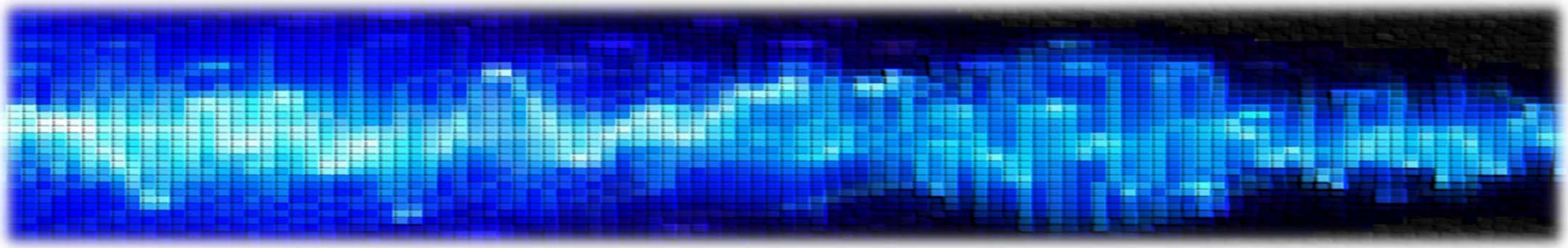
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

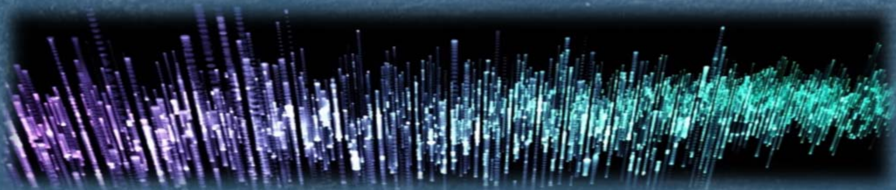


- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ιδιότητες

Τι περιέχει το HY370?

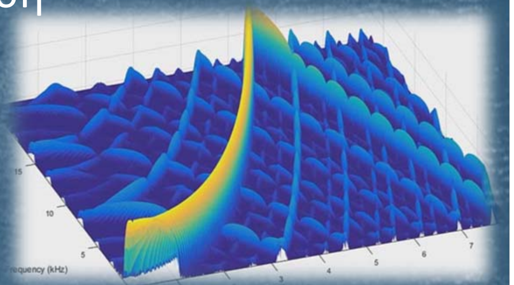
1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} \qquad x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

- $x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \quad , a<1$

  $a<1$

- $x[n] = 1 \;\; \forall n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$
- $x[n] = c \;\; \forall n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi \cdot c \cdot \delta(\omega)$
- $x[n] = e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

$$* \; F\{e^{j\omega_0 n} x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{j\omega_0 n} \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

- $\boxed{x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})}$

  $x[n-k] \rightarrow ?$

$$F\{x[n-k]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, e^{-j\omega n} =$$

$n' = n-k \Rightarrow n = n'+k$

$$F\{x[n-k]\} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']\, e^{-j\omega(n'+k)} =$$

$$= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']\, e^{-j\omega n'} \cdot \underline{e^{-j\omega k}} = e^{-j\omega k} \underbrace{\sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']\, e^{-j\omega n'}}_{X(e^{j\omega})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{x[n-k]\} = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

- $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega \Rightarrow \boxed{x^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})\, e^{-j\omega n}\, d\omega}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

