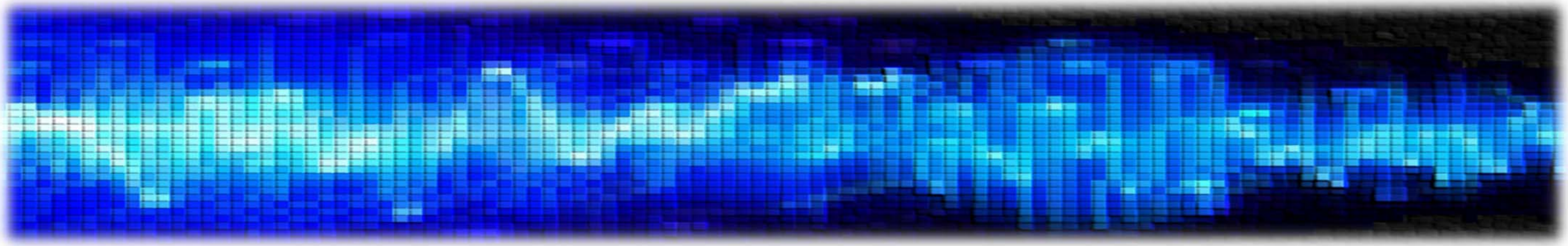
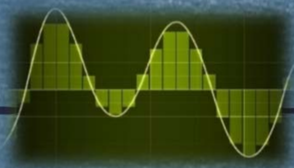
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 5&6Η



- Αιτιατότητα ΓΧΑ συστημάτων
- Απόκριση σε Συχνότητα

Τι περιέχει το ΗΥ370?

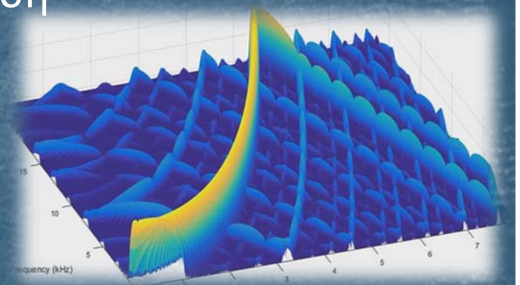


1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος**

  - Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \quad \forall\, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \quad \forall\, n < n_0$$

  - Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \qquad n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = 0, \qquad n < n_0$$

  - Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
  - Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
    - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα

  - Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$\boxed{h[n] = 0, \qquad n < 0}$$

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**

- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους… ☺

- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου

- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παρ' όλα αυτά
  - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του *γιατί* τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δεν ξέρουμε *πώς* να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά

- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια διαφορετική είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
  - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό…

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  - Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

- Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

- Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό

- Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{j\omega}\right) + jH_I\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}\left(e^{j\omega}\right)}$$

με

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{H_R^2\left(e^{j\omega}\right) + H_I^2\left(e^{j\omega}\right)}$$

και

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{H_I\left(e^{j\omega}\right)}{H_R\left(e^{j\omega}\right)}$$

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Το άθροισμα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

  - Αρκεί

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|h[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

αφού $\left|e^{j\omega n}\right| = 1, \ \ \forall\, \omega, n$

  - Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
    - Θα πούμε περισσότερα αργότερα…

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Η συνάρτηση ως προς ω

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)

- Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

- Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι <u>πραγματική</u> συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Η ιδιότητα

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{j\omega}\right)\right| = \left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{H}}\left(\boldsymbol{e}^{j\omega}\right) = -\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{e}^{-j\omega})$$

  - Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

  - Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)},\quad A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

  - Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

  - Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
    - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με <u>πραγματική</u> κρουστική απόκριση

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta)}, \qquad A \in \Re_+$$

θα έχουμε

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j\left(\omega_0 n+\theta-\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right)}$$

  - Όμως

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_H\left(e^{-j\omega}\right)$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Άρα

$$y[n] = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta+\varphi_H(e^{j\omega_0}))} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta+\varphi_H(e^{j\omega_0}))}$$
$$= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = C + A\cos(\omega_0 n + \theta\,)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH(e^{j0}) + |H\left(e^{j\omega_0}\right)|A\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!

- Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}\left(e^{j\omega}\right)}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H\left(e^{j0}\right) + \sum_{k=1}^{N} \left|H\left(e^{j\omega_k}\right)\right| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος

  - Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π!

  - Πράγματι

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}e^{j2\pi}\right) = H(e^{j\omega})$$

  - Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
    - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της

  - Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
    - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συντελεστές $h[n]$
    - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π-περιοδικά στη συχνότητα

  - Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

  ο Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

$$y[n] = x[n-n_d] \Rightarrow y[n] = x[n] * \underbrace{\delta[n-n_d]}_{h[n]}$$

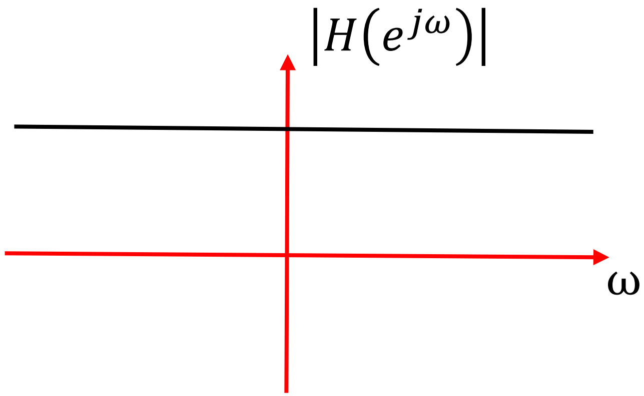
Άρα:

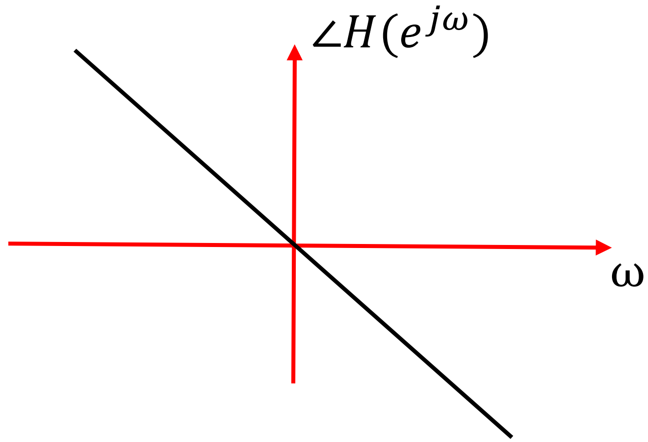
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1$$

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:





- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Ο Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_1+M_2+1} \frac{e^{+j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} =$$

