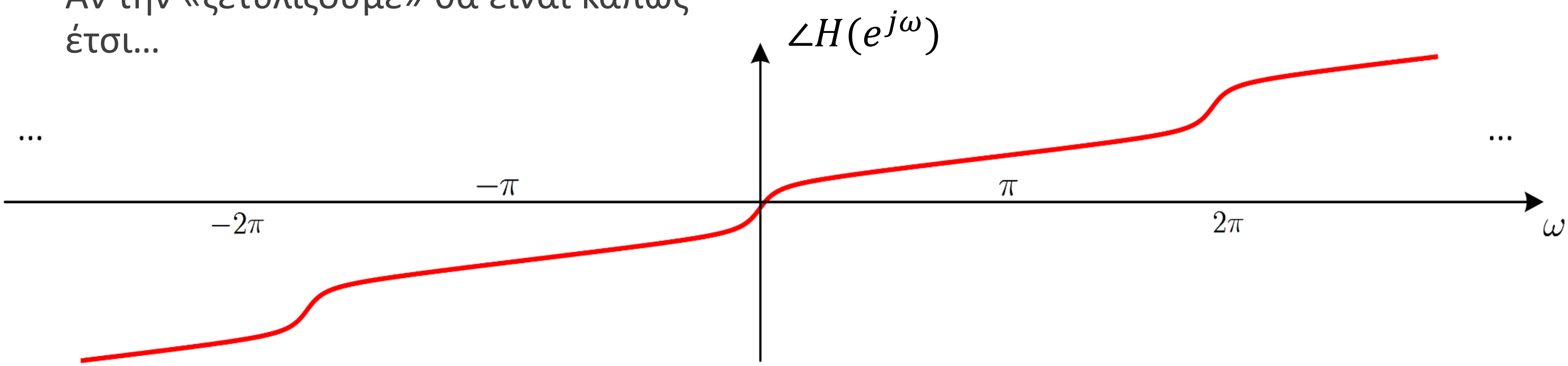
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**
  - Παράδειγμα από το παρελθόν ☺



  - Αυτή είναι η απόκριση φάσης του γνωστού σας σήματος

$$h[n] = -a^n u[-n-1], |a| > 1$$

  - Αν την «ξετυλίξουμε» θα είναι κάπως έτσι…



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης**

  - Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος για ημιτονοειδή είσοδο της μορφής

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)\,, \qquad \boxed{-\infty < n < +\infty}$$

δίνεται ως

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))$$

  - Προσέξτε:

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}\right) + \theta\right)$$

  - Η ποσότητα

$$-\frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}$$

μας δείχνει τη **χρονική καθυστέρηση σε δείγματα** του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

  - Η συνάρτηση

$$\tau_p\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{\varphi_H(e^{j\omega})}{\omega}$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης (phase delay)**

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{\boxed{|H(e^{j\omega})|}}_{\text{Απόκριση πλάτους}} e^{j\underbrace{\boxed{\phi_H(e^{j\omega})}}_{\text{Απόκριση φάσης}}}$$

- Ένα σήμα εισόδου $x[n]$ μπορεί να γραφεί συχνοτικά μέσω του μετασχ. Fourier του:

$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{\boxed{|X(e^{j\omega})|}}_{\text{Φάσμα πλάτους εισόδου}} e^{j\underbrace{\boxed{\phi_X(e^{j\omega})}}_{\text{Φάσμα φάσης εισόδου}}}$$

- Ξέρουμε ότι στην έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})| e^{j\phi_Y(e^{j\omega})} = \underbrace{\boxed{|H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})|}}_{\text{Φάσμα πλάτους εξόδου}} e^{j\underbrace{\boxed{\left(\phi_X(e^{j\omega})+\phi_H(e^{j\omega})\right)}}_{\text{Φάσμα φάσης εξόδου}}}$$

- Ας παραμείνουμε στην ημιτονοειδή μορφή εισόδου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi_x)$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
- Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης γνωρίζουμε ότι

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \phi_x + \phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right), \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Η αρχική φάση του ημιτόνου άλλαξε στην έξοδο!
  - Προστέθηκε μια φάση $\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)$
  - …η οποία σχετίζεται με το ΓΧΑ σύστημα και με τη συχνότητα ω_0 της εισόδου
    - Δηλ. εν γένει για διαφορετική συχνότητα εισόδου, θα προστεθεί διαφορετική φάση στην ήδη υπάρχουσα
- Η έξοδος μπορεί κι αυτή να γραφεί ως

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}{\omega_0}\right)\right)$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα πρόσθεσε μια επιπλέον καθυστέρηση!
- Αριθμητικά, αν για ένα σήμα εισόδου $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$ $= 2\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-2)\right)$, η απόκριση φάσης του ΓΧΑ συστήματος ήταν της μορφής $\phi_H\left(e^{j\omega}\right) = -2\omega$, τότε το σύστημα εισάγει στην είσοδο φάση ίση με

$$\phi_H\left(e^{j\pi/3}\right) = -2\omega\big]_{\omega=\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

- Άρα η καθυστέρηση φάσης του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

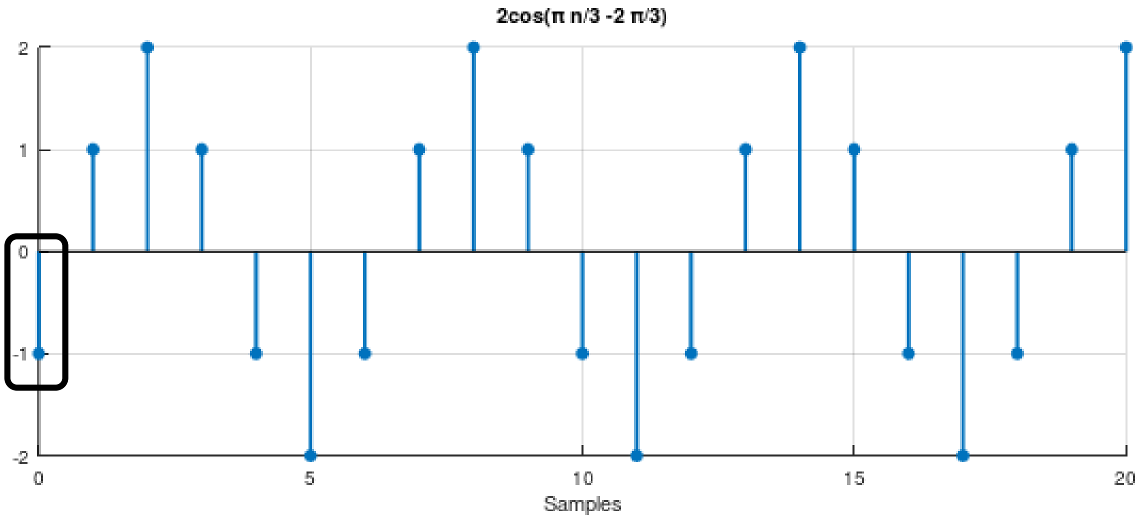
$$\tau_p\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right) = -\frac{\phi_H\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

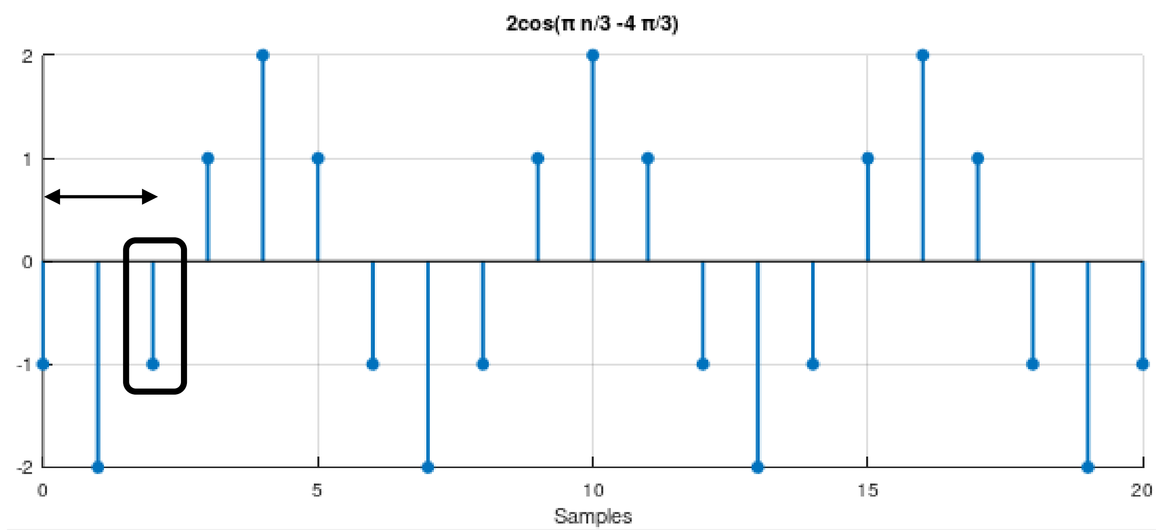
- Άρα η έξοδος καθυστέρησε 2 δείγματα σε σχέση με την είσοδο
  - … που ήταν ήδη καθυστερημένη κατά 2 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς (0,0)☺
- Επιβεβαίωση:

$$y[n] = 2\left|H\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(n - \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} - 2\right)\right) = 2\left|H\left(e^{\frac{j\pi}{3}}\right)\right| \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-4)\right)$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Η καθυστέρηση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος ισούται με το πλήθος των δειγμάτων που καθυστερεί ένα <u>άπειρης</u> διάρκειας ημιτονοειδές σήμα εισόδου όταν περάσει από ένα ΓΧΑ σύστημα