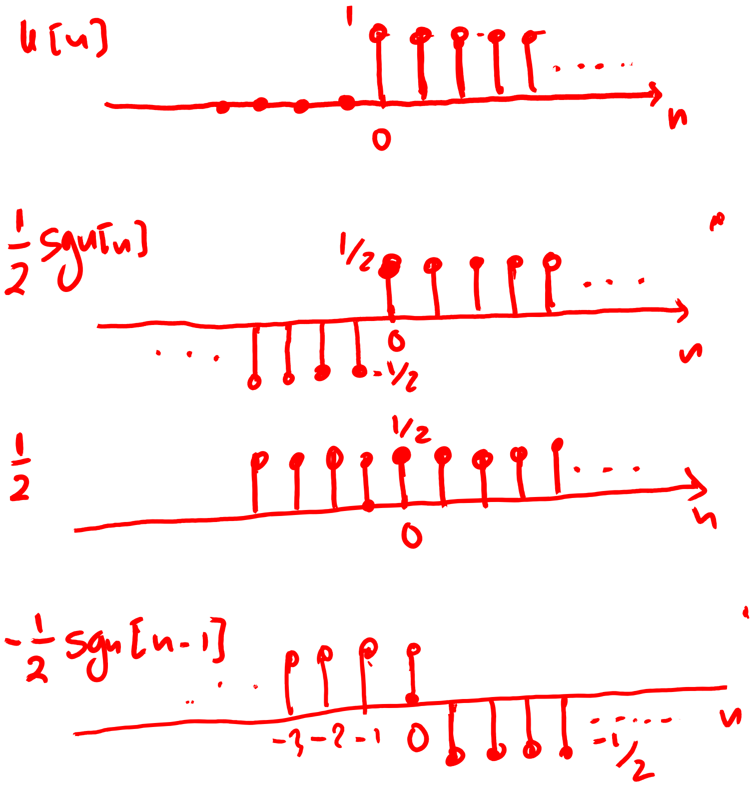
Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n\sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \lvert r\rvert<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$
$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}-j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Ο Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.

$$1 \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega)$$
$$c \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \cdot c\,\delta(\omega)$$
$$\delta[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} 1 \quad \forall \omega$$
$$x[n-k] \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega k} \cdot X(e^{j\omega})$$



$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F\{u[n]\} = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2} F\{\mathrm{sgn}[n]\} \quad (*)$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n] - \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n-1] = \delta[n] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{F\{\mathrm{sgn}[n]\}}_{W(e^{j\omega})} - \frac{1}{2} F\{\mathrm{sgn}[n-1]\} = F\{\delta[n]\} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} W(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} W(e^{j\omega}) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W(e^{j\omega}) \frac{1}{2} \left(1 - e^{-j\omega}\right) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$(*) \Rightarrow F\{u[n]\} = \frac{2}{1 - e^{-j\omega}} + \pi\,\delta(\omega)$$

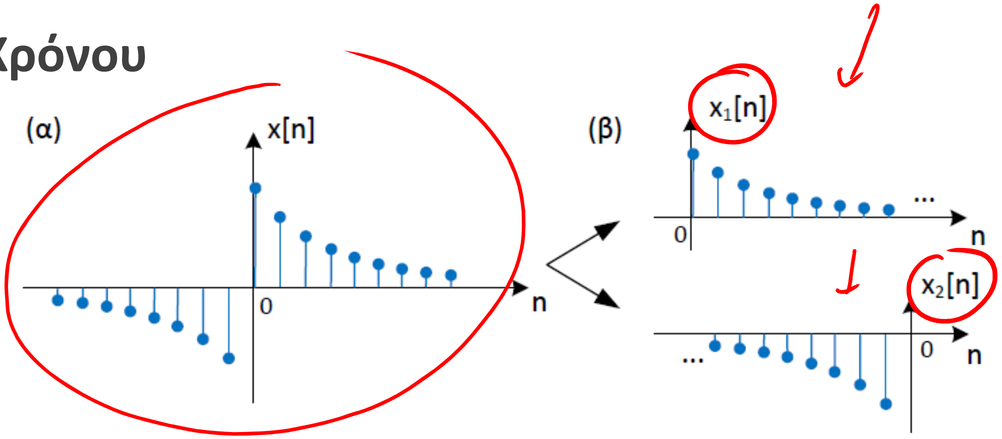
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$k-$οστή παραγώγιση στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\dfrac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-e^{j\omega}}X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\}=\Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\}=-\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert, \\ \phi_x(e^{j\omega})=-\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n]=x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega})\in\Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n]=-x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega})\in\Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n]=\mathrm{Ev}\{x[n]\}$, πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n]=\mathrm{Od}\{x[n]\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα

