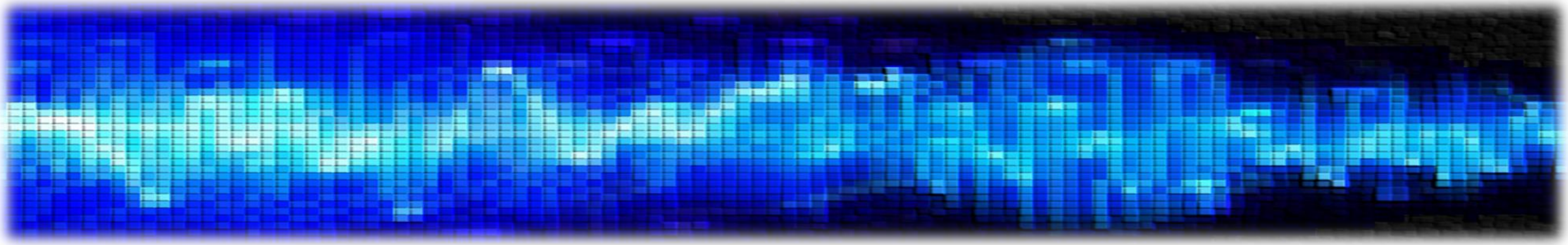
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η



- Δειγματοληψία (reminder)
- Βασικά Σήματα και Ιδιότητες

- ***Ως τώρα… (από HY215)***
- Σειρές Fourier:

$x(t) \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

- Μετασχ. Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Μετασχ. Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- ΓΧΑ συστήματα:

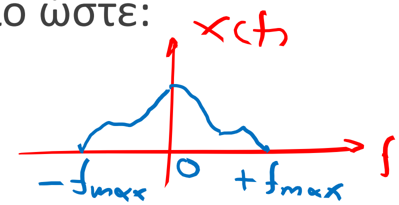
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist***:

Ακριβής και τέλεια ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ τέτοιο ώστε:



$$|X(f)| = 0, \qquad |f| > f_{max}$$

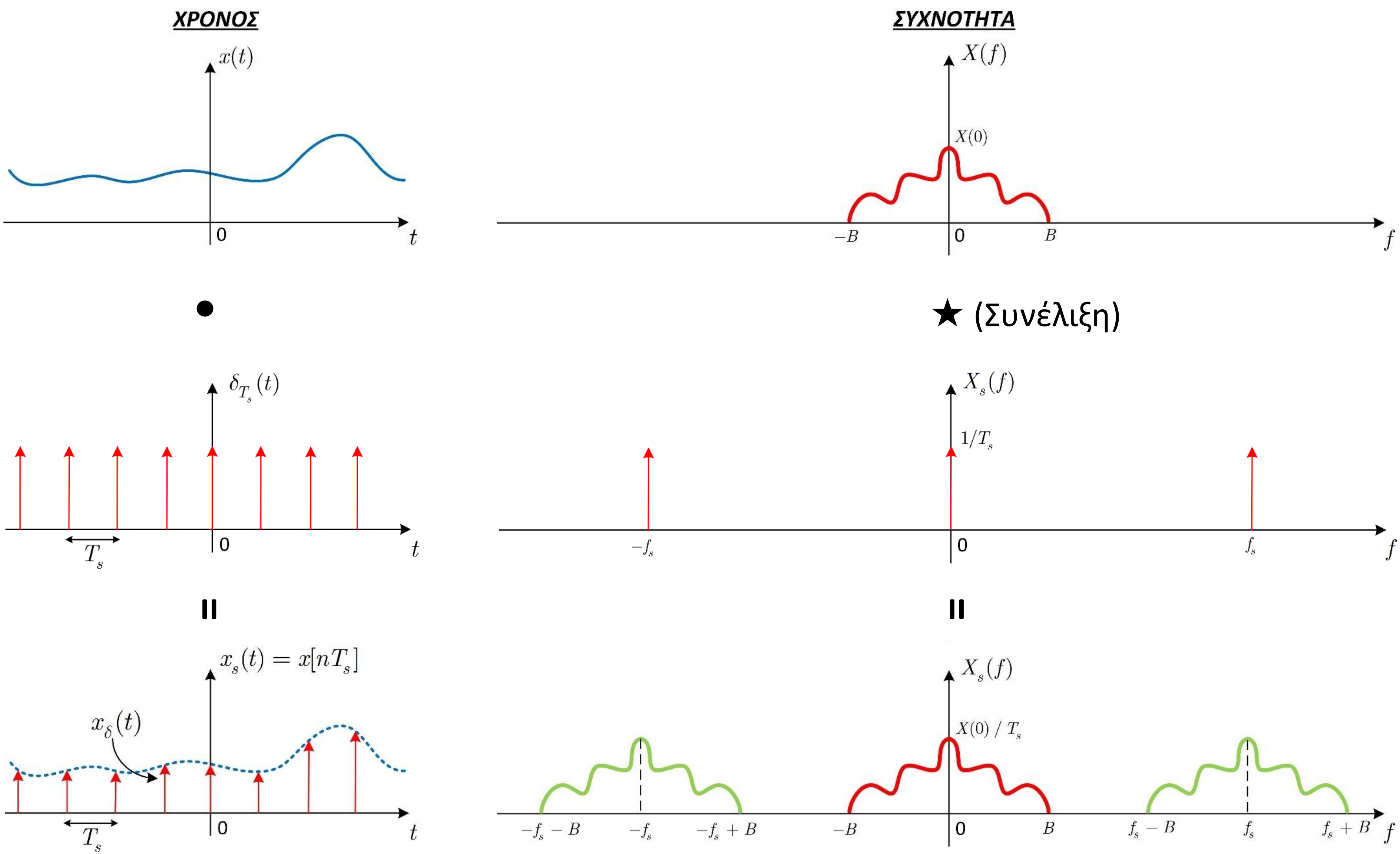
με f_{max} τη μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

2. Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα f_{max}

$$f_s > 2f_{max}$$

- Η συχνότητα f_{max} ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** και η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**

- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος $X(f)$ ανά f_s Hz στο πεδίο της συχνότητας


ΧΡΟΝΟΣ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
$x(t)$
$X(f)$
$X(0)$
$-B$
0
B
t
f
★ (Συνέλιξη)
$\delta_{T_s}(t)$
T_s
$X_s(f)$
$1/T_s$
$-f_s$
f_s
$x_s(t) = x[nT_s]$
$x_\delta(t)$
$X(0) / T_s$
$-f_s - B$
$-f_s + B$
$f_s - B$
$f_s + B$

- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist***:

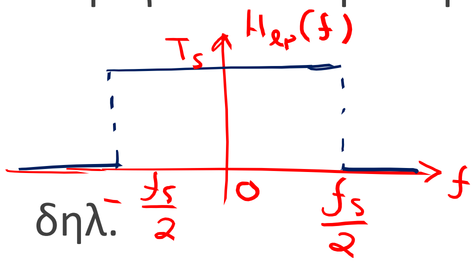
$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

Δυϊκότητα: $AT\,\mathrm{sinc}(tT) \xleftrightarrow{F} A\,\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = A\,\mathrm{rect}(f/T)$

Πώς γίνεται η ανακατασκευή;

1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα $X_s(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x(nT_s)$ με ένα τετραγωνικό παράθυρο – ή αλλιώς, χαμηλοπερατό φίλτρο

δηλ.



$$H_{lp}(f) = T_s \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

διάρκεια παλμού

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$X_{rec}(f) = X_s(f)H_{lp}(f) = X(f)$$

ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφά» του

2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος $x(nT_s)$ του δειγματοληπτημένου σήματος με μετατοπισμένες συναρτήσεις $\mathrm{sinc}(.)$ και άθροισμα όλων των τελευταίων