- Αγνοήσαμε σκόπιμα την επίδραση της απόκρισης πλάτους
  - …η οποία μπορεί να αλλοιώνει το πλάτος του σήματος εισόδου

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Όμως είναι αυτή η *πραγματική* καθυστέρηση ενός σήματος στην έξοδο ενός συστήματος?
  - Έστω το σήμα

$$x[n] = A\overbrace{\boxed{\cos(\omega_0 n)}}^{\text{περιβάλλουσα}}\underbrace{\boxed{\cos(\omega_c n)}}_{\text{φέρον σήμα}} = \frac{A}{2}\cos(\omega_l n) + \frac{A}{2}\cos(\omega_u n)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

με χρήση Euler/τριγωνομετρίας και με

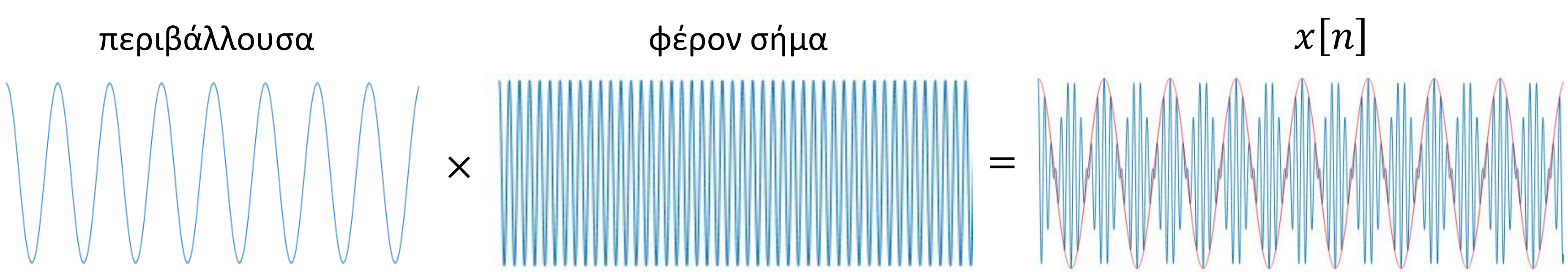
$$\omega_l = \omega_c - \omega_0$$

και

$$\omega_u = \omega_c + \omega_0$$

με

$$\omega_c \gg \omega_0$$



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Αν περάσουμε το σήμα από ένα σύστημα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi_h(e^{j\omega})}$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \frac{A|H(e^{j\omega_l})|}{2}\cos(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)) + \frac{A|H(e^{j\omega_u})|}{2}\cos(\omega_u n + \phi_h(\omega_u))$$

- Αν η **απόκριση πλάτους** είναι **περίπου μοναδιαία (γενικότερα, σταθερή)** γύρω από τις συχνότητες ω_u, ω_l τότε

$$y[n] = \frac{A}{2}\cos(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)) + \frac{A}{2}\cos(\omega_u n + \phi_h(\omega_u))$$

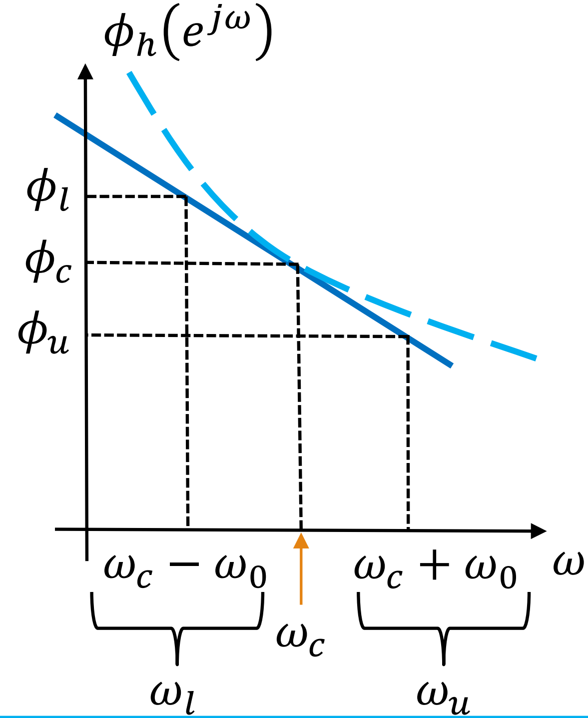
$$= A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

- Επαναφέραμε το άθροισμα σε γινόμενο για να βρούμε πόσο καθυστερεί η περιβάλλουσα και πόσο το φέρον σήμα

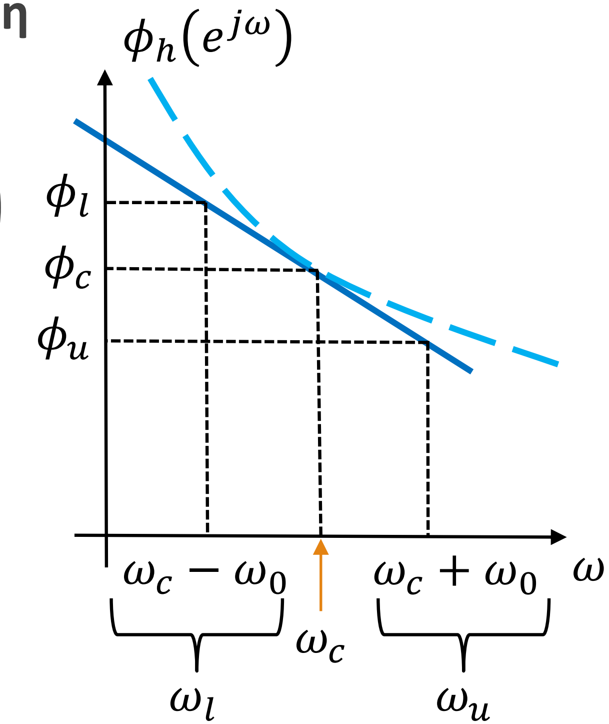
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

- Αφού υποθέσαμε ότι $\omega_c \gg \omega_0$, τότε $\omega_u \approx \omega_c$ και $\omega_l \approx \omega_c$
- Υποθέτουμε ότι η **απόκριση φάσης** είναι **περίπου γραμμική** γύρω από το ω_c
- Αφού όλες οι τιμές της φάσης στην παραπάνω σχέση εξαρτώνται από την απόκριση φάσης του συστήματος, ας **συμβολίσουμε *για ευκολία***:
  - $\phi_l = \phi_h\left(e^{j(\omega_c - \omega_0)}\right) = \phi_h\left(e^{j\omega_l}\right)$
  - $\phi_u = \phi_h\left(e^{j(\omega_c + \omega_0)}\right) = \phi_h\left(e^{j\omega_u}\right)$
  - $\phi_c = \phi_h\left(e^{j\omega_c}\right)$



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2}\right)$$

- Με χρήση του παραπάνω, η καθυστέρηση φάσης του δεύτερου όρου του γινομένου θα είναι

$$-\frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c} \approx -\frac{2\phi_c}{2\omega_c} = -\frac{\phi_h(e^{j\omega_c})}{\omega_c}$$

- Για τον πρώτο όρο

$$-\frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0} = -\frac{\phi_u - \phi_l}{\omega_u - \omega_l} \approx -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega_c})$$