  Ο Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



$x_1[n] = a^n u[n], \quad a<1$

$x_2[n] = -b^n u[-n-1], \quad b>1$

$x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad a<1$

$x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}, \quad b>1$

$\Rightarrow F\{x_1[n]+x_2[n]\} = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \dfrac{1}{1-be^{-j\omega}} =$

$$= \frac{1-be^{-j\omega}+1-ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})} = \frac{2-(a+b)e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

$$x[n] \to X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n-n_0] \to e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$$

το δείξαμε πριν

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση
  - Ο Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα

$$x[n] = a^n u[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$x[n-2] = a^{n-2} u[n-2] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega 2}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^2 x[n-2] = a^n u[n-2] \overset{F}{\longleftrightarrow} \boxed{F\{a^n u[n-2]\} = \frac{a^2 e^{-j\omega 2}}{1-ae^{-j\omega}}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$$

$$F\{e^{j\omega_0 n} x[n]\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

το δείξαμε πριν

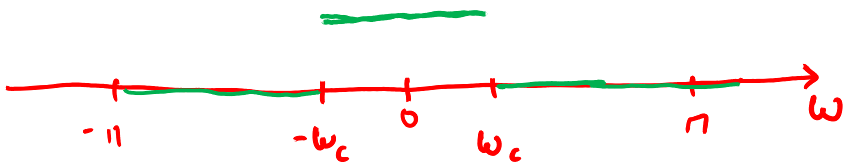
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

$e^{j\pi} = -1$

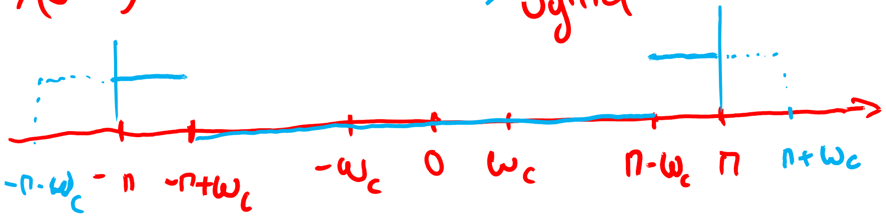
Ο Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ αν

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \rightarrow x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

$X(e^{j\omega})$ Βαθυπερατό



$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ υψιπερατό



Άρα $F^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = y[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow y[n] = e^{j\pi n} \cdot x[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow y[n] = (-1)^n \cdot \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

Βαθυπερατό σύστημα: $h[n] = \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

Υψιπερατό σύστημα: $h[n] = (-1)^n \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

$$x[kn] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega/k})$$

$$F\{x[kn]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[kn] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] \cdot e^{-j\frac{\omega}{k} \cdot n'} =$$

