ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.
Το φίλτρο $h_2[n]$ είναι γνωστό από τη θεωρία ως υψιπερατό με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/4$. Άρα μένει να δούμε την επίδραση του φίλτρου με κρουστική απόκριση $h_1[n]$, ως προς την απόκριση πλάτους τους. Θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{e^{-j\omega} - 0.5}{1 - 0.5e^{-j\omega}}\right| = \left|e^{-j\omega}\frac{1 - 0.5e^{j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\left|\frac{1 - 0.5e^{j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}\right| = 1 \quad (1)$$

γιατί ο όρος του αριθμητή είναι ο συζυγής του παρονομαστή, ενώ $|e^{j\theta}| = 1, \ \forall\theta$. Οπότε το σύστημα αυτό είναι ένα allpass σύστημα. Άρα το συνολικό σε σειρά σύστημα έχει απόκριση πλάτους ίση με του δεύτερου συστήματος, δηλ. ενός υψιπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/4$.

Άσκηση 2.
Είναι (από τον ορισμό του συστήματος)

$$\begin{aligned} y[n] - y[n-1] &= \sum_{k-\infty}^{n}(k+1)x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1}(k+1)x[k] && (2)\\ &= \sum_{k-\infty}^{n-1}(k+1)x[k] + (n+1)x[n] - \sum_{k=-\infty}^{n-1}(k+1)x[k] && (3)\\ &= (n+1)x[n] && (4)\end{aligned}$$

άρα πράγματι

$$y[n] - y[n-1] = (n+1)x[n] \quad (5)$$

Για είσοδο $x[n] = u[n]$, θα είναι

$$y[n] - y[n-1] = (n+1)u[n] \quad (6)$$

και στο χώρο του Z, μέσω γνωστών ζευγών και ιδιοτήτων

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \iff Y(z)(1-z^{-1}) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \iff Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^3} \quad (7)$$

με $|z| > 1$.

Άσκηση 3.
Από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$X(z) = -\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (8)$$

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})} \quad (9)$$

οπότε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \ \ |z| > 1 \quad (10)$$

λόγω αιτιατότητας.

Άσκηση 4.
Το σύστημα αυτό έχει δυο διπλές μιγαδικές ρίζες, εντός μοναδιαίου κύκλου. Οι διπλές ρίζες $z_1, z_2 = z_1^*$ είναι τέτοιες που ικανοποιούν τους τύπους του Vieta, δηλ.

$$z_1 z_2 = z_1 z_1^* = |z_1|^2 = \frac{4}{5} \tag{11}$$

$$z_1 + z_2 = z_1 + z_1^* = -\frac{1}{5} \tag{12}$$

Άρα έχουμε δυο διπλά μηδενικά στο σύστημα αυτό. Για να μετατραπεί σε γραμμικής φάσης με την ίδια απόκριση πλάτους με το αρχικό πρέπει να διασπαστεί σε γραμμικής φάσης και allpass. Το σύστημα γραμμικής φάσης θα πρέπει να έχει τα μιγαδικά μηδενικά σε τετράδες, άρα πρέπει να καθρεφτίσουμε ένα από κάθε ζεύγος διπλών μηδενικών *έξω* από το μοναδιαίο κύκλο, στη συζυγή αμοιβαία θέση. Το άλλο μηδενικό του ζεύγους θα χρησιμοποιηθεί στο allpass σύστημα. Άρα το σύστημα γραμμικής φάσης που θα έχει συνολικά 4 μιγαδικά μηδενικά, θα έχει δυο συζυγή (αναγκαστικά, ώστε να είναι πραγματικό) μηδενικά από το αρχικό σύστημα, δηλ.

$$G_1(z) = 1 + \frac{1}{5}z^{-1} + \frac{4}{5}z^{-2} = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \tag{13}$$

και θα έχει και τα συζυγή αμοιβαία τους, της μορφής

$$\begin{aligned} G_2(z) &= (z^{-1} - z_1^*)(z^{-1} - z_2^*) && (14)\\ &= (z^{-2} - z_2^* z^{-1} - z_1^* z^{-1} + z_1^* z_2^*) && (15)\\ &= (z^{-2} - (z_1^* + z_1)z^{-1} + |z_1|^2) && (16)\\ &= z^{-2} + \frac{1}{5}z^{-1} + \frac{4}{5} && (17) \end{aligned}$$

από τους τύπους του Vieta. Οπότε το συνολικό σύστημα θα είναι της μορφής

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = (1 + \frac{1}{5}z^{-1} + \frac{4}{5}z^{-2})(z^{-2} + \frac{1}{5}z^{-1} + \frac{4}{5}) \tag{18}$$

Άσκηση 5.

