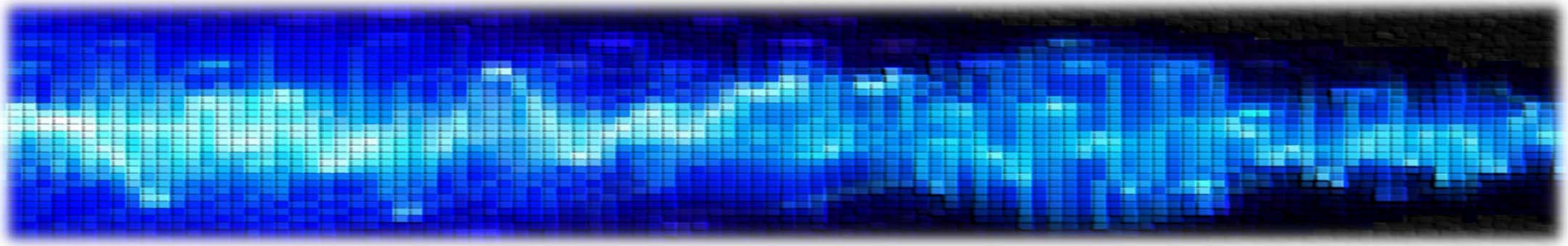
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου

- Εξισώσεις διαφορών

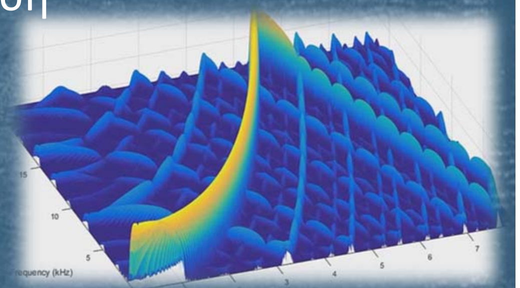
Τι περιέχει το HY370?

1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$
- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)

- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)

- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα
- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]$$

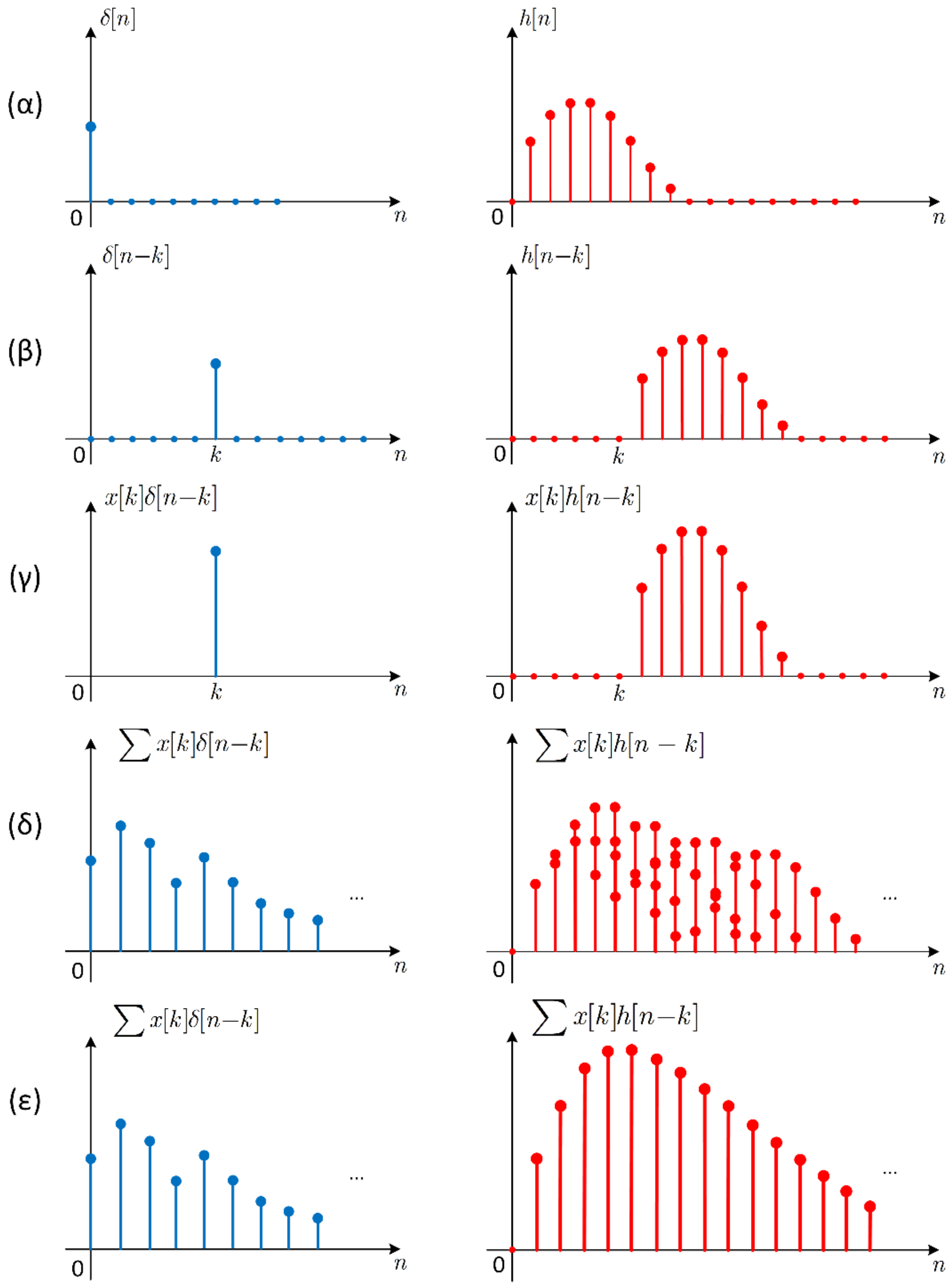
- Η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ σύστημα
- Ας δούμε γιατί…

