Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

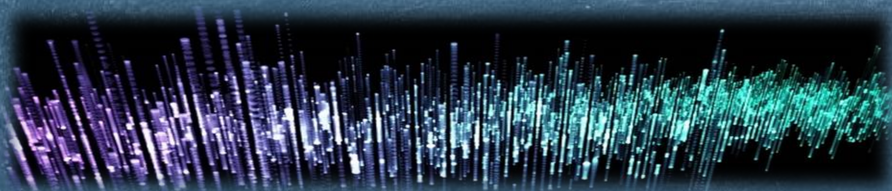
ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

Τι περιέχει το ΗΥ370?

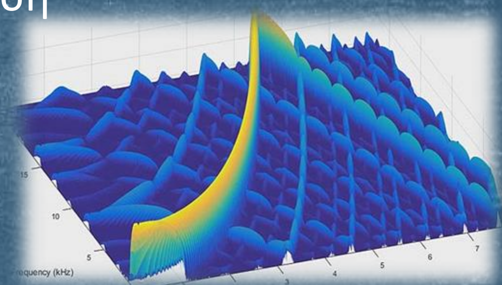
1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



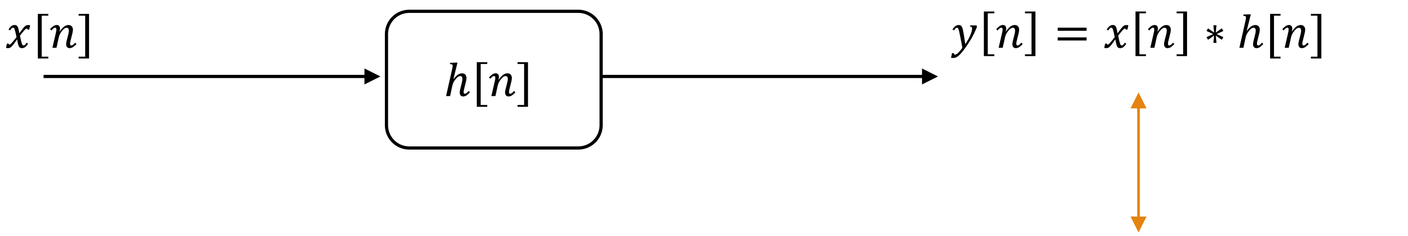
2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Ζ
- Συστήματα στο χώρο του Ζ
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

  - Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\updownarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

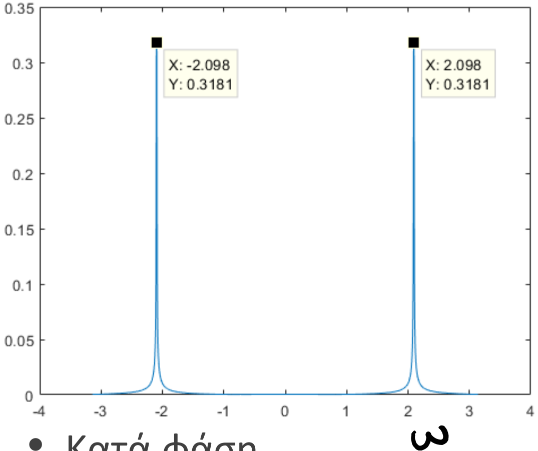
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

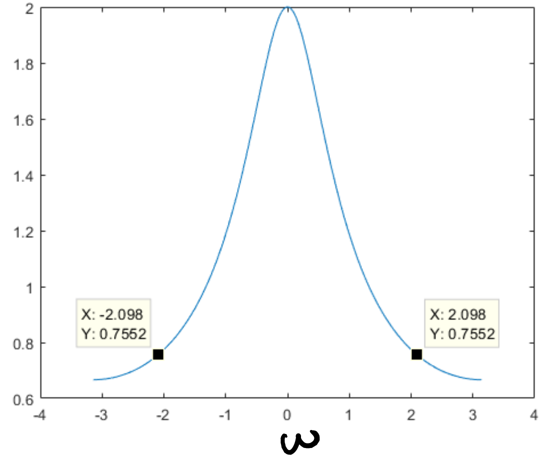
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