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

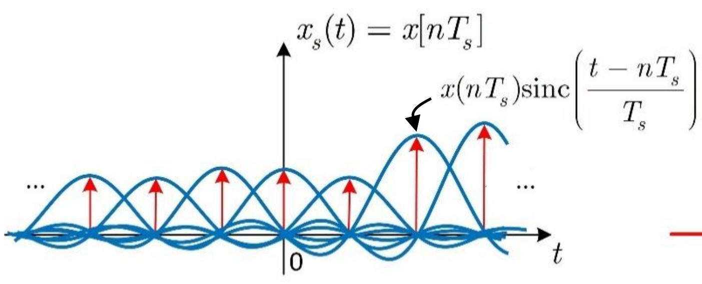
- Δηλαδή:

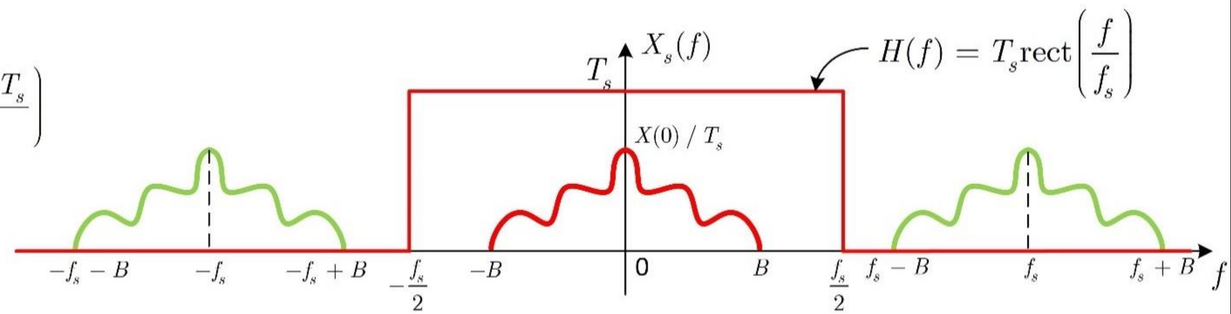
συνέλιξη

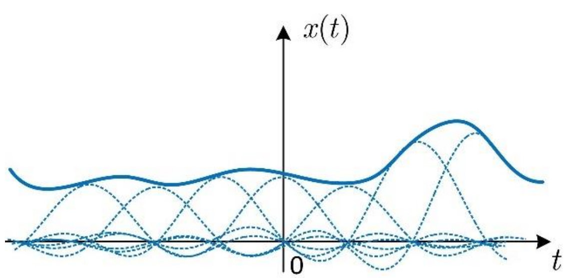
$$x_{rec}(t) = x_s(t) * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

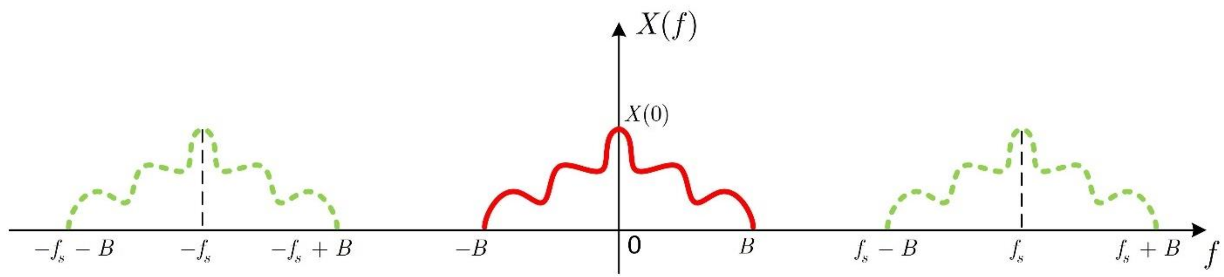
$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right] * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