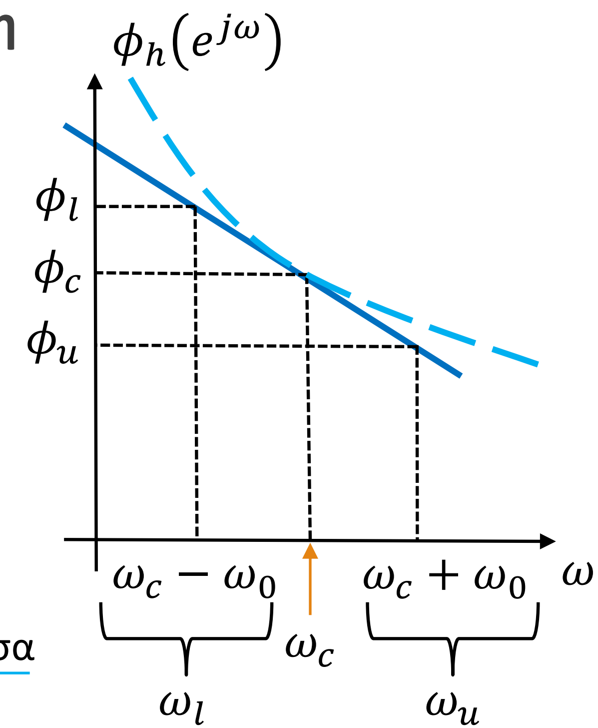
που ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)** $\tau_g(e^{j\omega_c})$ στη συχνότητα ω_c

- Η καθυστέρηση ομάδας ορίζεται ως συνάρτηση του ω ως:

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\phi_h(e^{j\omega})$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2}\right)\cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2}\right)$$



- Έτσι το σήμα γράφεται ως

$$y[n] = A\cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0}\right)\right)\cos\left(\omega_c\left(n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c}\right)\right)$$

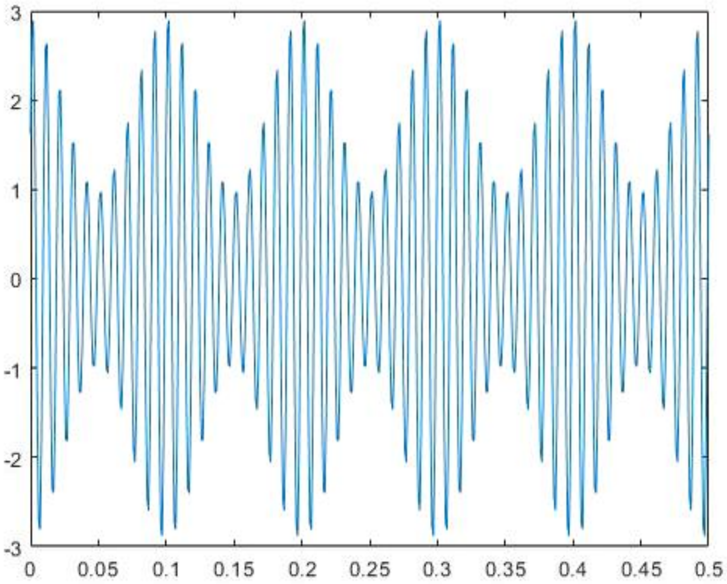
και με βάση τα παραπάνω

$$y[n] \approx A\overbrace{\boxed{\cos(\omega_0(n - \boldsymbol{\tau_g}(\boldsymbol{e^{j\omega_c}})))}}^{\text{περιβάλλουσα}}\underbrace{\boxed{\cos(\omega_c(n - \boldsymbol{\tau_p}(\boldsymbol{e^{j\omega_c}})))}}_{\text{φέρον σήμα}}$$

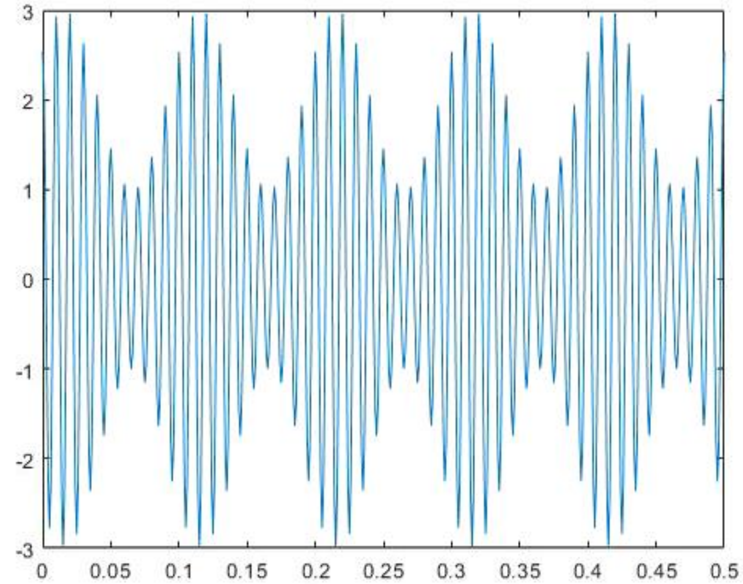
- Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα καθυστερεί διαφορετικό χρόνο στην έξοδο από το φέρον σήμα!

- Κάναμε **δυο** υποθέσεις:
  1. **Το φάσμα πλάτους είναι (σχεδόν) σταθερό γύρω από τη συχνότητα $\boldsymbol{\omega_c}$**
  2. **Η απόκριση φάσης (σχεδόν) γραμμική γύρω από τη συχνότητα $\boldsymbol{\omega_c}$**

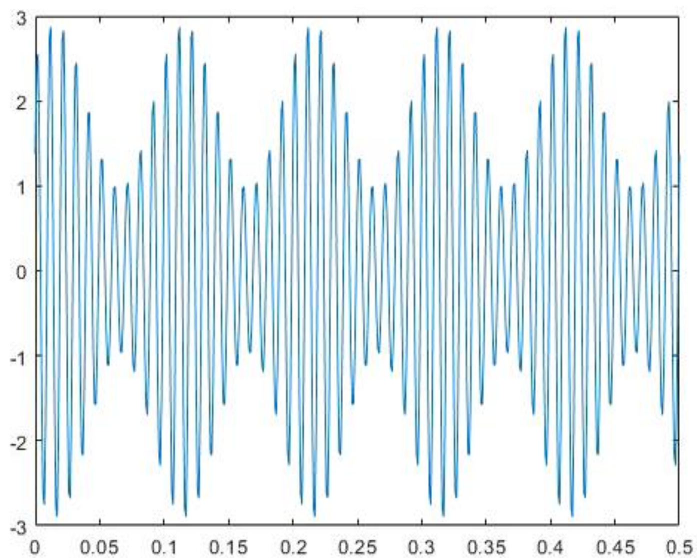
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



