ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 9/11/2023 Ημερομηνία Παράδοσης: 27/11/2023, 11:59

Άσκηση 1.

(α΄) Έστω $H(z) = z - \frac{1}{a}$, με a πραγματικό και $0 < a < 1$. Το σύστημα αυτό έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 1/a$ και έναν πόλο στο άπειρο. Η απόκριση σε συχνότητα είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega} - \frac{1}{a} = \cos(\omega) - \frac{1}{a} + j\sin(\omega) \tag{1}$$

Η απόκριση φάσης του θα είναι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega) - \frac{1}{a}} \tag{2}$$

(β΄) Έστω $G(z)$ το σύστημα με πόλους στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις των μηδενικών του $H(z)$, και μηδενικά στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις των πόλων του $H(z)$. Το $G(z)$ θα είναι της μορφής

$$G(z) = \frac{z}{z-a} \tag{3}$$

που έχει έναν πόλο στο $z = a$ και ένα μηδενικό στο $z = 0$. Η απόκριση σε συχνότητα είναι

$$G(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{e^{j\omega}(e^{-j\omega} - a)}{|e^{j\omega} - a|^2} = \frac{1 - ae^{j\omega}}{|e^{j\omega} - a|^2} = \frac{\Big(1 - a\cos(\omega)\Big) - ja\sin(\omega)}{|e^{j\omega} - a|^2} \tag{4}$$

και άρα η απόκριση φάσης θα είναι

$$\angle G(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{-a\sin(\omega)}{1 - a\cos(\omega)} = \tan^{-1}\frac{a\sin(\omega)}{a\cos(\omega) - 1} = \tan^{-1}\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega) - \frac{1}{a}} \tag{5}$$

που είναι ίδια με την απόκριση φάσης του $H(e^{j\omega})$.

Άσκηση 2.

Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται

$$H(z) = \frac{1 + 4z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{z^2 + 4}{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}} = \frac{(z+2j)(z-2j)}{(z - \frac{3}{4})(z + \frac{1}{2})} \tag{6}$$

Βλέπουμε ότι το σύστημα έχει έναν πόλο στη θέση $z = 3/4$ και έναν στη θέση $z = -1/2$, ενώ έχει και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 2j$. Τα δυο μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου θα ανήκουν στο σύστημα allpass, το οποίο θα έχει και δυο πόλους στις θέσεις $z = \pm 1/2j$, οι οποίοι πρέπει να ακυρωθούν με μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης ώστε η παραγοντοποίηση να είναι έγκυρη. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{1 + 4z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{7}$$

Το παραπάνω σύστημα δεν έχει μοναδιαία απόκριση πλάτους, οπότε πρέπει να γραφεί ως

$$H_{ap}(z) = \frac{4(z^{-2} + \frac{1}{4})}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{8}$$

με τη σταθερά να μεταφέρεται στο ελάχιστης φάσης που θα είναι

$$H_{min}(z) = \frac{4(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{4 + z^{-2}}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \tag{9}$$

και

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{10}$$

Εφόσον το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές, θα είναι $R_H = \{|z| > 3/4\}$, $R_{ap} = \{|z| > 1/2\}$, $R_{min} = \{|z| > 3/4\}$.

Άσκηση 3.

Η $h_1[n]$ έχει άρτια συμμετρία και $M = 2$, οπότε είναι Τύπου I. Η $h_2[n]$ έχει άρτια συμμετρία και έχει $M = 3$, οπότε είναι Τύπου II. Όμοια, η $h_3[n]$ έχει περιττή συμμετρία και $M = 4$, οπότε είναι Τύπου III, ενώ η $h_4[n]$ έχει περιττή συμμετρία και $M = 3$, οπότε είναι Τύπου IV.