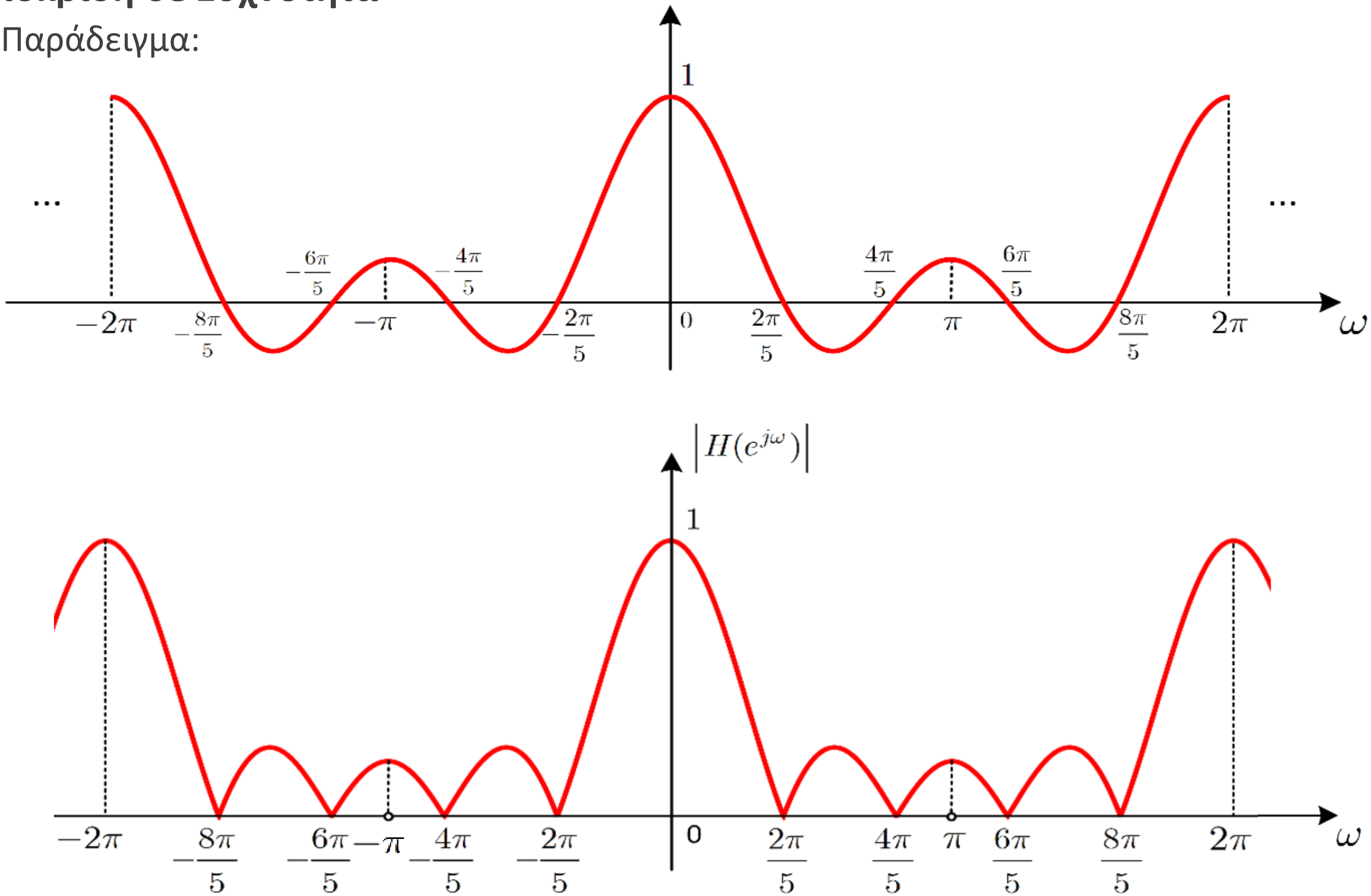
$$= \frac{1}{M_1+M_2+1} \frac{e^{j\omega(M_1-M_2-1)/2}}{e^{-j\omega/2}} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} =$$

$$= \frac{1}{M_1+M_2+1} e^{j\omega(M_1-M_2)/2} \frac{\sin(\omega(M_1+M_2+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