Phase Delay



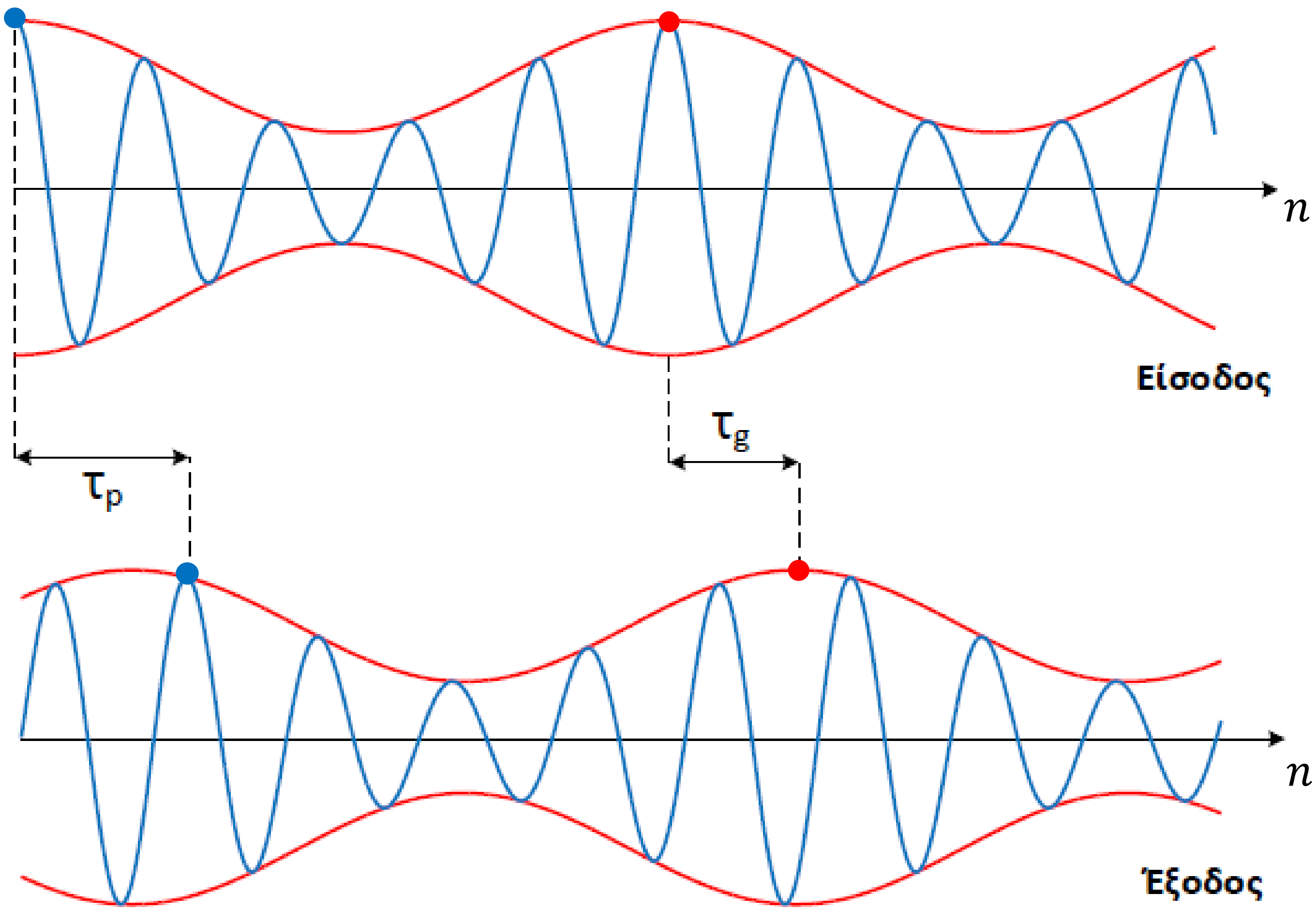
Group Delay



Phase & Group Delay

Videos

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

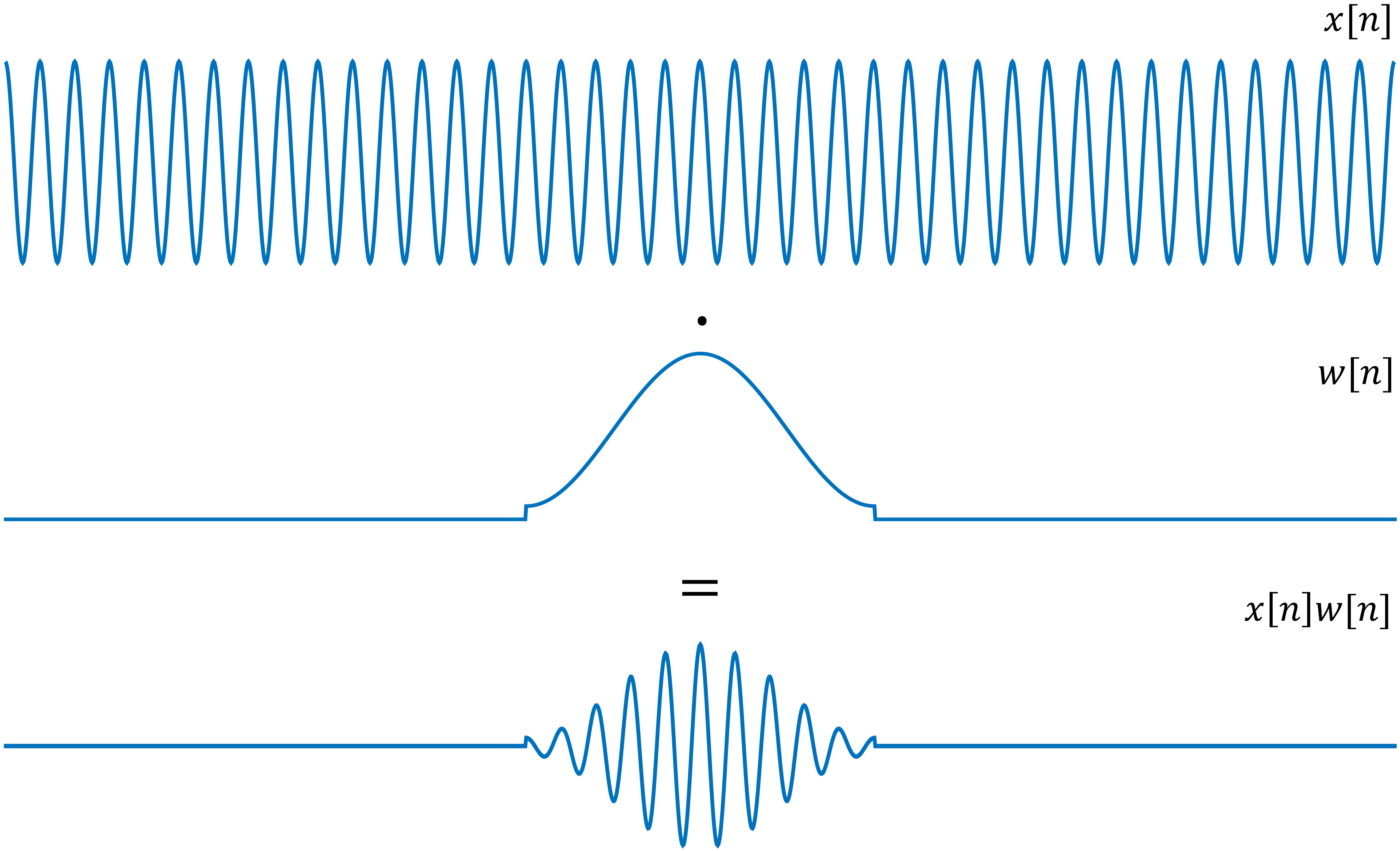


- Ποια από τις δυο μετρικές εκφράζει την καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

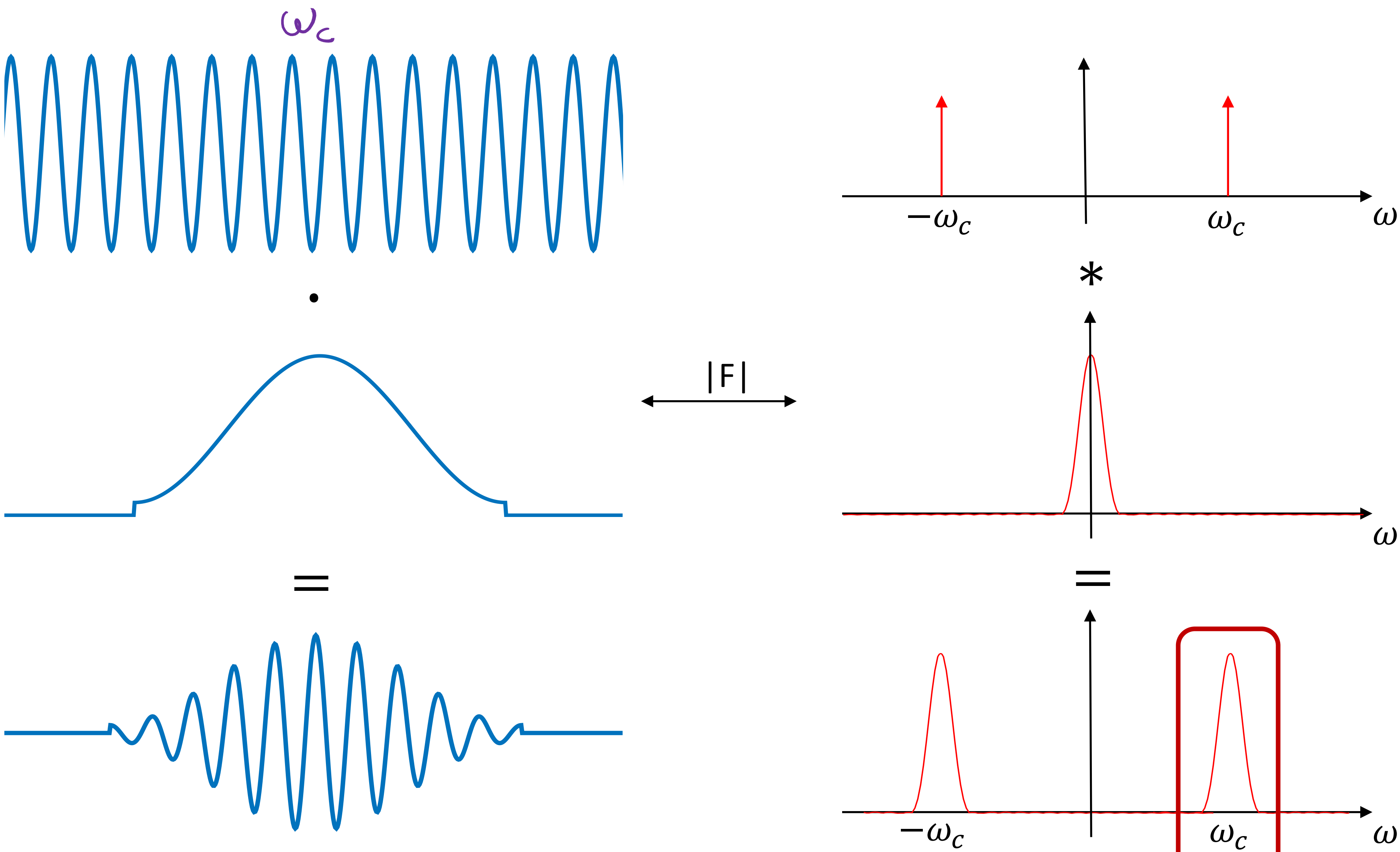
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
- Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε ότι το σήμα εισόδου αποτελούνταν από ένα **group (ομάδα)** δυο συχνοτήτων, **όλες πολύ κοντά και γύρω** από μια:
  - Την $\omega = \omega_c$ (δηλ. τη φέρουσα συχνότητα)
- Η **ομάδα** αποτελούνταν από τις $\boldsymbol{\omega_c \pm \omega_0}$
  - Η καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του ΓΧΑ συστήματος καθορίστηκε από την καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα ω_c, δηλ. από την καθυστέρηση που έλαβαν οι δυο αυτές συχνότητες, υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε
- Όλα τα παραπάνω είχαν μια υπόθεση: $-\infty < n < +\infty$
- Στην πραγματικότητα δεν έχουμε τέτοιες διάρκειες σημάτων
  - Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα από ένα άπειρης διάρκειας σήμα
- Ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άπειρης διάρκειας σήμα πολλαπλασιασμένο με ένα παράθυρο
- Ξέρουμε ότι οι συχνότητες ενός τέτοιου σήματος θα καθορίζονται από το μετασχ. Fourier του παραθύρου
  - Αυτό είναι το group συχνοτήτων μας! ☺
- Ας θεωρήσουμε ένα παράθυρο Hanning κι ας δούμε τι συμβαίνει…