$$n' = kn \Rightarrow n = \frac{n'}{k}$$

$$X(e^{j\frac{\omega}{k}})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

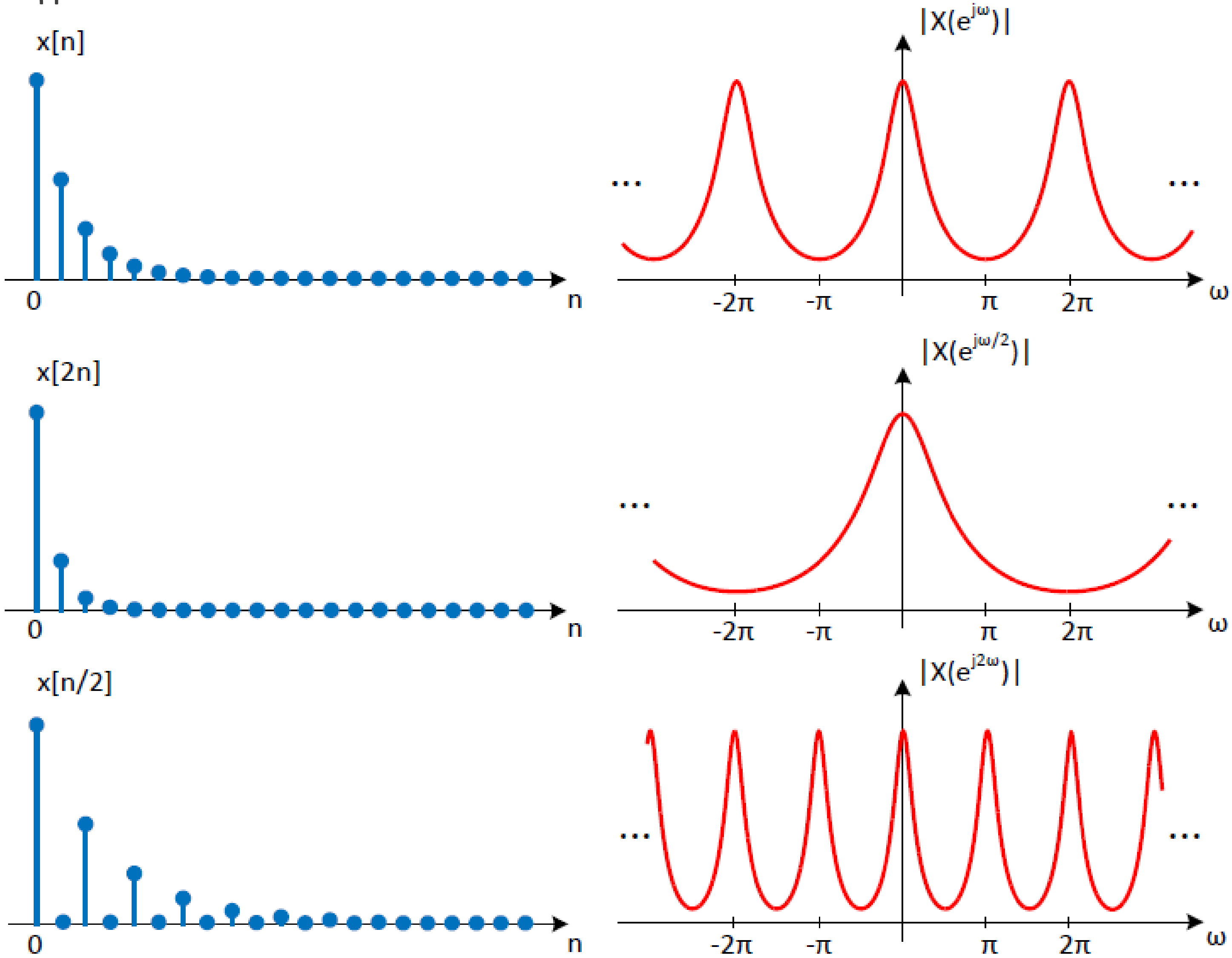
Ο Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x\left[\frac{n}{2}\right]$, αν $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \Rightarrow x[kn] \rightarrow X(e^{j\frac{\omega}{k}})$$

$$x\left[\frac{n}{2}\right] \rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega/\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]$$

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \xrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$$

$$F\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] * y[n]) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n} \sum_{k} x[k] \cdot y[n-k]\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{k} x[k] \cdot \underbrace{\sum_{n} y[n-k]\, e^{-j\omega n}}_{e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega})} = \underbrace{\sum_{k} x[k] \cdot e^{-j\omega k}}_{X(e^{j\omega})} \cdot Y(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] * y[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$x[n] * y[n] \longrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

$$\left.\begin{aligned} x[n] &= a^n u[n], \ |a|<1 \\ y[n] &= b^n u[n], \ |b|<1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Βρείτε τη συνέλιξη}$$

$$\left.\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \\ Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-be^{-j\omega}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}\{x[n]*y[n]\} = C_{xy}(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$$

$$\Rightarrow C_{xy}(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1-be^{-j\omega}} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-ae^{-j\omega}} - \frac{b}{1-be^{-j\omega}}\right) \Rightarrow$$

$$A = C_{xy}(e^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-b/a} = \frac{a}{a-b}$$

$$B = C_{xy}(e^{j\omega})(1-be^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{b}} = \frac{1}{1-a/b} = \frac{b}{b-a}$$

$$\Rightarrow C_{xy}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{C_{xy}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{a-b}\left(a^{n+1}u[n] - b^{n+1}u[n]\right)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: θεώρημα Parseval