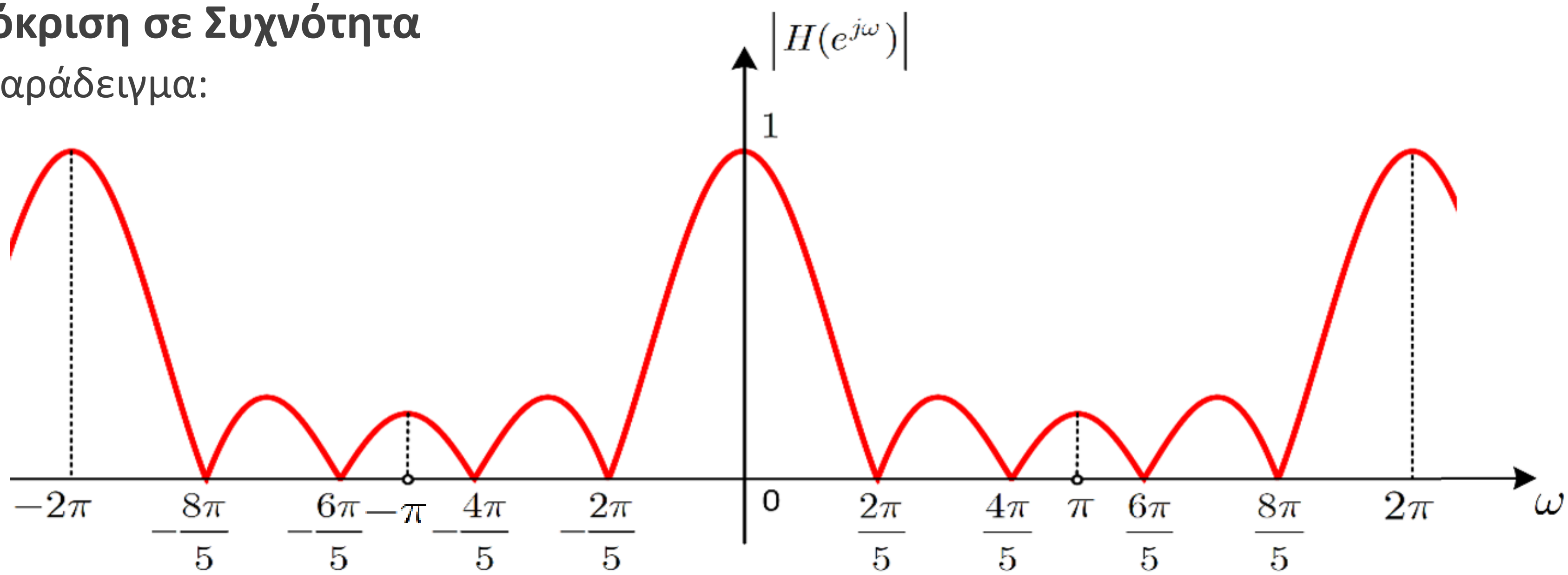
a) $M_1 = M_2 = 2$ $\quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5} \frac{\sin(5/2\,\omega)}{\sin(\omega/2)}$

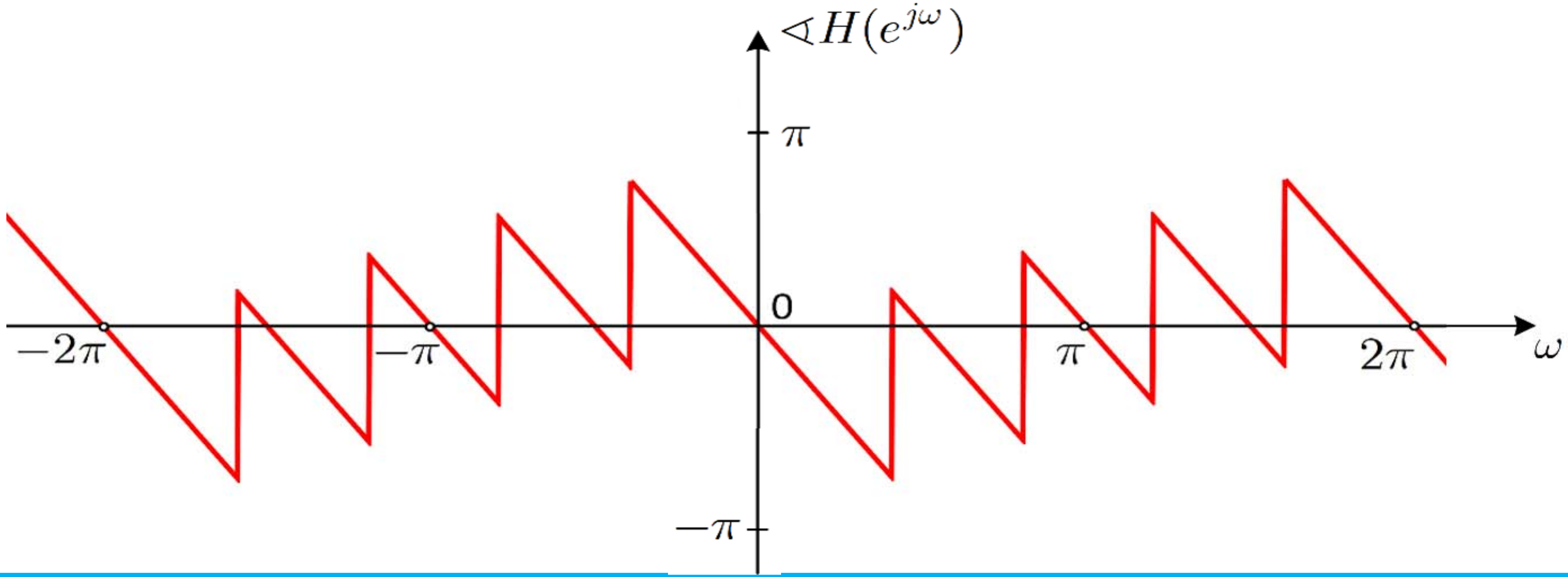
β) $M_1 = 0,\ M_2 = 4$ $\quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5} \frac{\sin(5/2\,\omega)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-j\omega 2}$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:





- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής
$$e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$
σε ένα ΓΧΑ σύστημα

  - Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα

  - Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη

  - Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα

  - Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
    - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$

  - Το σήμα αυτό θα είναι το
$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n]$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega_0 (n-k)} u[n-k]$

- Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

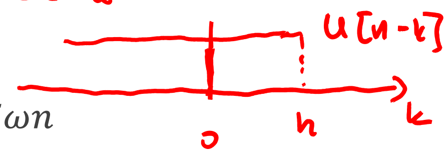
$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k] e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} u[n-k]$

$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] e^{-j\omega_0 k}$

- Για $n \geq 0$ έχουμε

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}$$
$$= H\left(e^{j\omega n}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$



Αν $h[n]=0$ $n<0$ (αιτιατό) τότε

$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot e^{-j\omega_0 k}$

- Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$\begin{aligned} y[n] &= H\left(e^{j\omega n}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|\left|e^{j\omega(n-k)}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

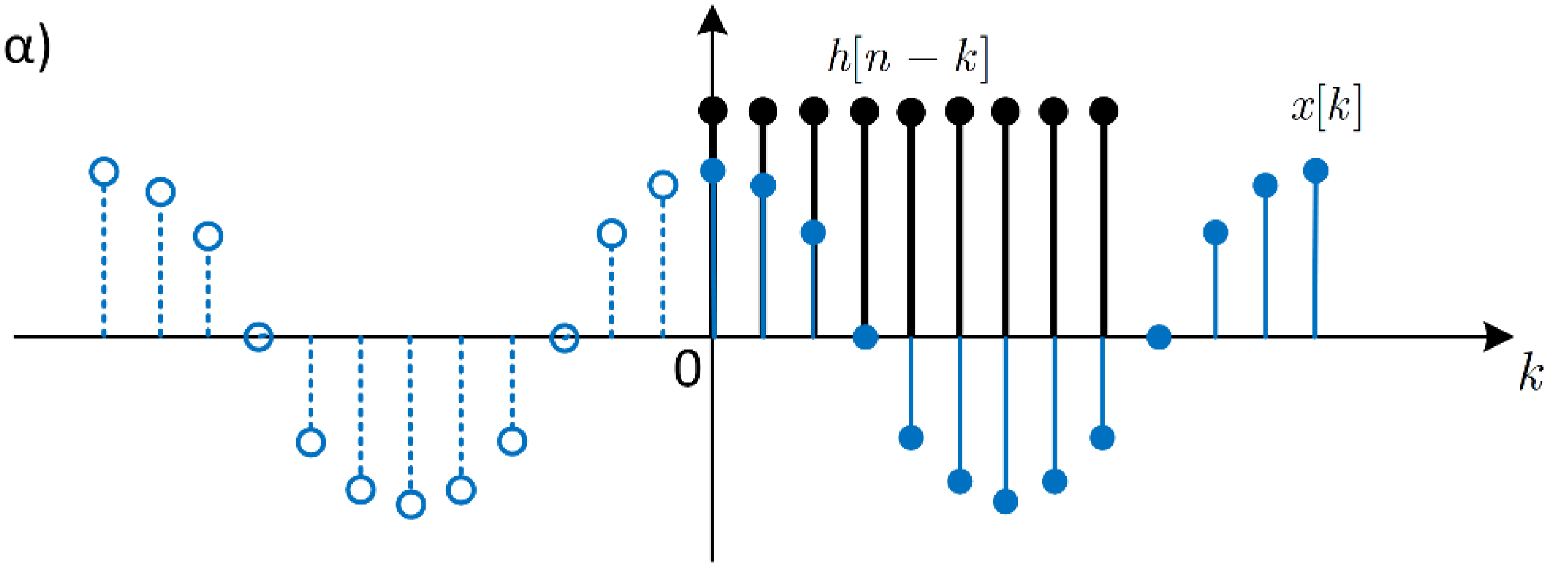
- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε
$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$
τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