Είσοδος



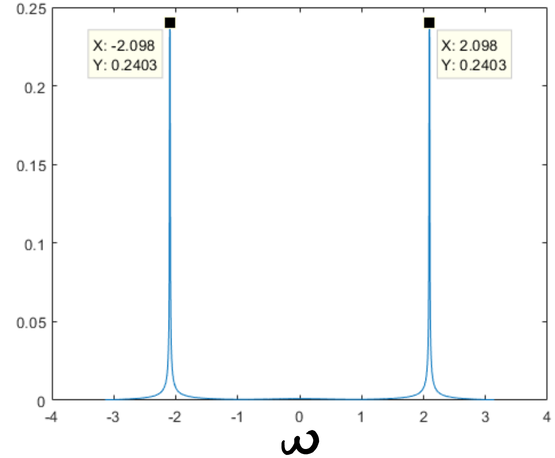
•

Σύστημα



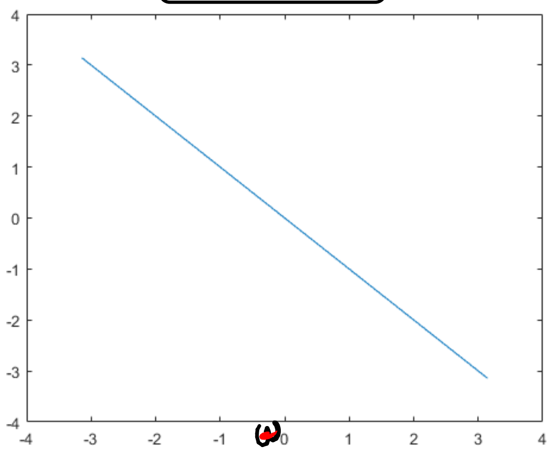
=

Έξοδος



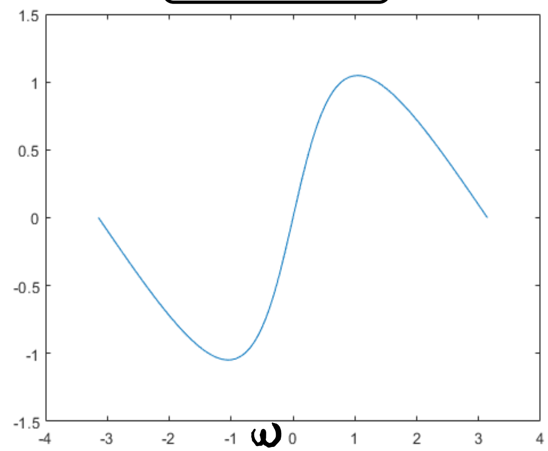
    - Κατά φάση

Είσοδος



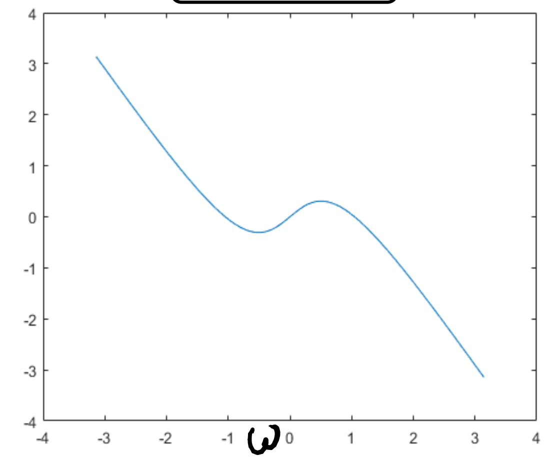
+

Σύστημα



=

Έξοδος



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

  - Η σχέση

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Πώς? Λύνοντας ως προς $H\left(e^{j\omega}\right)$, δηλ.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

  - Ας δούμε ένα παράδειγμα…

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε την κρουστική απόκριση.

$a^n u[n],\ |a|<1 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-a e^{-j\omega}}$

Γνωρίζουμε ότι $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$

- $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$
- $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

άρα $h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$.

$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0}$

Ιδιότητα Χρονικής καθυστέρησης

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

  - Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X\left(e^{j\omega}\right) \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}$$

  - Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

Μετασχηματίζω την εξίσωση διαφορών:

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = \left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}e^{-j\omega}$$

Χρονική καθυστέρηση (ξανά!)