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, οπότε θα προκύπτει όπως παρακάτω:

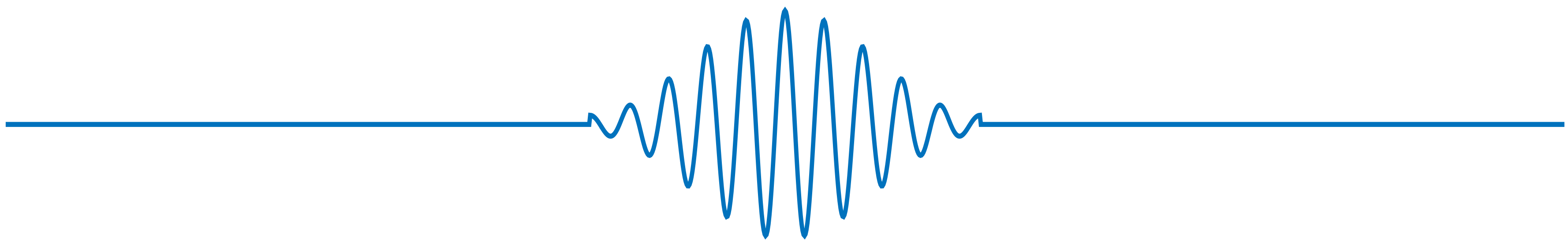


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



Γκρουπ συχνοτήτων γύρω από την ω_c

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



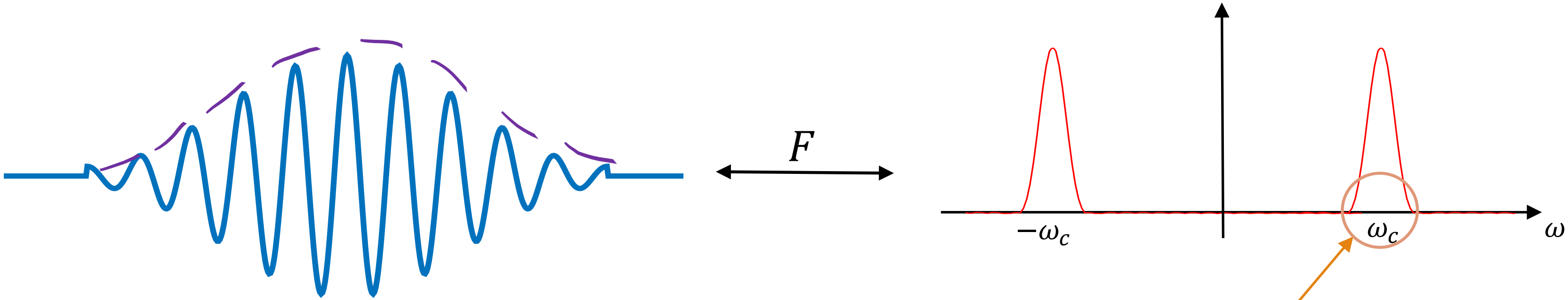
- Παρατηρήσατε ότι ο παραπάνω ημιτονοειδής παλμός δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα ω_c αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

$$w[n]\cdot A\cos(\omega_c n) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}W\left(e^{j\omega}\right) * \left(A\pi\delta(\omega-\omega_c)+A\pi\delta(\omega+\omega_c)\right)$$

$$\frac{A}{2}W\left(e^{j(\omega-\omega_c)}\right)+\frac{A}{2}W\left(e^{j(\omega+\omega_c)}\right)$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει ο ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier $W\left(e^{j\omega}\right)$ του σήματος της περιβάλλουσας $w[n]$!
  - Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε το σήμα ονομάζεται **στενής ζώνης**!
    - Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα $w[n]$ πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια…
      - Γιατί? Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης! $\longrightarrow x[an] \overset{F}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\frac{\omega}{a}}\right)$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**



- Παρατηρήστε ότι το ημίτονο είναι **διαμορφωμένο** (πολλαπλασιασμένο) με μια Gaussian-like **περιβάλλουσα** $w[n]$

- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το **«πακέτο συχνοτήτων»** που αποτελεί τον ημιτονοειδή παλμό!

- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, τότε κάθε «πακέτο» κάθε συχνότητας θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος, κι έτσι η έξοδος θα είναι εν γένει **διαφορετική στη μορφή της** σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

- Αν όμως τα διαμορφωμένα ημίτονα («πακέτα») είναι σήματα **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα «**μικρό»** εύρος συχνοτήτων

$$[-\omega_c - B, -\omega_c + B], [\omega_c - B, \omega_c + B]$$

με ω_c τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης κάθε «πακέτου» της εξόδου!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

- Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

- Έστω ότι η **περιβάλλουσα** $w_k[n]$ κάθε συχνότητας ω_k είναι ένα **σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα**, δηλ.

$$w_k[n] \neq 0, \qquad N_1 \leq n \leq N_2$$
$$W_k(e^{j\omega}) = 0, \qquad |\omega| > B_k, \qquad B_k \ll \omega_k$$

- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega-\omega_k)}\right) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k\left(e^{j(\omega+\omega_k)}\right) \right)$$

- Πράγματι έχουμε ένα άθροισμα σημάτων στενής ζώνης, αφού κάθε $W_k\left(e^{j(\omega\pm\omega_k)}\right)$ είναι στενής ζώνης!