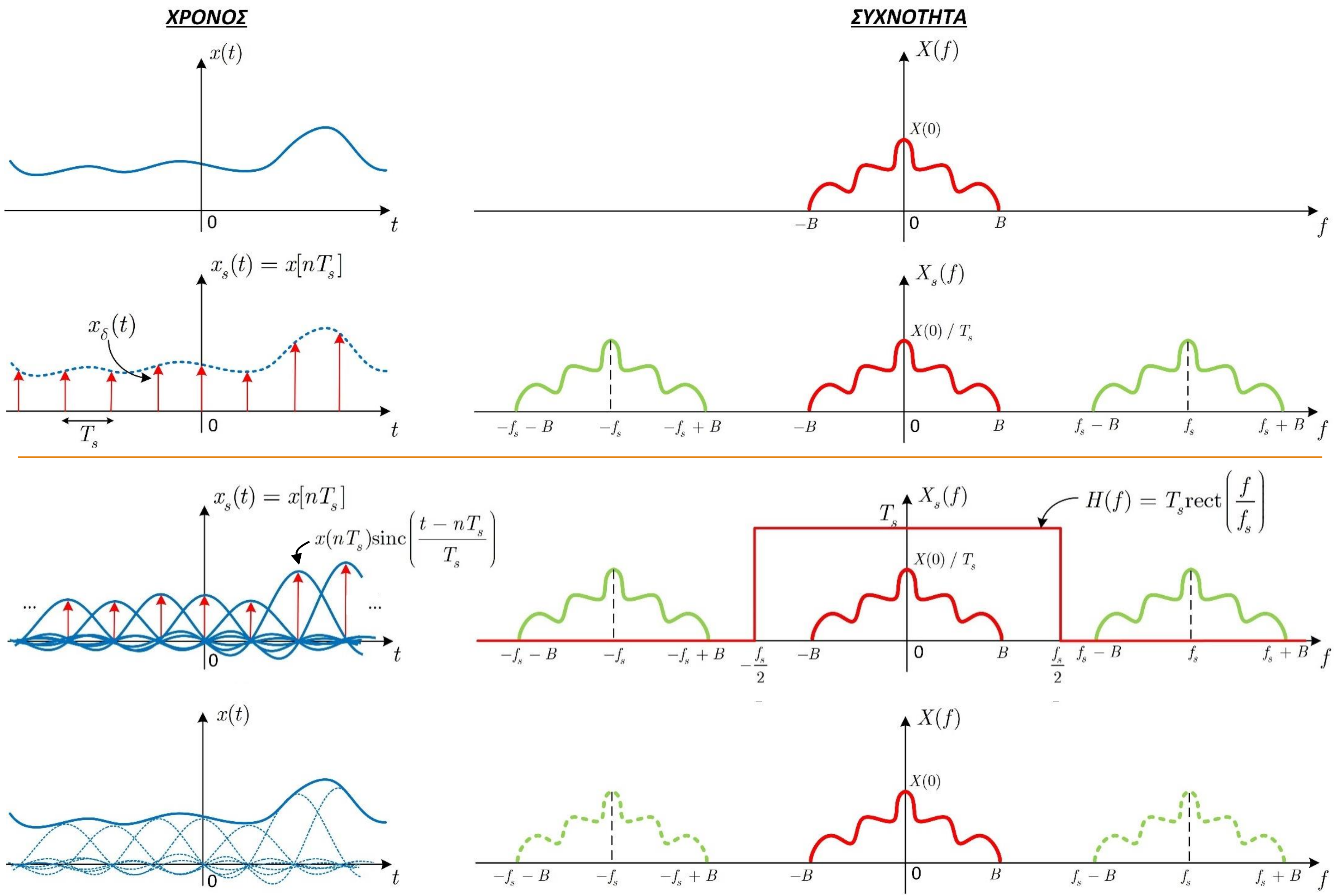
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$










ΧΡΟΝΟΣ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
$x(t)$
$X(f)$
$X(0)$
$-B$
0
B
t
f
$x_s(t) = x[nT_s]$
$x_\delta(t)$
T_s
$X_s(f)$
$X(0) / T_s$
$-f_s - B$
$-f_s$
$-f_s + B$
$f_s - B$
f_s
$f_s + B$
$x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$
$H(f) = T_s \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$
$-\frac{f_s}{2}$
$\frac{f_s}{2}$
...