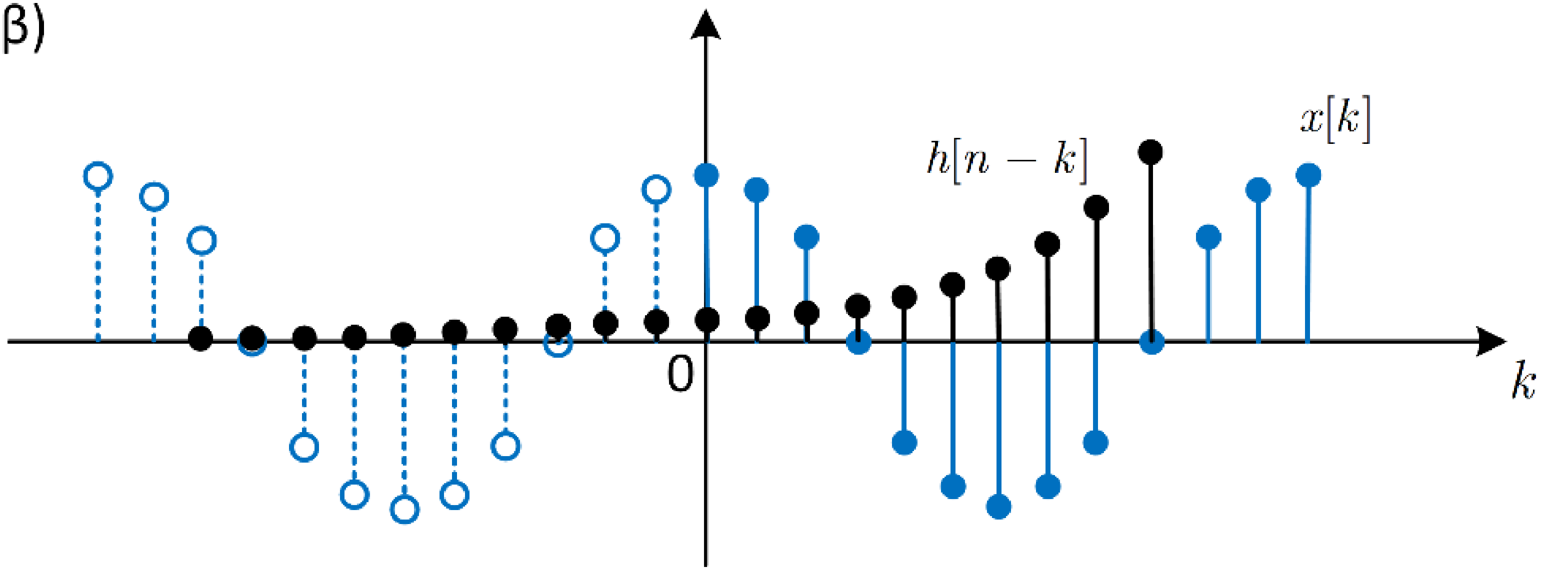
2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \to +\infty$
   - Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

(α)



(β)



- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ας υλοποιήσουμε στο Octave/MATLAB το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

δηλ. για το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

με $M_1 = 0, M_2 = 4$.

  - Αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση μας ότι η έξοδος θα είναι μηδενική!

  - Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και την απόκριση σταθερής κατάστασης, αφού το ημίτονο ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

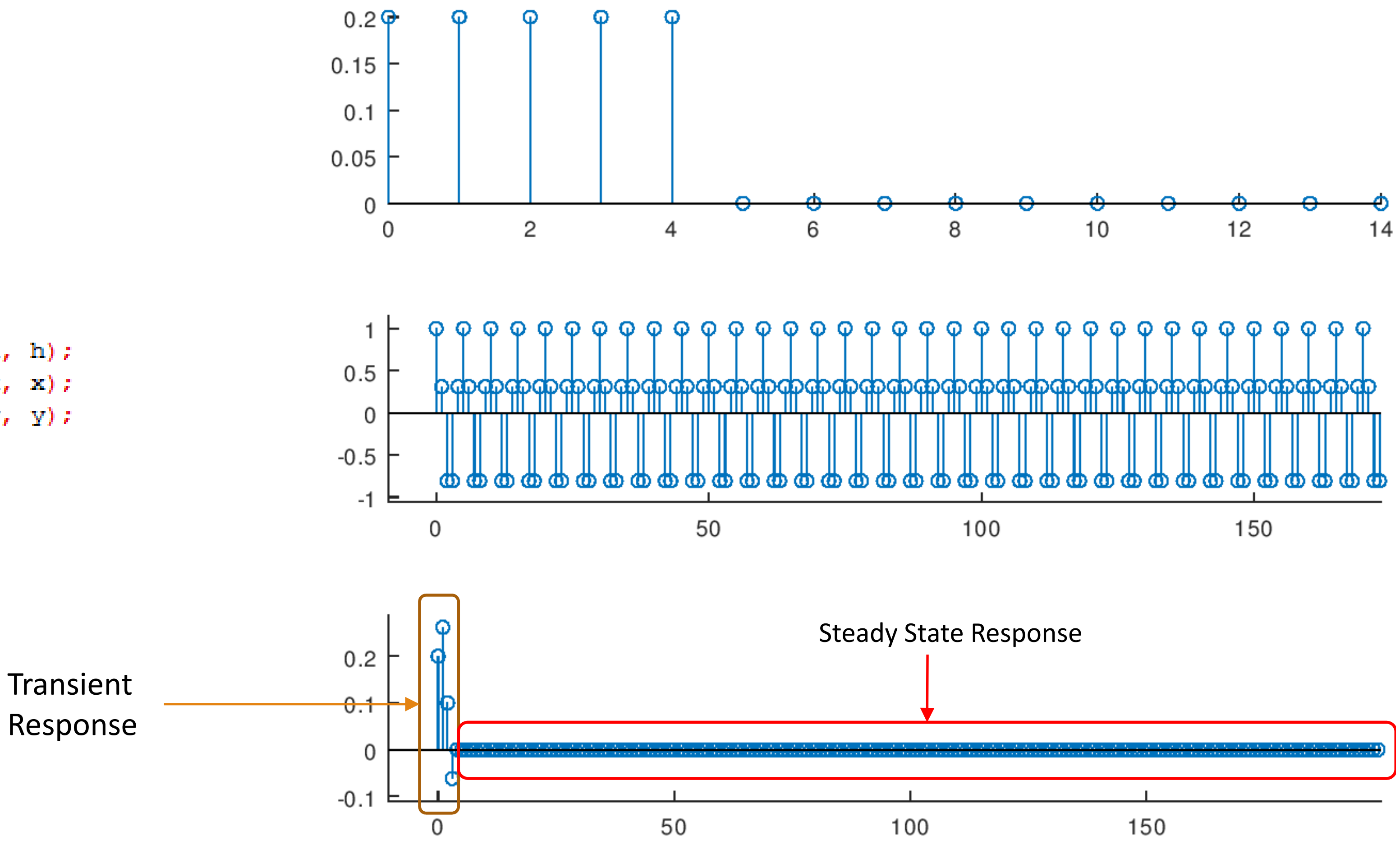
• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

```
% Impulse Response h[n]
M1 = 0;
M2 = 4;
h = 1/(M1 + M2 + 1).*ones(1, M2+1);
h = [h zeros(1,10)];
nh = 0:14;

% Input signal x[n]
omega0 = 2*pi/5;
nx = 0:1000;
x = cos(omega0.*nx);

% Convolution
y = conv(h,x);
ny = [0:1014];

% Plots
subplot(311); stem(nh, h);
subplot(312); stem(nx, x);
subplot(313); stem(ny, y);
```



Συνεχίζεται... ☺