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**

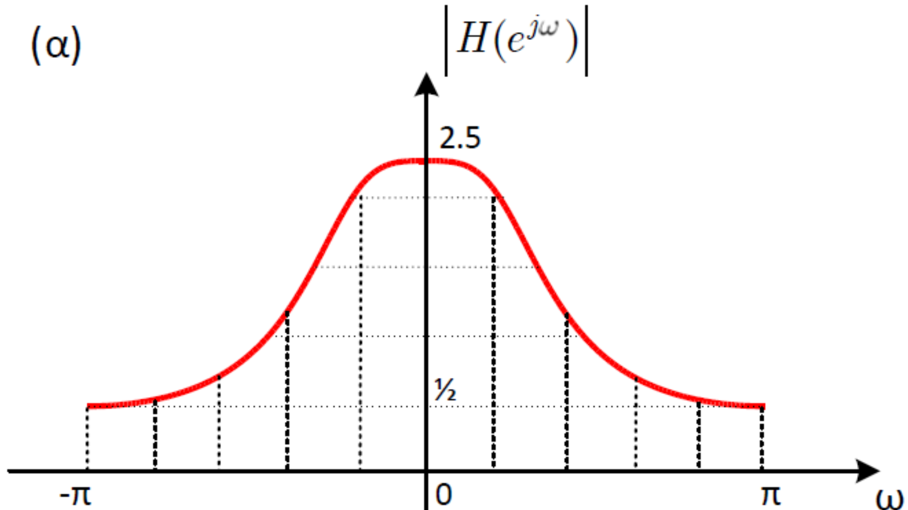
- Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

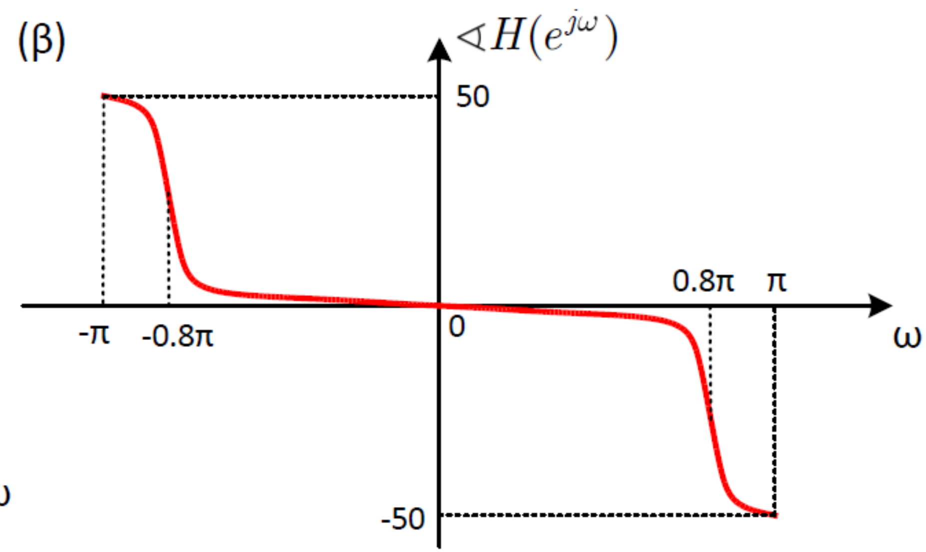
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} w_k\left[n - \tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)\right] \cos\left(\omega_k\left(n - \tau_p\left(e^{j\omega_k}\right)\right) + \theta_k\right)$$

- Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας ω_k (δηλ. κάθε «πακέτο» συχνοτήτων γύρω από την τελευταία) έχει καθυστερήσει κατά $\tau_g\left(e^{j\omega_k}\right)$

- Η ερμηνεία του group delay ως η καθυστέρηση ενός ημιτονοειδούς παλμού στην έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι έγκυρη μόνον αν:
  - ❑ Η απόκριση πλάτους γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
  - ❑ Η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
    - ❑ Δηλ. η απόκριση πλάτους της εισόδου πρέπει να είναι αρκετά narrowband (“στενής ζώνης”)

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.



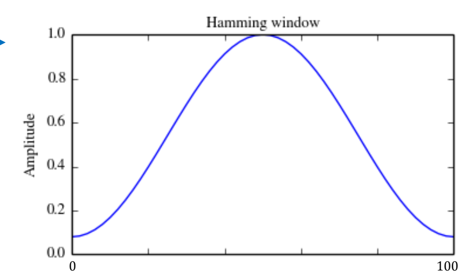


- Είσοδος

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

$$= w[n-M]\sin(0.2\pi n) + w[n-M]\sin(0.8\pi n) + w[n-7M]\sin(0.4\pi n)$$

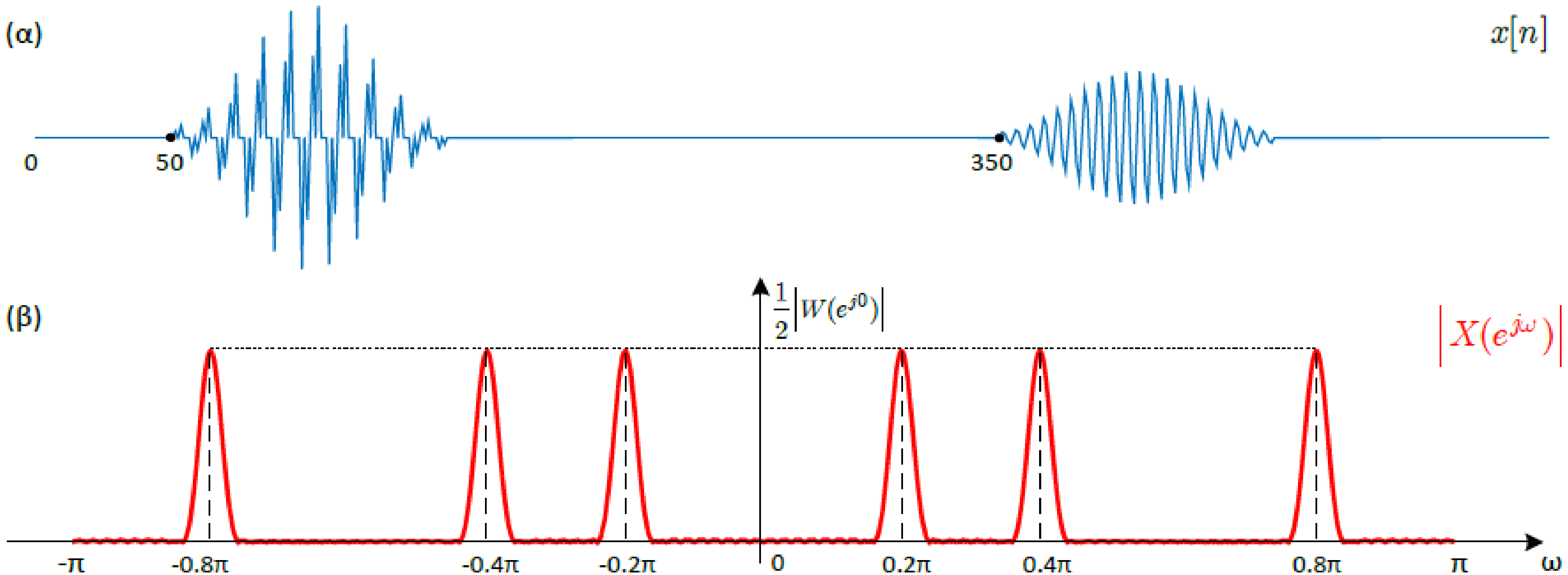
με $M = 50$ και $w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N = 100$



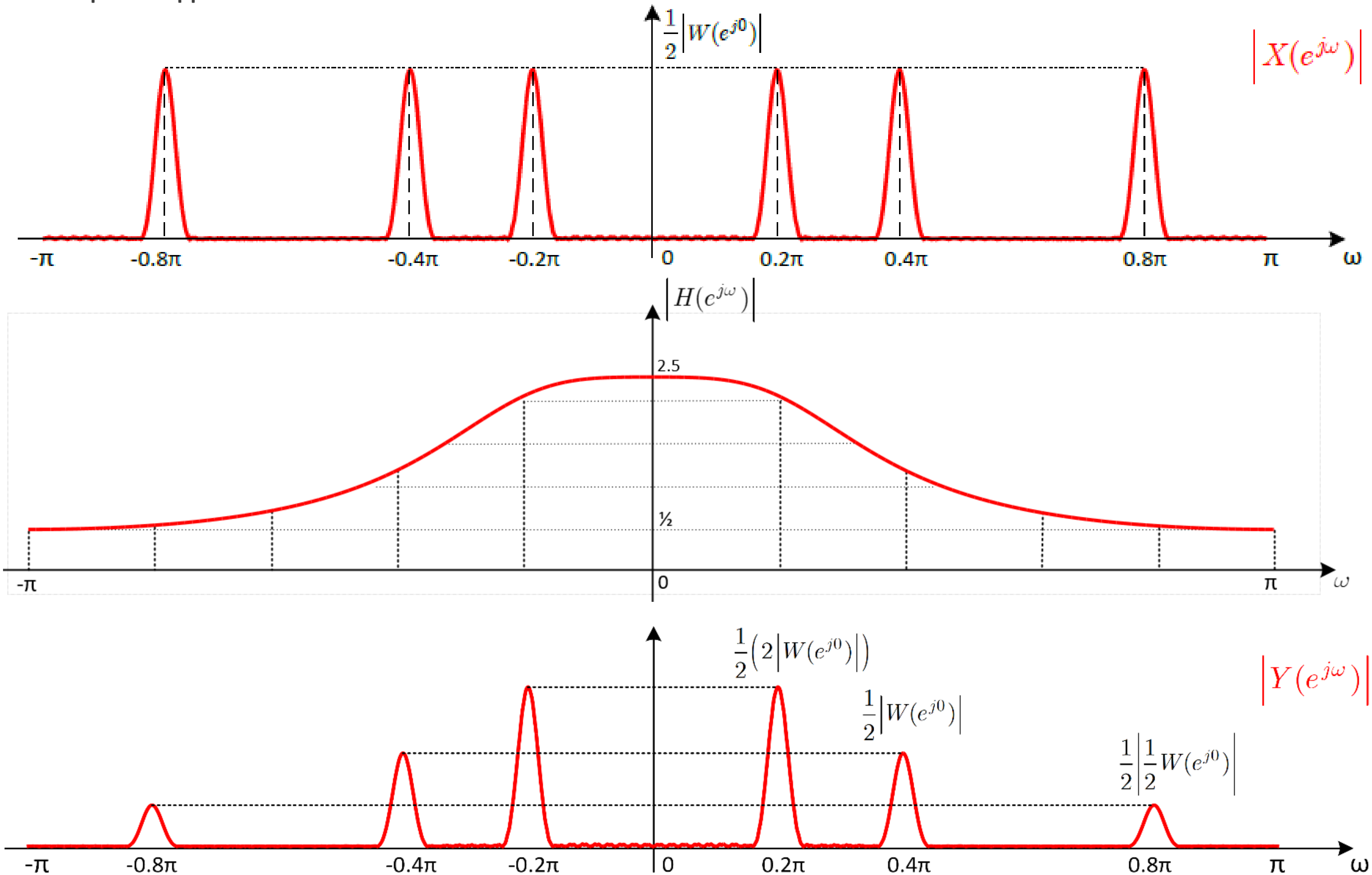
- Το σημαντικό εύρος συχνοτήτων για αυτό το $w[n]$ είναι $\sim \frac{8\pi}{100}\frac{rad}{sample}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