Άρα

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1].$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Χαρακτ. πολυώνυμο

Στο πεδίο του χρόνου: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

Θεωρούμε νέο σύστημα $S_0 : y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \rightsquigarrow \lambda - \frac{1}{2} = 0$

$\Updownarrow$

Θέτουμε $x[n] = \delta[n] \rightsquigarrow h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n]$.

$\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

Χαρακτ. ρίζα

Θεωρούμε η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_0[n] = c\lambda^n, \quad n \geq 0$$
$$= c\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

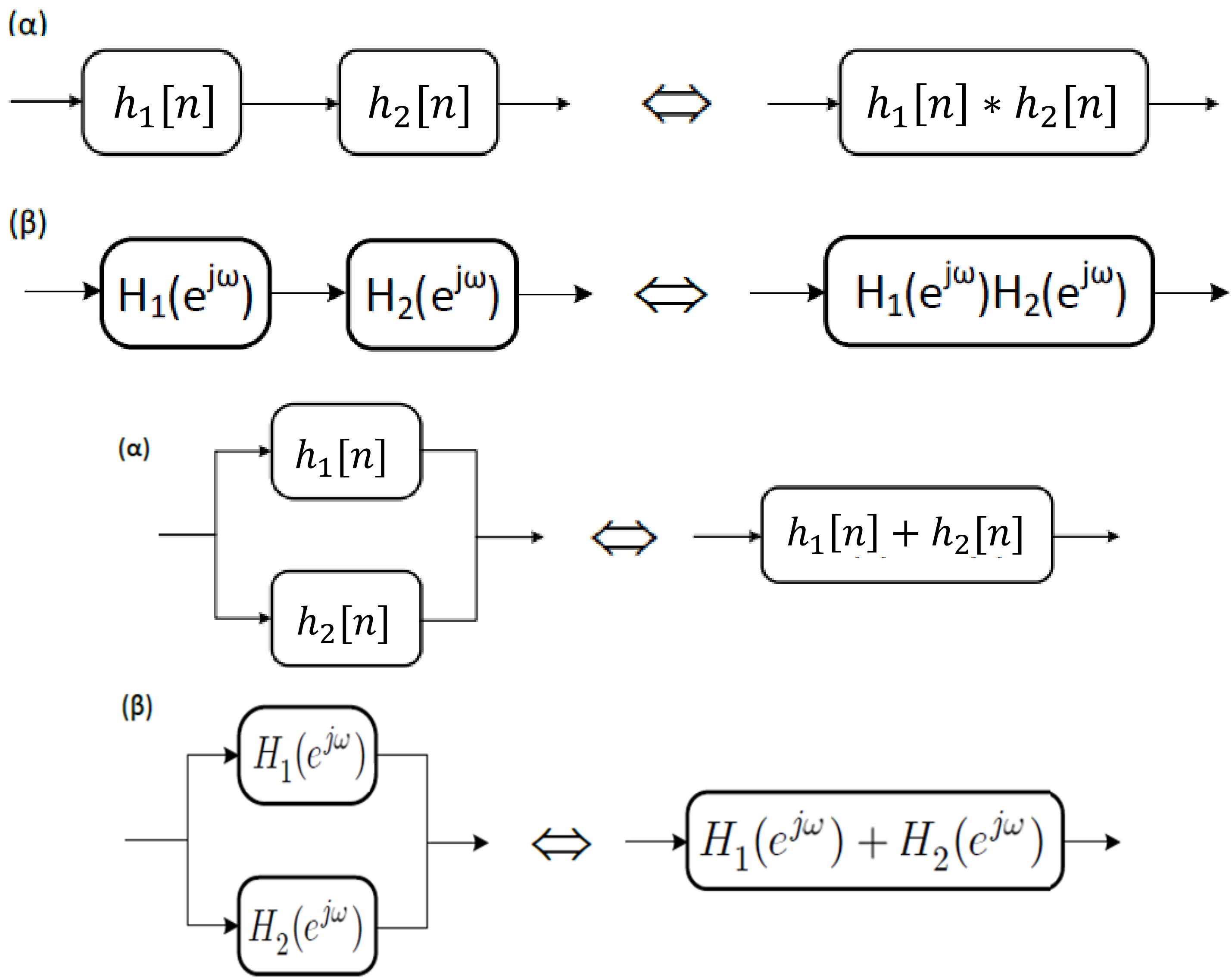
Για $n=0$: $h_0[0] - \frac{1}{2}h_0[-1] = \delta[0] \Leftrightarrow h_0[0] - \frac{1}{2}\cdot 0 = 1$

