ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 9/11/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: 27/11/2023, 11:59

Άσκηση 1.

(α΄) Έστω $H(z) = z - \frac{1}{a}$, με a πραγματικό και $0 < a < 1$. Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών (όλων!). Βρείτε την απόκριση φάσης αυτού του συστήματος.

(β΄) Έστω $G(z)$ το σύστημα με πόλους στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις των μηδενικών του $H(z)$, και μηδενικά στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις των πόλων του $H(z)$ (συμπεριλαμβάνοντας πόλους και μηδενικά στο 0 ή στο ∞). Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $G(z)$. Βρείτε την απόκριση φάσης του συστήματος και δειξτε ότι είναι ίδια με την απόκριση φάσης του συστήματος $H(z)$.

Απ: $\angle H(e^{j\omega}) = \angle G(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega) - \frac{1}{a}}$

Άσκηση 2.
Θεωρήστε το ευσταθές ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + 4z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} \tag{1}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(z) = H_{min}(z) H_{ap}(z) \tag{2}$$

όπως γνωρίζετε από τις διαλέξεις. Βρείτε τα συστήματα $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, σχεδιάστε διαγράμματα πόλων-μηδενικών, και βρείτε τα πεδία σύγκλισης.

Άσκηση 3.
Οι κρουστικές αποκρίσεις τεσσάρων FIR συστημάτων γραμμικής φάσης δίνονται ως

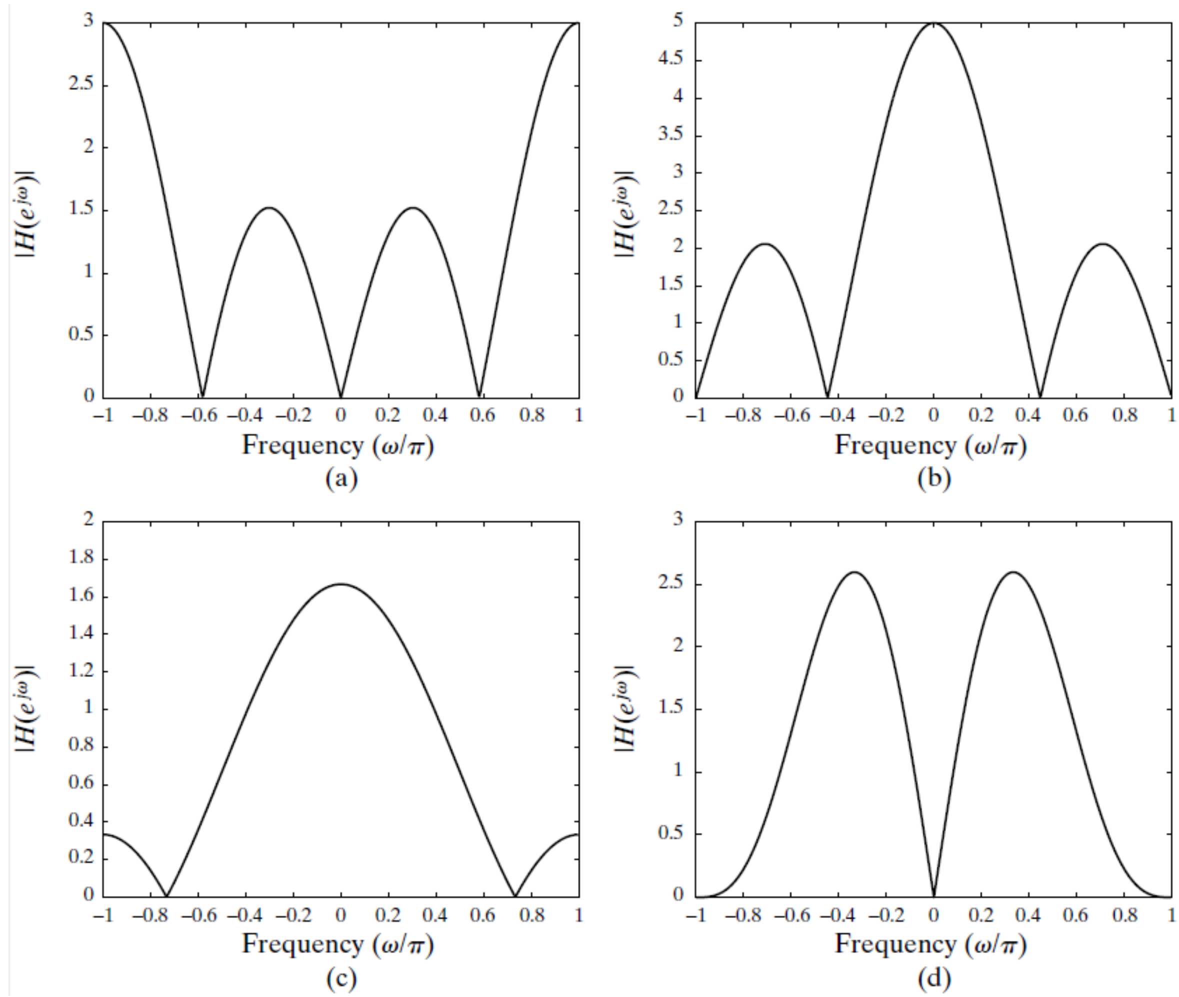
$$h_1[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{7}{10}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2] \tag{3}$$