- **Παράδειγμα**:
  - Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας f_s και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.

Θέτω $t := nT_s$, $n \in \mathbb{Z}$

$T_s = \frac{1}{f_s}$ → συχν. δειγματοληψίας

$\rightarrow t := \frac{n}{f_s}$

Άρα $x[n] = A\cos(2\pi f_0 t)\Big|_{t=\frac{n}{f_s}} = A\cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{f_s}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi f_0}{f_s} \cdot n\right)$

Αν $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}$, τότε $x[n] = A\cos(\omega_0 n)$.

Αν π.χ. $f_0 = 100$ Hz και $f_s = 16000$ Hz, τότε $\omega_0 = \frac{2\pi 100}{16000} = \frac{\pi}{80}$ $\frac{\text{rad}}{\text{sample}}$

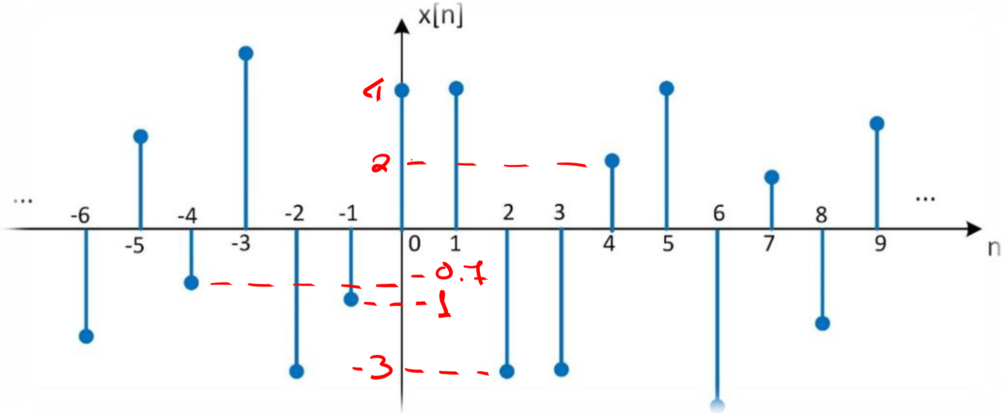
Οπότε $x[n] = A\cos\left(\frac{\pi}{80} n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

Επίσης αν ξέραμε τα ω_0, f_s, βρίσκαμε το f_0.

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

- Σήμα διακριτού χρόνου

$x[n] \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$



- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \mathrm{Re}\{x[n]\} + j\mathrm{Im}\{x[n]\}$$

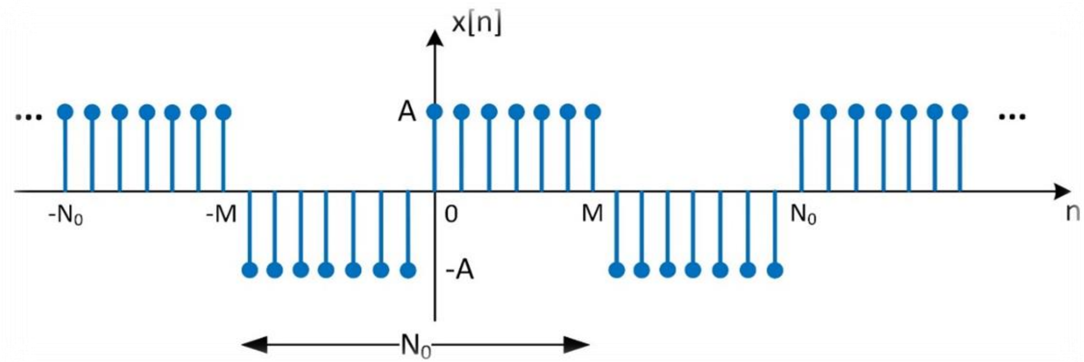
$$= |x[n]|\, e^{j\phi_x[n]}$$

- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

$$|x[n]| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{x[n]\} + \mathrm{Im}^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{x[n]\}}{\mathrm{Re}\{x[n]\}} \in (-\pi, \pi]$$