$\Leftrightarrow h_0[0] = 1 \Rightarrow c\lambda^0 = 1 \Rightarrow c\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$

Άρα $h_0[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. Λόγω ΓΧΑ, $h[n] = h_0[n] - \frac{1}{4}h_0[n-1]$.

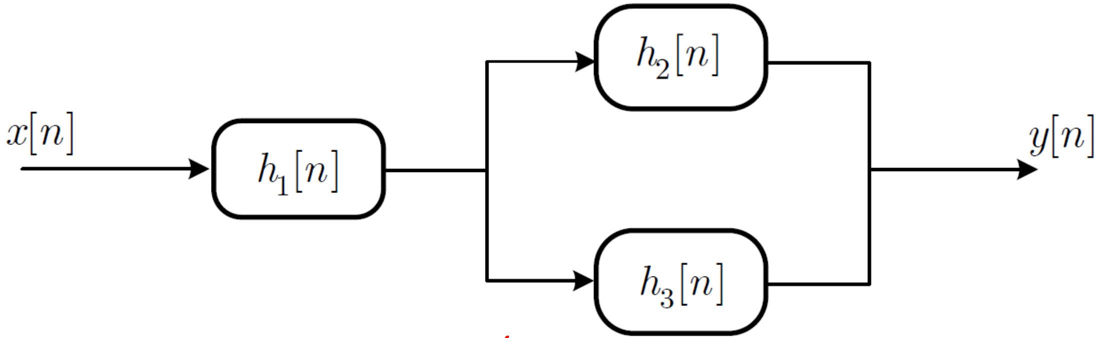
$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$.

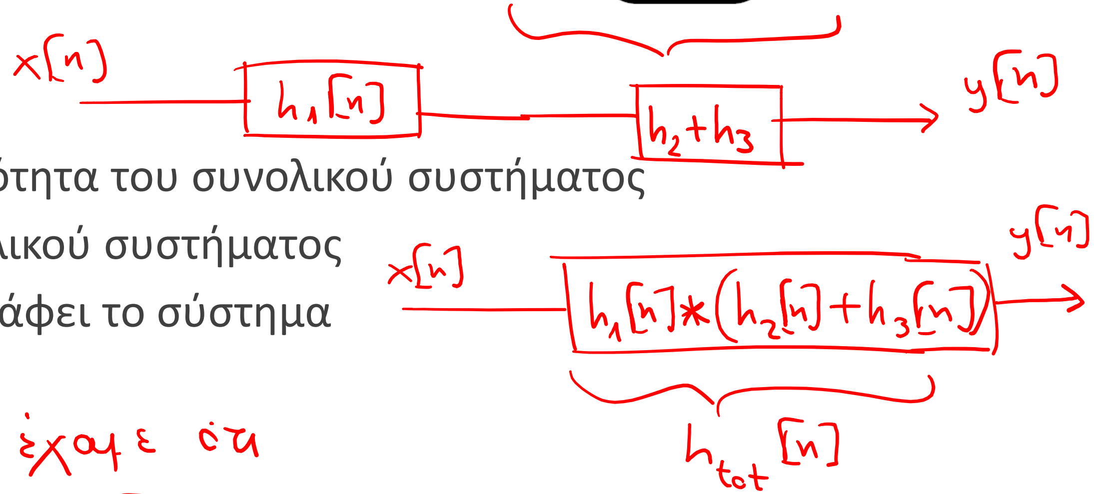
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$
$$h_2[n] = \delta[n-2],$$
$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$