$$h_2[n] = \frac{3}{2}\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{3}{2}\delta[n-3] \tag{4}$$

$$h_3[n] = -\frac{1}{2}\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-3] + \frac{1}{2}\delta[n-4] \tag{5}$$

$$h_4[n] = -\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2] + \delta[n-3] \tag{6}$$

και *πιθανώς* να ανταποκρίνονται στις αποκρίσεις πλάτους που φαίνονται στο Σχήμα 1. Αντιστοιχίστε (και δικαιολογήστε) κάθε κρουστική απόκριση σε μια απόκριση πλάτους. Προσέξτε στα γραφήματα, ο οριζόντιος άξονας έχει διαιρεθεί με π, οπότε π.χ. η συχνότητα $\omega = \pi$ αντιστοιχεί στη μονάδα (αντίστοιχα, η συχνότητα $\omega = -\pi$ αντιστοιχεί στο -1).



Σχήμα 1: *Αποκρίσεις πλάτους Άσκησης 3.*

Άσκηση 4.
Έστω η συνάρτηση μεταφοράς ενός ευσταθούς ΓΧΑ συστήματος

$$H(z) = \frac{z-5}{z\left(z-\frac{1}{8}\right)} \tag{7}$$

(α΄) Είναι το σύστημα αιτιατό; Δικαιολογήστε.

(β΄) Διασπάστε το σύστημα σε ένα γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και ενός συστήματος all-pass.

(γ΄) Διασπάστε το σύστημα σε ένα γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης και ενός συστήματος γενικευμένης γραμμικής φάσης.

Απ: (β) $H_{min}(z) = \frac{z^{-1}-5}{1-\frac{1}{8}z^{-1}}$, $H_{ap}(z) = z^{-1}\frac{z^{-1}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$,
(γ) $H_{lp}(z) = (1-5z^{-1})(1-\frac{1}{5}z^{-1})z^{-1}$, $H_{min}(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{8}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z^{-1})}$

Άσκηση 5.
Ένα σύστημα FIR γραμμικής φάσης έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

- πραγματική κρουστική απόκριση
- καθυστέρηση ομάδας $\tau_g(e^{j\omega}) = 2$
- ένα μηδενικό στη θέση $z = j/2$
- $H(z)\Big|_{z=1} = 1$

Από τα δεδομένα, αναγνωρίστε τον Τύπο (I,II,III, ή IV) γραμμικής φάσης και βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$.

Απ.: $h[n] = \frac{4}{25}\Big[\delta[n] + \frac{17}{4}\delta[n-2] + \delta[n-4]\Big]$

Άσκηση 6.
Βρείτε δυο διαφορετικά πραγματικά συστήματα που ικανοποιούν τις ακόλουθες προδιαγραφές:

- $h[0] \geq \frac{1}{4}$
- $h[1] < 0$
- $|H(e^{j\omega})|^2 = \dfrac{17}{16} - \dfrac{1}{2}\cos(\omega)$

<u>Hint:</u> Μεταφέρετε την τελευταία σχέση στο χώρο του Z και συγκρίνετε με γνωστές σχέσεις των διαλέξεων.

Απ.: $h_1[n] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]$, $h_2[n] = \frac{1}{4}\delta[n] - \delta[n-1]$