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$\boxed{\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega}$$

$$x^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} \, d\omega$$

$$\sum_n |x[n]|^2 = \sum_n x[n]\, x^*[n] = \sum_n x[n] \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n}\right)}_{X(e^{j\omega})} X^*(e^{j\omega}) \cdot d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega}) \cdot d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

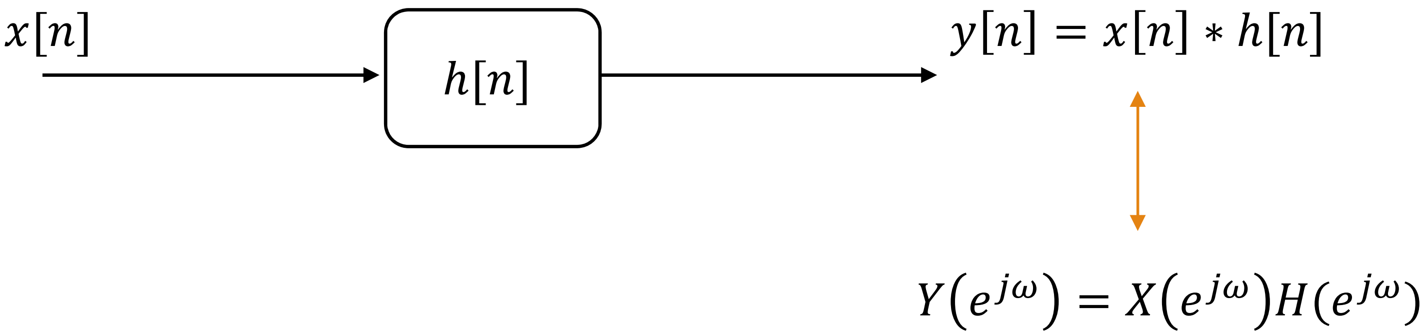
  - Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του DTFT είναι:

$$\begin{tikzcd}
x[n] \arrow[r, "*"] \arrow[d, leftrightarrow, "F"'] & y[n] \arrow[r, "="] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] & c[n] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] \\
X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\bullet"] & Y(e^{j\omega}) \arrow[r, "="] & C(e^{j\omega})
\end{tikzcd}$$

  - Αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας

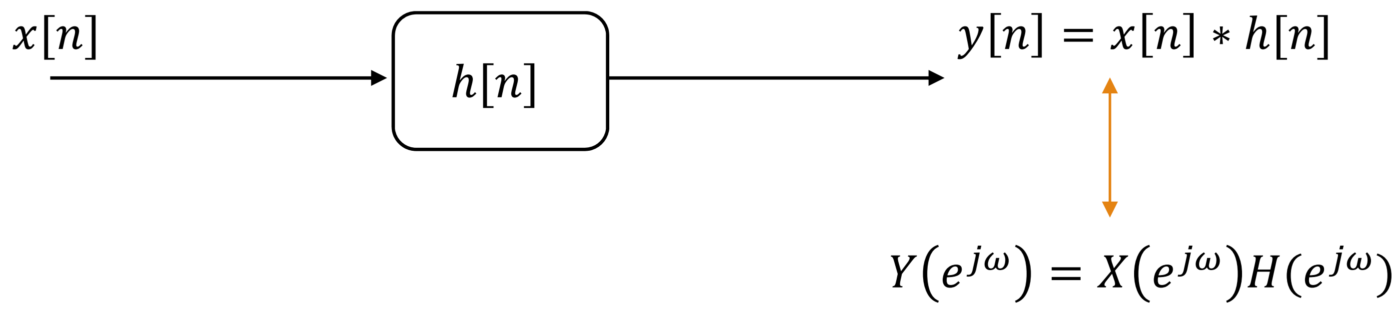
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



  - Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

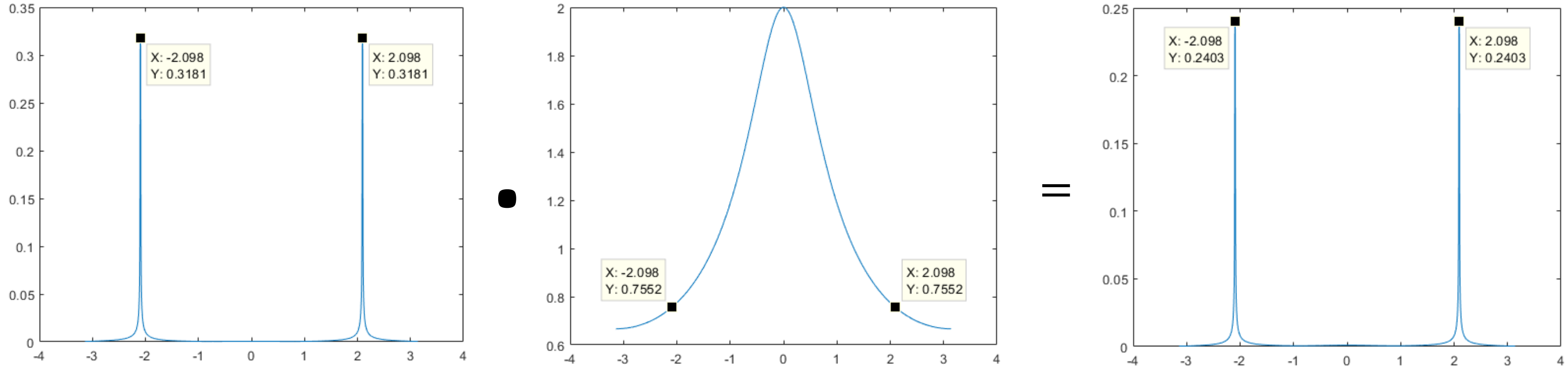
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

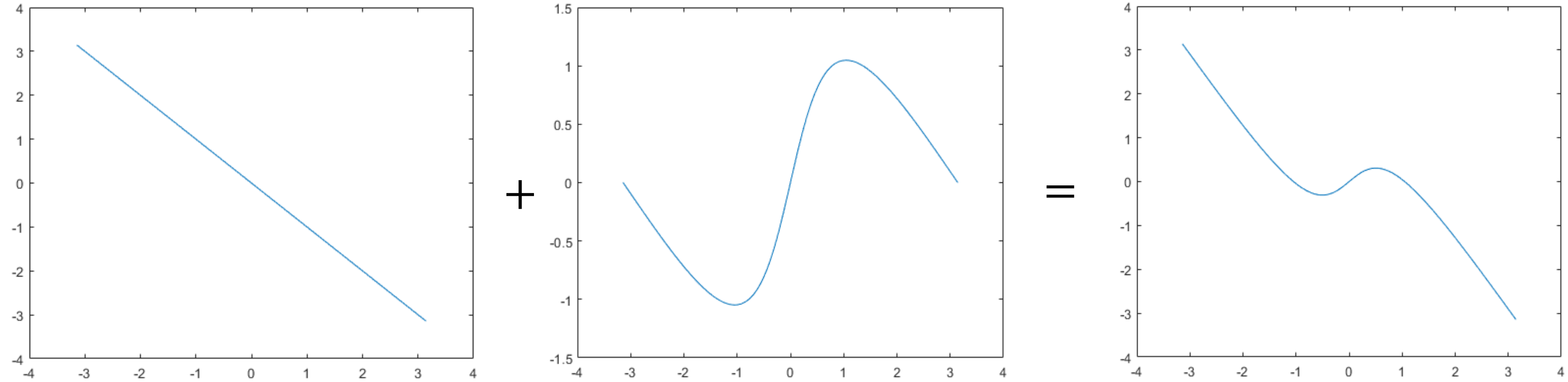
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

Είσοδος | Σύστημα | Έξοδος



- Κατά φάση

Είσοδος | Σύστημα | Έξοδος



Συνεχίζεται… ☺