α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

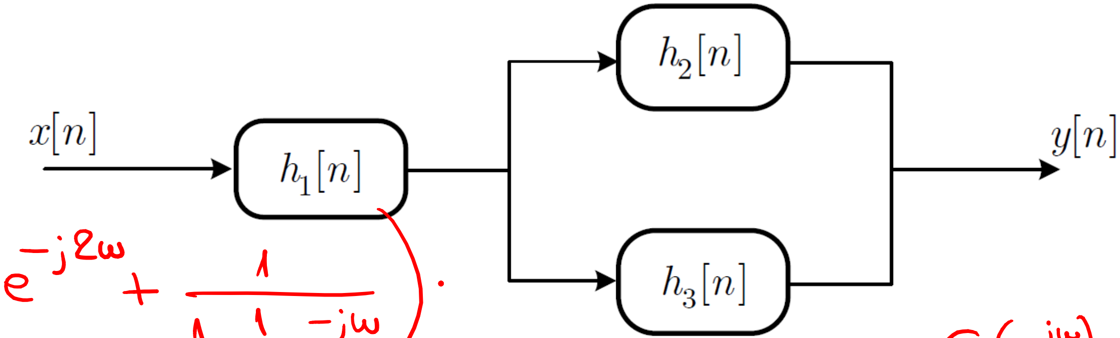
γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

α) Από τα συστήματα δεξιά, έχουμε ότι

$$h_{tot}[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) \xleftrightarrow{F} H_{tot}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot (H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega}))$$

Επίσης, $h_1[n] \xleftrightarrow{F} H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$, $h_2[n] \xleftrightarrow{F} H_2(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}$, και

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



$$h_3[n] \xleftrightarrow{F} H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Άρα

$$H_{tot}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\left(e^{-j2\omega} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right).$$

β) Είναι

$$H_{tot}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}e^{-j2\omega} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$G(e^{j\omega})$

Για τον $G(e^{j\omega})$:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$A = G(e^{j\omega})\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\Big|_{e^{-j\omega}:=2} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\cancel{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}\Big|_{e^{-j\omega}:=2}$$

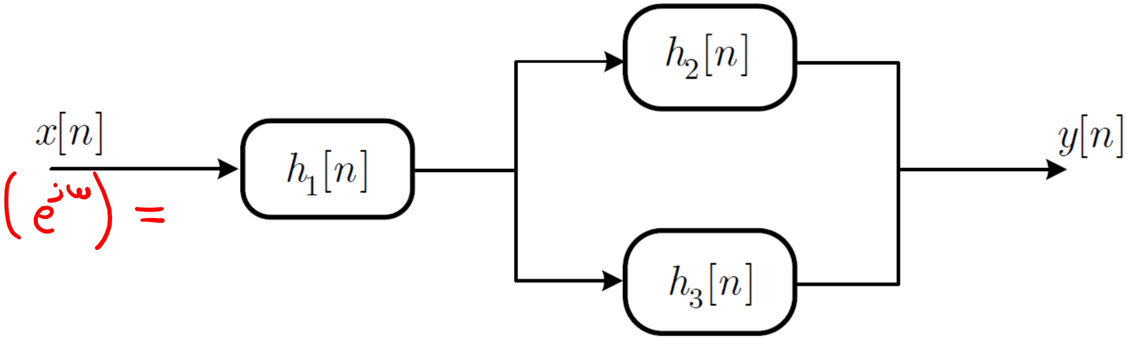
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}:=2} = 2, \quad B = -1,$$

όμοια.

Οπότε

$$G(e^{j\omega}) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{-1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:



Άρα:

$$H_{tot}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + G(e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{-1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

, και με χρήση πινάκων και ιδιοτήτων, έχουμε:

$$h_{tot}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n].$$

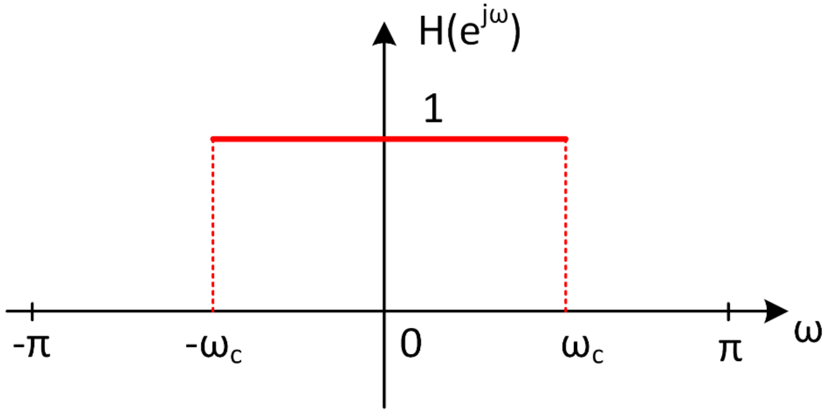
γ) Ξέρουμε ότι $H_{tot}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j2\omega}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)+1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} =$