(α΄) Αφού είναι FIR και γραμμικής φάσης, θα πρέπει να είναι συμμετρικό, είτε άρτιας είτε περιττής συμμετρίας. Δηλ.

$$h[n] = [2, 4, 3, 3, 4, 2] \tag{19}$$

ή

$$h[n] = [2, 4, 3, -3, -4, -2] \tag{20}$$

(β΄) Από τον αριθμό του τελευταίου δείγματος $M = 5$, και από το είδος του κέντρου συμμετρίας (δείγμα ή ψευδοδείγμα), βλέπουμε ότι έχουμε Τύπου ΙΙ ή IV φίλτρα γραμμικής φάσης.

(γ΄) Για κάθε φίλτρο γραμμικής φάσης, η καθυστέρηση ομάδας είναι $M/2 = 5/2$ δείγματα.

Άσκηση 6.

(α΄) Για να μετατρέψουμε ένα σύστημα σε ελάχιστης φάσης πρέπει να καθρεφτίσουμε κάθε μηδενικό εκτός μοναδιαίου κύκλου με το αντίστοιχο εντός μοναδιαίου κύκλου σύμφωνα με τη σχέση

$$1 - az^{-1} \longleftrightarrow z^{-1} - a^* \tag{21}$$

Αυτή η αλλαγή φέρνει τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου, χωρίς να αλλάζει την απόκριση πλάτους. Στην άσκηση αυτή, το μηδενικό στη θέση $z = -1.25$ πρέπει να έρθει μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ. να γίνει η αλλαγή

$$1 + 1.25z^{-1} \longleftrightarrow z^{-1} + 1.25 \tag{22}$$

Οπότε

$$H_{min}(z) = \frac{2(z^{-1} + 1.25)(1 + 0.25z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})} \tag{23}$$

(β') Το σύστημα μέγιστης φάσης θα έχει όλα τα μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου, δηλ. τα μηδενικά στις θέσεις $z = \pm j\sqrt{0.25}$ πρέπει να μεταφερθούν εκτός μοναδιαίου. Αυτό σημαίνει ότι

$$1 + 0.25z^{-2} = (1 + j0.5)(1 - j0.5) \longleftrightarrow z^{-2} + 0.25 = (z^{-1} + j0.5)(z^{-1} - j0.5) \tag{24}$$

Οπότε

$$H_{max}(z) = \frac{2(1 + 1.25z^{-1})(z^{-2} + 0.25)}{(1 - 0.81z^{-2})} \tag{25}$$

(γ') Κάθε μηδενικό μπορεί να είναι εντός ή εκτός κύκλου. Έχουμε 3 μηδενικά, άρα θα έχουμε $2^3 = 8$ πιθανές συναρτήσεις μεταφοράς. Αν έχουμε απαίτηση πραγματικού συστήματος, τότε τα μηδενικά πρέπει να διατηρούν συζυγή σχέση μεταξύ τους. Έχουμε ένα πραγματικό και δυο συζυγή μιγαδικά μηδενικά, άρα θα έχουμε $2^2 = 4$ πιθάνές πραγματικές συναρτήσεις μεταφοράς.

Άσκηση 7.

Βάζοντας ενδιάμεσες μεταβλητές σε κάθε έξοδο κόμβου, θα έχουμε

$$g[n] = x[n] - f[n-1] \tag{26}$$
$$w[n] = x[n] + k_1 g[n] \tag{27}$$
$$c[n] = w[n] + y[n-1] \tag{28}$$
$$f[n] = -y[n-1] - k_0 c[n] \tag{29}$$
$$y[n] = w[n] + k_0 c[n] \tag{30}$$

που δίνουν

$$G(z) = X(z) + z^{-1}F(z) \tag{31}$$
$$W(z) = X(z) + k_1 G(z) \tag{32}$$
$$C(z) = W(z) + z^{-1}Y(z) \tag{33}$$
$$F(z) = -z^{-1}Y(z) - k_0 C(z) \tag{34}$$
$$Y(z) = W(z) + k_0 C(z) \tag{35}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$H(z) = \frac{1 + k_0 + k_1 + k_0 k_1}{1 - (k_0 + k_0 k_1)z^{-1} - (k_1 + 2k_0 k_1)z^{-2}} \tag{36}$$

Η παραπάνω υλοποίηση σχετίζεται με την DF-II με διάφορους τρόπους, αναλόγως πως υλοποιείτε τους πολλαπλασιασμούς. Κάθε απάντηση θεωρείται σωστή.