- Περιοδικά σήματα



- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός *ακέραιος* N τέτοιος ώστε

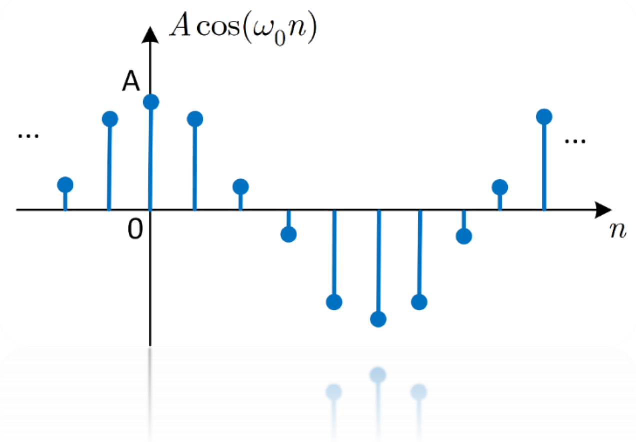
$$x[n] = x[n+N]$$

- Ο μικρότερος αριθμός N που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται ***περίοδος*** του σήματος.

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, με περιόδους N_1, N_2, τότε η περίοδος του σήματος $y[n]$ είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

- **<u>Ημίτονα</u>**
- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος N, τότε θα ικανοποιεί τη σχέση



$$x[n] = x[n+N]$$

- Άρα

$$A\cos(\omega_0 n) = A\cos(\omega_0 (n+N))$$
$$A\cos(\omega_0 n) = A\cos(\omega_0 n + \omega_0 N)$$

- Πρέπει να ισχύει

$$\omega_0 N = 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}, \qquad N, k \in \mathbb{Z}$$

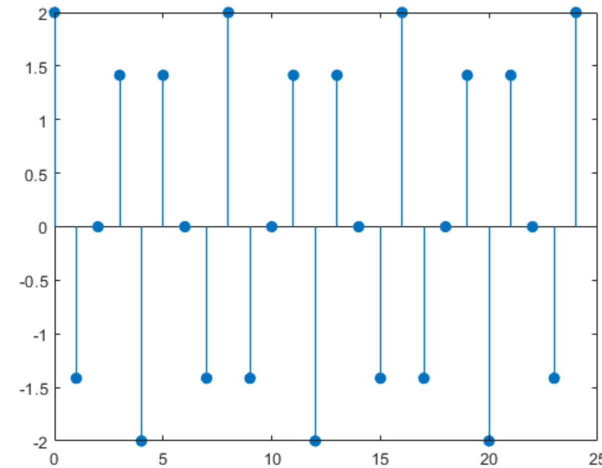
Θέλουμε το μικρότερο k που να δίνει ακέραιο N!

- **Ημίτονα**
- Παραδείγματα:
  - $x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

$\frac{3\pi}{4} \rightarrow \omega_0$

Είναι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8\cancel{\pi} k}{3\cancel{\pi}} = \frac{8}{3}k, \ k \in \mathbb{Z}.$

Για $k=3$, $N=8$ δείγματα.