$$= \frac{1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) =$$

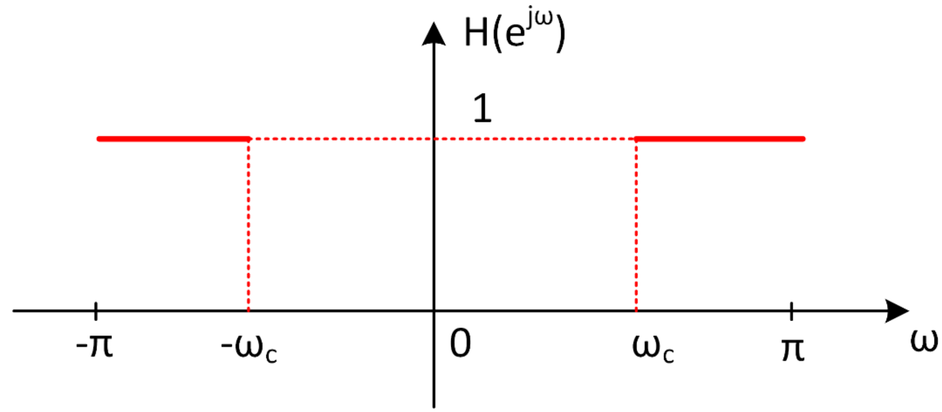
$$= X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{F^{-1}} \begin{cases} y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2] = \\ = x[n]+x[n-2]-\frac{1}{4}x[n-3]. \end{cases}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

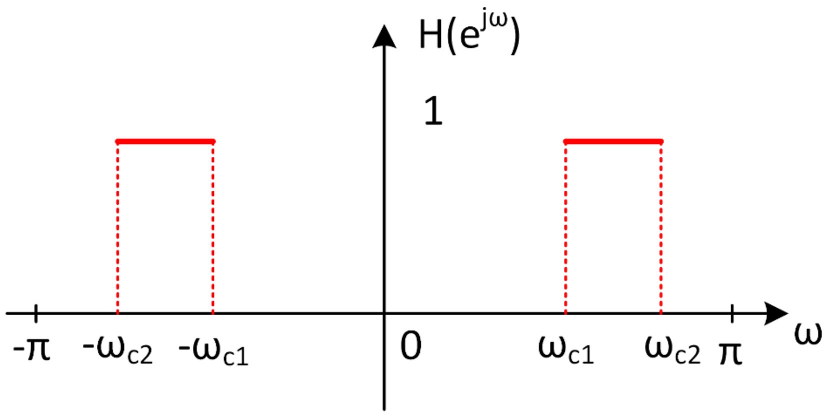
- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας