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**
  - Παρ' όλο που βρήκαμε την κρουστική απόκριση οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
  - Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  - Άρα

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= T\{x[n]\} \\ &= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} && \boxed{\text{Γραμμικότητα (αθροιστικότητα)}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} && \boxed{\text{Γραμμικότητα (ομογένεια)}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] && \boxed{\text{Χρον. Αμεταβλητότητα}} \end{aligned}$$



Χρον. Αμεταβλητότητα

Γραμμικότητα (ομογένεια)

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

- **Συνέλιξη**

  - Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι <u>εξαιρετικά</u> σημαντικό

  - Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \boldsymbol{x[n] * h[n]}$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

  - Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων

  - Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n], y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

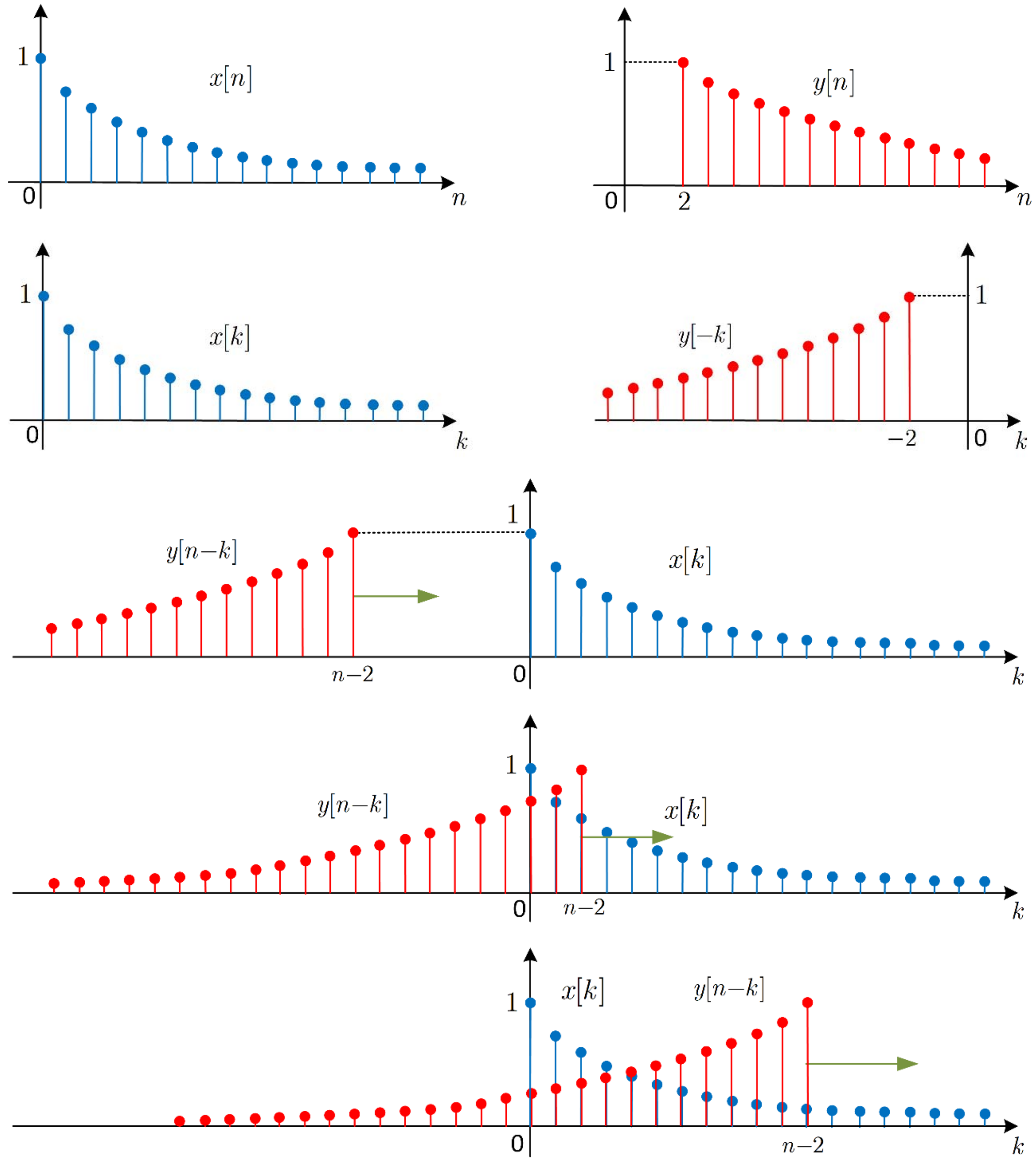
- **Συνέλιξη**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \Re \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \Re \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

- **Συνέλιξη**
  - Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:



- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $y[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n. Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n-k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ‘‘ολισθαίνουμε’’ πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.
- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n-k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο μέσα στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.

- **Συνέλιξη**

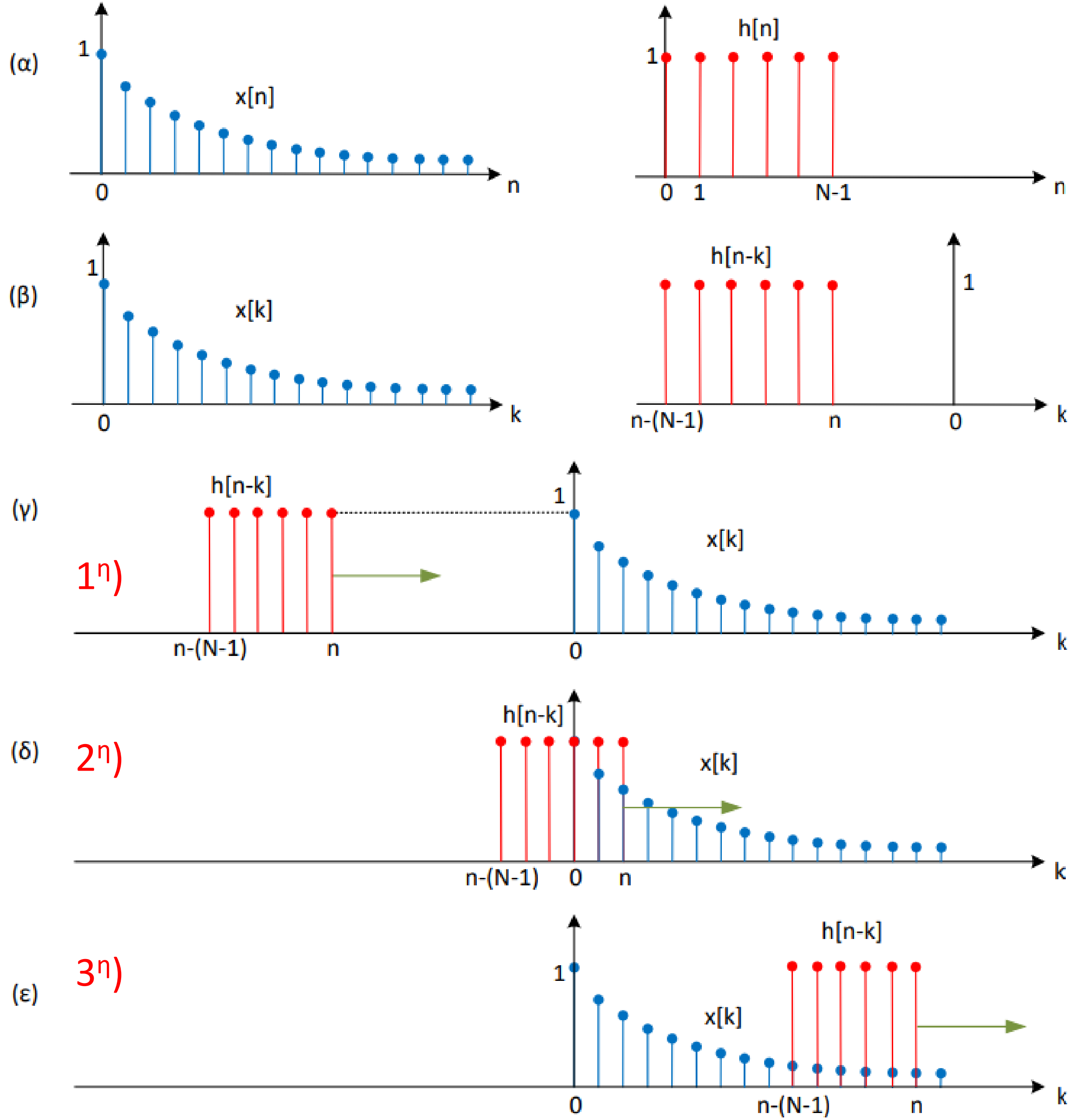
Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k, και ''σύρουμε'' το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα ''συνυπάρχουν'', δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