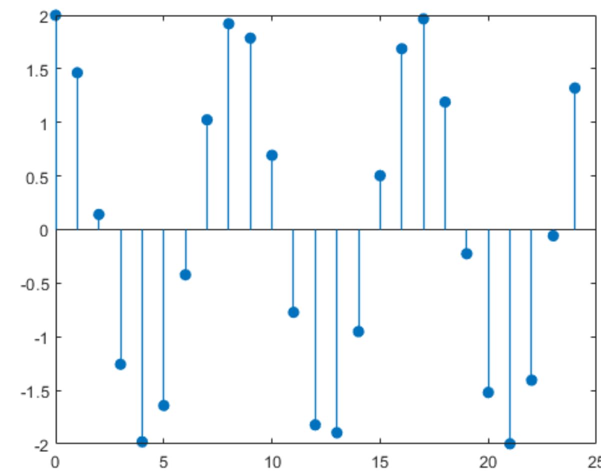


  - $x[n] = 2\cos\left(\frac{3}{4}n\right)$

$\frac{3}{4} \rightarrow \omega_0$

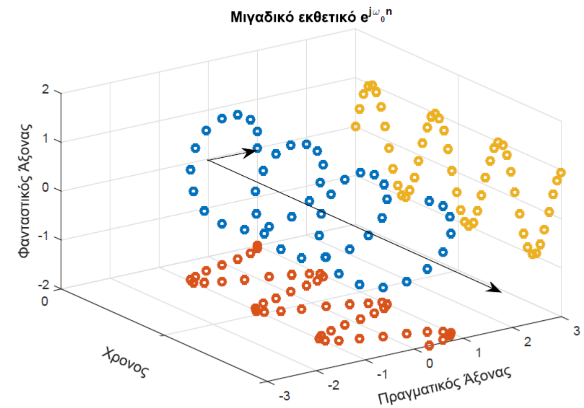
Είναι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi k}{3} = \frac{8\pi}{3} \cdot k, \ k \in \mathbb{Z}$

Άρα το σήμα <u>δεν</u> είναι περιοδικό!



- **<u>Ημίτονα</u>**
- Περιοδικότητα στη συχνότητα (!!)
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler

$e^{j\omega_0 n}$



$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \mathrm{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- Στο διακριτό χρόνο

$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j\varphi n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2\pi\lambda n}$$

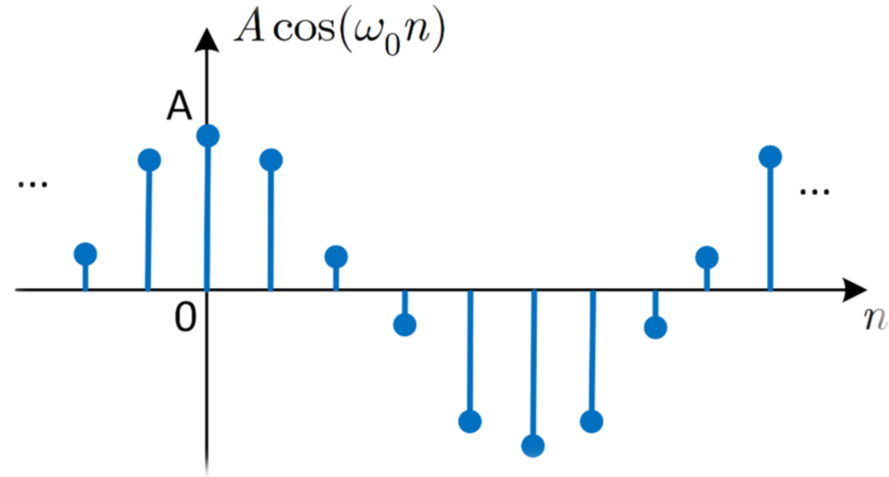
- Αν $\varphi = 2\pi\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$, τότε

$\lambda, \forall n \in \mathbb{Z}$

$$e^{j(\omega_0+\varphi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j\varphi n} = e^{j2\pi\lambda n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \qquad (!!!!!!!!!)$$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με 2π!!
  - Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα (από τη σχέση του Euler)!

- **<u>Ημίτονα</u>**
- Σύνοψη:



Περιοδικό?
Εξαρτάται από το ω_0!