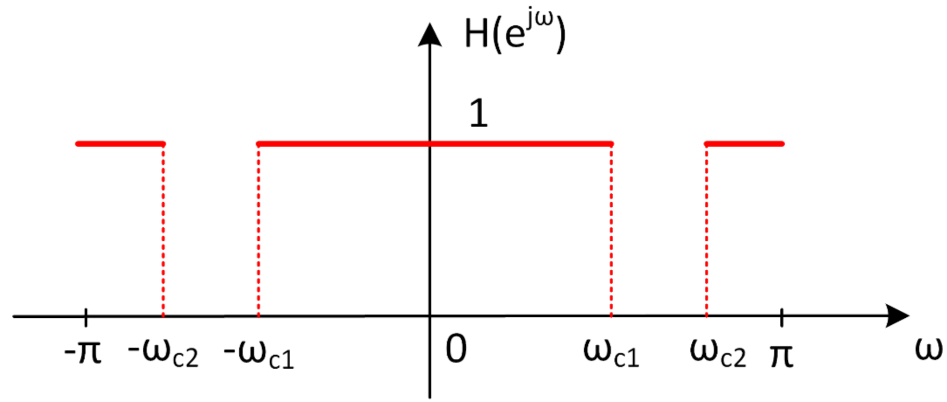
(α) Χαμηλοπερατό



(β) Υψιπερατό



(γ) Ζωνοπερατό



(δ) Ζωνοφρακτικό

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

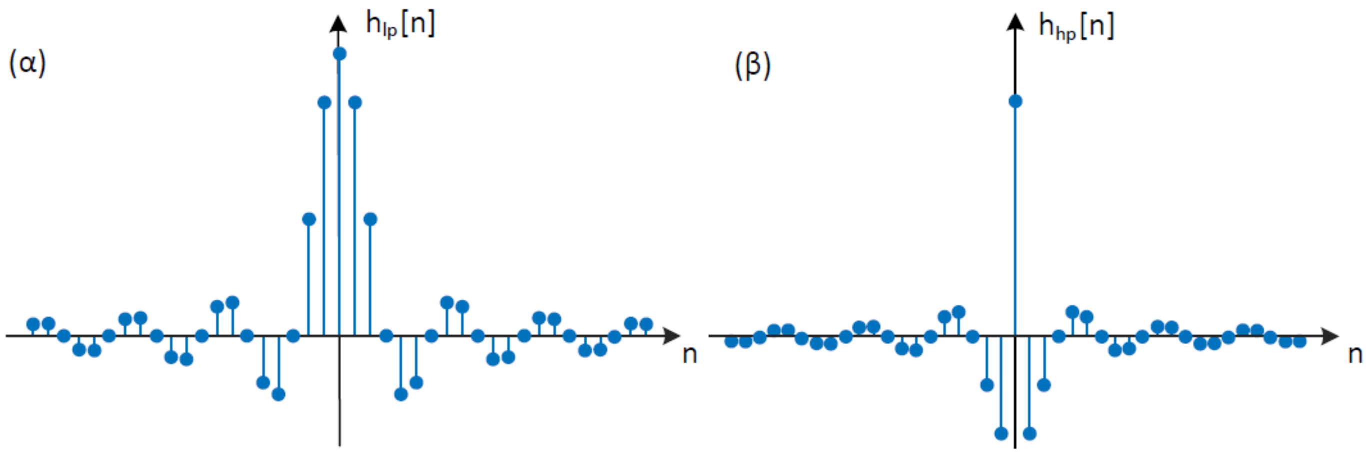
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad \leftrightarrow \quad H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