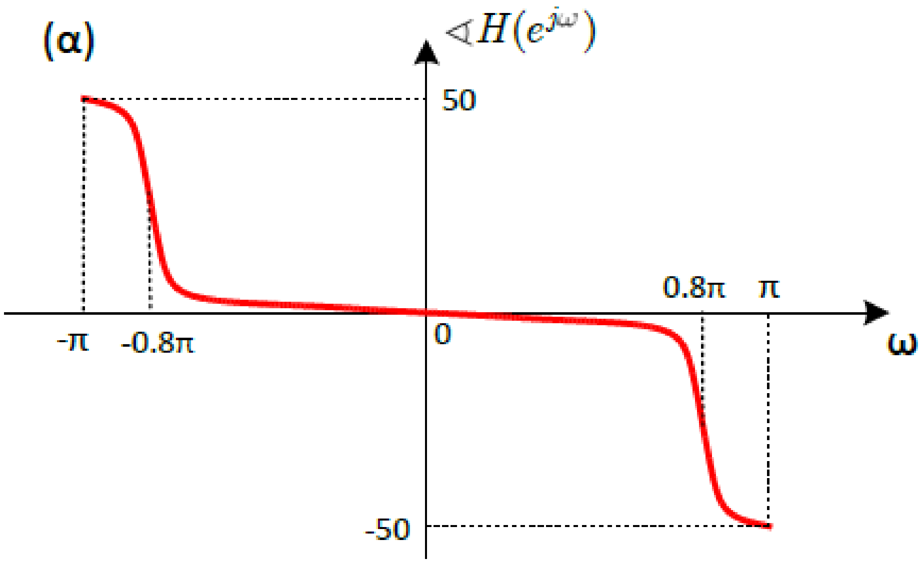
$$x[n] = w[n-50]\sin(0.2\pi n) + w[n-50]\sin(0.8\pi n) + w[n-350]\sin(0.4\pi n)$$

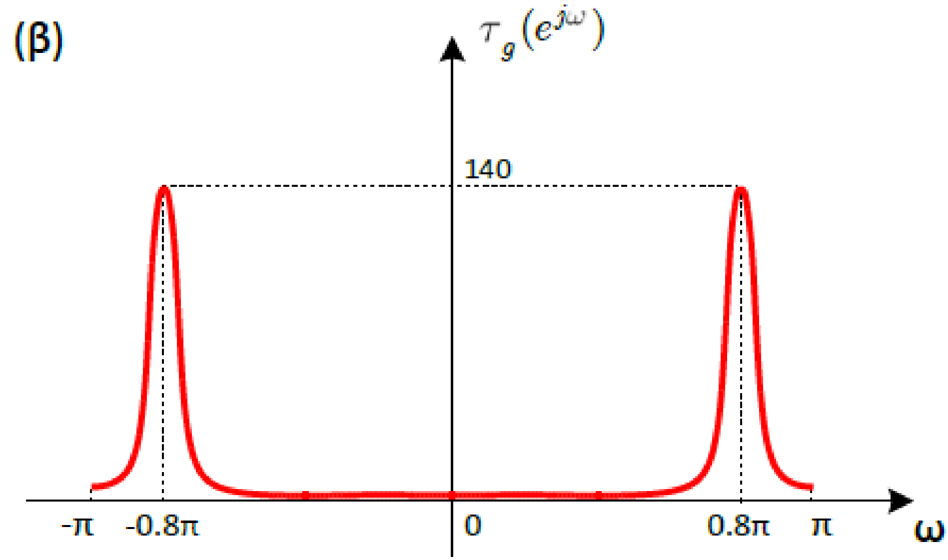


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

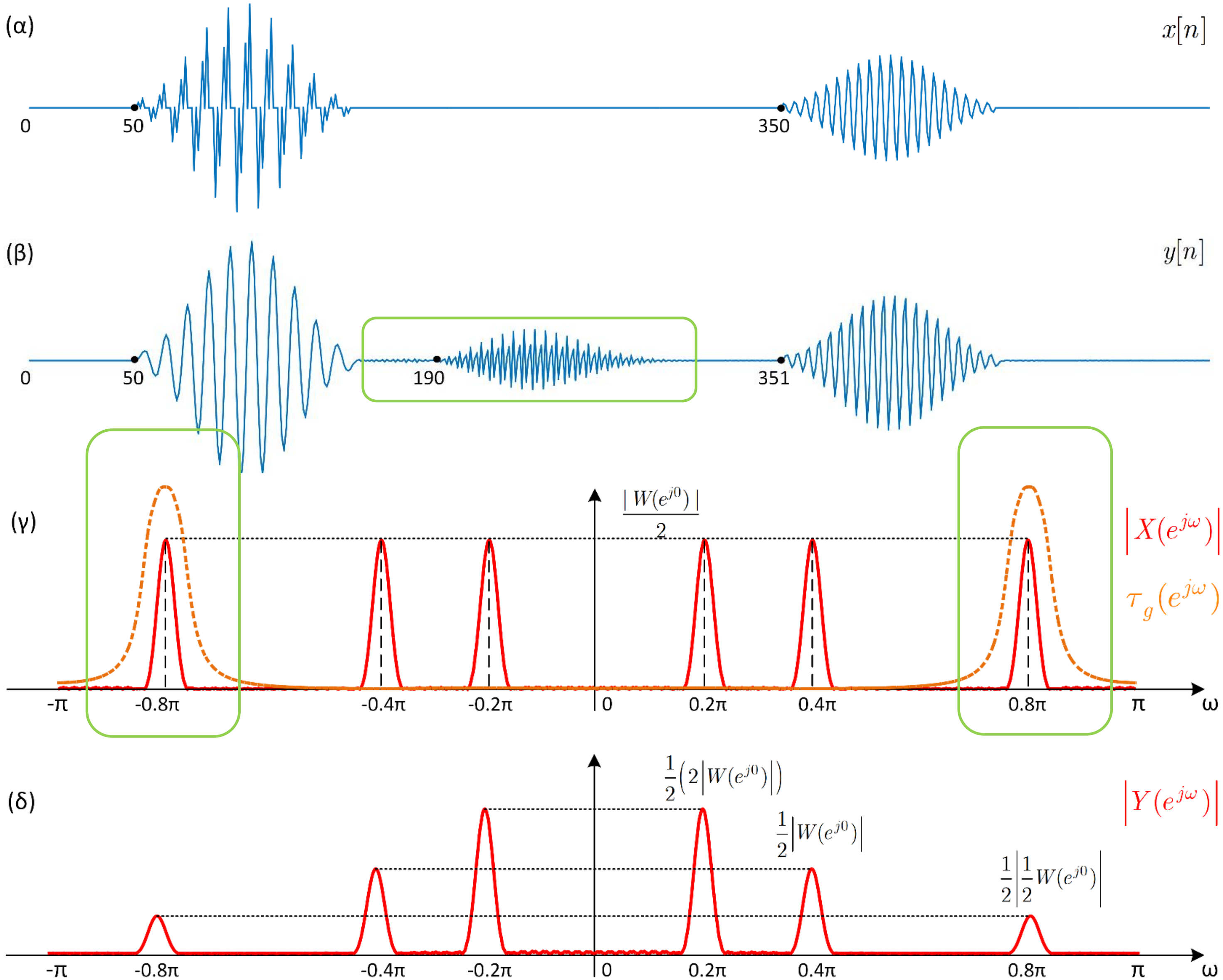


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:



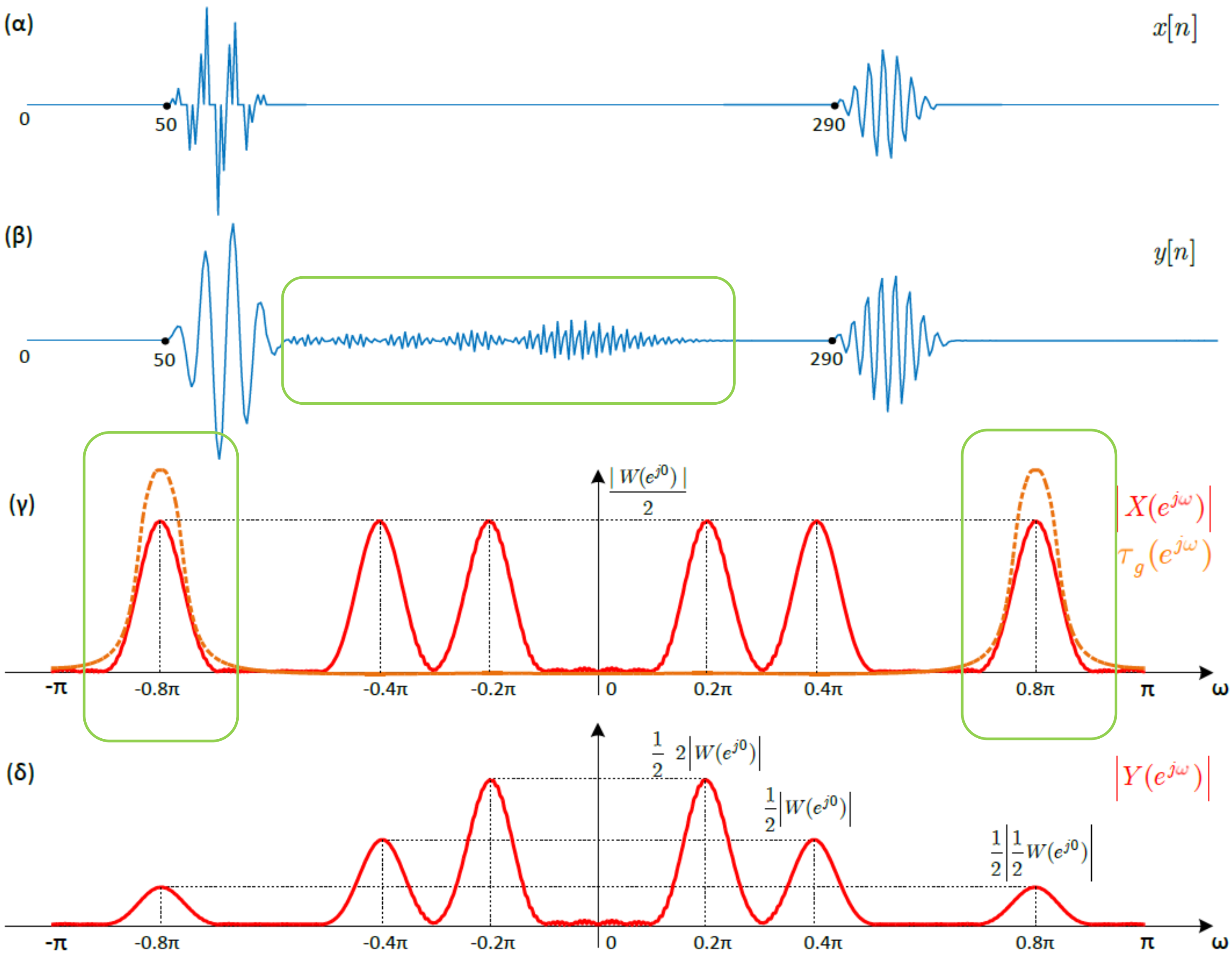


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

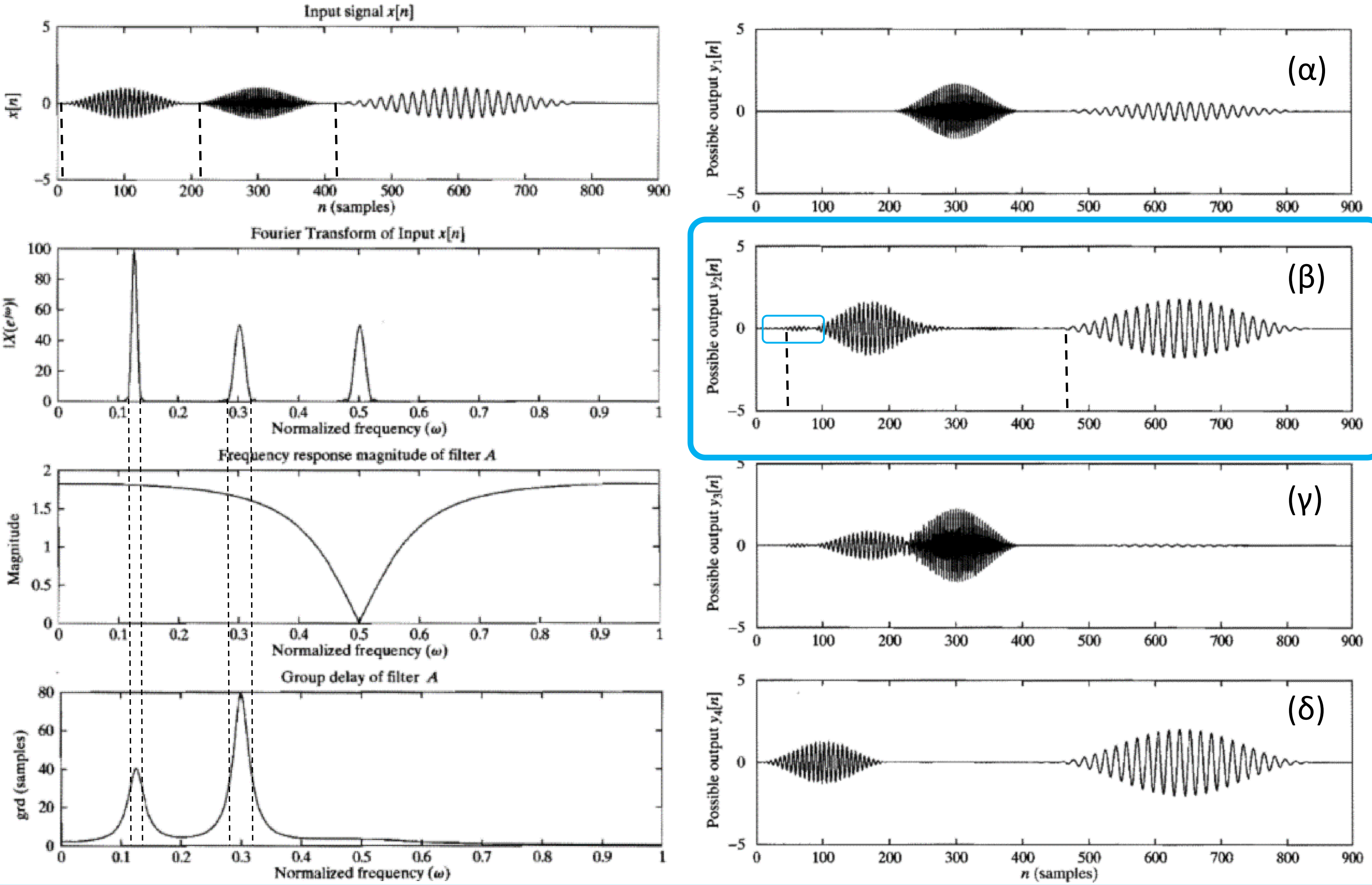


- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας**
  - Παράδειγμα:

Είσοδος ευρείας ζώνης (wideband)



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