Περιοδικό?
Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με 2π

- **Ημίτονα**

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις

- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
  - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο και από την καθημερινή εμπειρία μας

$4\cos\left(\frac{6\pi n - 2\pi n}{3}\right)$

- Όμως…

$$x_1[n] = 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2[n] = 4\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) = 4\cos\left(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} \text{ (!!!)}$$

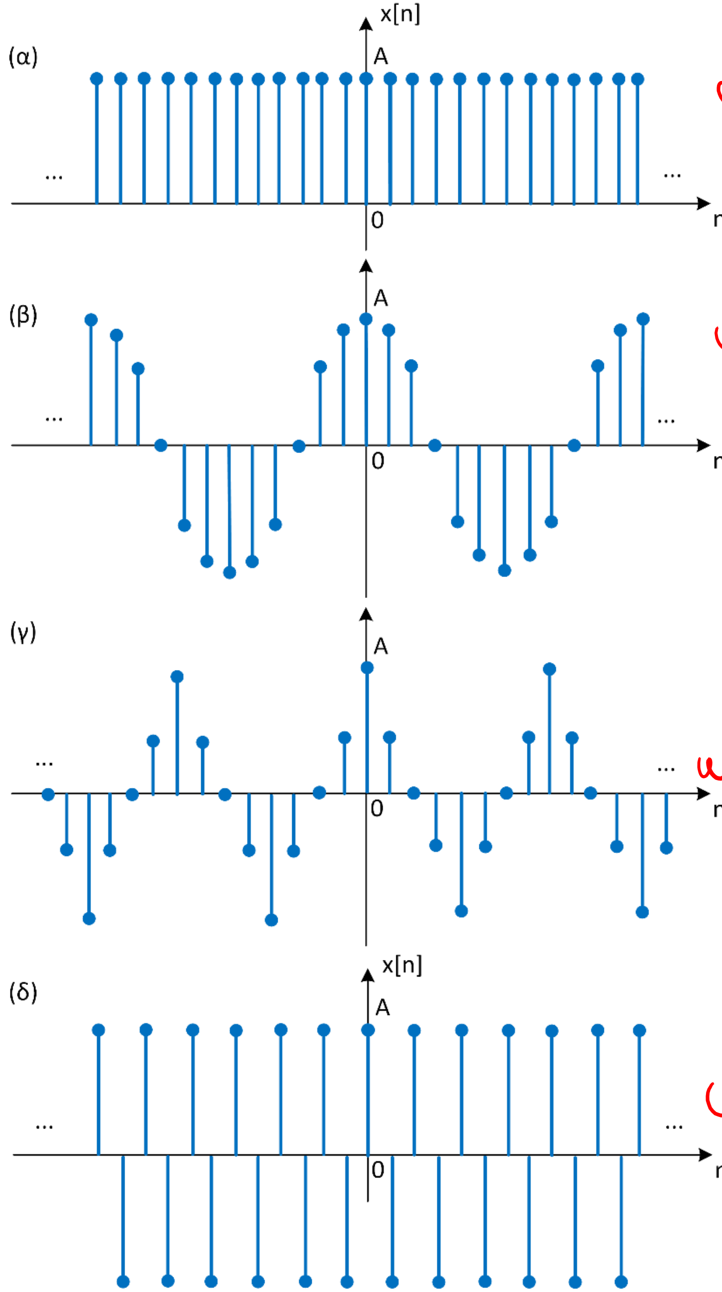
- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!
  - Άρα εν τέλει είναι ίδιες!

- **Ημίτονα** $\omega_0 = 0$

$x[n] = A\cos(\omega_0 n)$

2π

$\omega_0 = 2\pi$



$\omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$\omega_0 = \frac{5\pi}{3}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$\omega_0 = \frac{4\pi}{3}$

$\omega_0 = \pi$

$\omega_0 = \pi$

$A\cos(\pi n) = A(-1)^n$

π π

- Στο [0,π], η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το ω_0

- Στο (π, 2π], η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το ω_0!!

- Συχνότητες γύρω από το $\omega = 0 \rightarrow$ χαμηλές

- Συχνότητες γύρω από το $\omega = \pi \rightarrow$ υψηλές

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