  - Το υψιπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

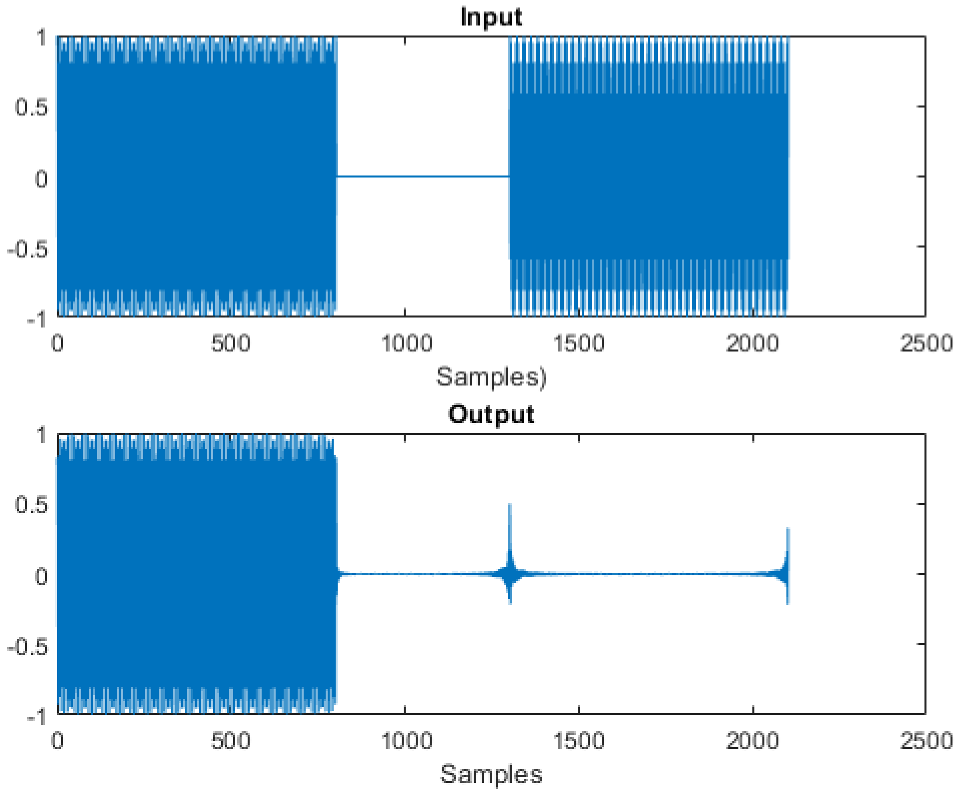
  - Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**

```
% Ideal lowpass filter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tones
f1 = 1800; %Hz
f2 = 2800; %Hz

% Sampling frequency and time axis
fs = 8000;
t = 0:1/fs:0.1; % .1 seconds

% Discrete time frequencies
w1 = 2*pi*f1/fs;
w2 = 2*pi*f2/fs;

% Sound
x = [cos(2*pi*f1*t) zeros(1,500) cos(2*pi*f2*t)];

% Lowpass filter
fc = 2600; % Hz
wc = 2*pi*fc/fs;
n = -length(x)/2:length(x)/2;
hlp = wc/pi * sinc(wc*n/pi);

% Filter!
y = conv(x,hlp,'same');

% Show!
figure; subplot(211);
plot(x); xlabel('Samples)'); title('Input');
subplot(212);
plot(y); xlabel('Samples'); title('Output');
```



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
- **Παράδειγμα:**

$\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ $\omega_2 = \frac{3\pi}{4}$

- Έστω η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα ως $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος αν η κρουστική του απόκριση δίνεται ως

$$h[n] = 4\frac{\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)}{\pi(n-1)}$$

Αναγνωρίζω ότι $h[n] = h_{lp}[n-1]$, όπου $h_{lp}[n] = 4\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$.

$$\updownarrow F \qquad\qquad \updownarrow F$$

$$H(e^{j\omega}) \overset{1}{=} H_{lp}(e^{j\omega})e^{-j\omega} \qquad H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 4, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad 1$$

$$\overset{1}{=} \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το φίλτρο $h[n]$ είναι lowpass με συχνότητα αποκοπής $\frac{\pi}{2}$, άρα

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
- **Παράδειγμα:**

η συχνότητα της εισόδου που θα περάσει θα είναι η $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$, ενώ αυτή που θα "κοπεί" θα είναι η $\omega_2 = \frac{3\pi}{4}$, οπότε δε θα ασχοληθούμε με αυτή.

Γνωρίζω ότι

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X_1(e^{j\omega})$$

και

$$X_1(e^{j\omega}) = F\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right\} = 2\pi\,\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi\,\delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

άρα

$$Y(e^{j\omega}) = 2\pi H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\pi\, 4e^{-j\frac{\pi}{4}}\,\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi\, 4e^{j\frac{\pi}{4}}\,\delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

οπότε

$$y[n] = 2 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right) = 8\cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right),$$ από γνωστά ζεύγη.

(δηλ. το $A\cos(\omega_0 n + \varphi) \xleftrightarrow{F} A\pi e^{j\varphi}\delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi}\delta(\omega + \omega_0)$)

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**

- **Παράδειγμα:**

Εναλλακτική λύση:

Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης και ιδιοτιμής, ξέρουμε ότι αν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$$

η έξοδος θα είναι

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \varphi + \sphericalangle H(e^{j\omega_0}))$$

Στο παράδειγμα, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, και άρα $H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = 4e^{-j\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow |H(e^{j\frac{\pi}{4}})| = 4$ και

$A = 2$ $\quad\quad \sphericalangle H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = -\frac{\pi}{4}$

Οπότε

$$y[n] = 2 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right) = 8\cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right).$$

που είναι η ίδια απάντηση με πριν.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