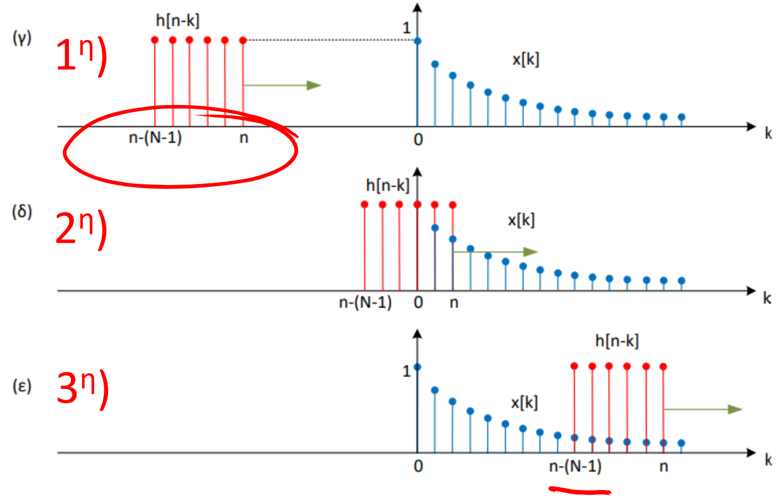
  Ο Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n-N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για

  $x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1.$



- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

$|a| < 1$



1) $n < 0 \qquad y[n] = 0$

2) $n \geq 0 \qquad n-(N-1) < 0 \Rightarrow n < N-1$

$0 \leq n < N-1$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad 0 \leq n < N-1$$

3) $n-(N-1) \geq 0 \Rightarrow n \geq N-1$

$$y[n] = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a} \qquad n \geq N-1$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

```
% Ορισμός διάρκειας
Nx = 7;

% Σήματα
x = ones(1,Nx);
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;

% Convolution by hand
c1 = (1 - alpha.^(1:(Nx-1)))./(1-alpha);
c2 = (alpha.^([Nx-1:Nh] - (Nx-1)) ...
    - alpha.^(Nx-1+1:Nh+1))./(1-alpha);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(0:Nx-2, c1); hold on;
stem(Nx-1:Nh, c2, 'r'); grid; hold off;
title('Convolution by hand'); xlabel('Samples');
subplot(212); stem(0:Nh, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"'); xlabel('Samples');
```