Τα Τύπου I φίλτρα γραμμικής φάσης δεν έχουν δέσμευση μηδενικών σε θέσεις του μιγαδικού επιπέδου. Από τα σχήματα, το (c) δεν έχει μηδενικά στις θέσεις $z = 1$,$z = -1$, δηλ. στις συχνότητες $\omega = 0, \omega = \pm\pi$. Τα Τύπου II έχουν υποχρεωτικά μηδενικό στη θέση $z = -1$, δηλ. στη συχνότητα $\omega = \pm pi$, άρα το (b) είναι σωστό σχήμα. Τα Τύπου III έχουν υποχρεωτικά μηδενικά στις θέσεις $z = 1$, $z = -1$, δηλ. στις συχνότητες $\omega = 0$, $\omega = \pm\pi$, άρα το (d) είναι το σωστό σχήμα, ενώ τέλος τα Τύπου IV έχουν υποχρεωτικό μηδενικό στη θέση $z = 1$, δηλ. στη συχνότητα $\omega = 0$. Το σωστό σχήμα είναι το (a).

Άσκηση 4.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς ενός ευσταθούς ΓΧΑ συστήματος

$$H(z) = \frac{z - 5}{z\Big(z - \frac{1}{8}\Big)} \tag{11}$$

(α΄) Το σύστημα έχει έναν πόλο στο μηδέν κι έναν στο $1/8$. Είναι ευσταθές, άρα $|z| > 1/8$ για το πεδίο σύγκλισής του, το οποίο περιλαμβάνει το άπειρο (δεν υπάρχει πόλος εκεί), άρα είναι αιτιατό.

(β΄) Το σύστημα έχει έναν πόλο στο $z = 0$, έναν στο $z = 1/8$, και ένα μηδενικό στο $z = 5$ και άλλο ένα στο άπειρο. Το σύστημα allpass θα πάρει το μηδενικό στο $z = 5$ και το μηδενικό στο άπειρο. Αναγκαστικά θα πάρει και τον πόλο στο μηδέν. Συμπληρωματικά, θα πρέπει να έχει και έναν πόλο στο $z = 1/5$, για να είναι έγκυρο allpass. Ο τελευταίος πόλος θα πρέπει να ακυρωθεί με ένα μηδενικό στην ίδια θέση στο σύστημα ελάχιστης φάσης. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1}(1 - 5z^{-1})}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})} = z^{-1}\frac{(-5)(z^{-1} - \frac{1}{5})}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})} \tag{12}$$

με τη σταθερά -5 να πρέπει να μεταφερθεί στο ελάχιστης φάσης που είναι

$$H_{min}(z) = -5\frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{8}z^{-1}} = \frac{z^{-1} - 5}{1 - \frac{1}{8}z^{-1}} \tag{13}$$

και

$$H_{ap}(z) = z^{-1}\frac{(z^{-1} - \frac{1}{5})}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})} \tag{14}$$

(γ΄) Το σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης θα πάρει τον πολο στο $z = 0$ και το μηδενικό στο άπειρο, όπως επίσης και το μηδενικό στο $z = 5$. Για να είναι γραμμικής φάσης πρέπει να έχει και ένα μηδενικό στην αμοιβαία θέση του $z = 5$, δηλ. στην $z = 1/5$. Άρα θα είναι

$$H_{lin}(z) = z^{-1}(1 - 5z^{-1})(1 - \frac{1}{5}z^{-1}) \tag{15}$$

Το ελάχιστης φάσης θα έχει τον πόλο στη θέση $z = 1/8$ κι έναν ακόμη πόλο στη θέση $z = 1/5$ για να ακυρώνει το μηδενικό στην ίδια θέση που μπήκε στο γραμμικής φάσης. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{8}z^{-1})(1 - \frac{1}{5}z^{-1})} \tag{16}$$

Άσκηση 5.

Η γενική μορφή του συστήματος θα είναι

$$H(z) = A\prod_k (1 - c_k z^{-1}) \tag{17}$$

Αφού η καθυστέρηση ομάδας είναι 2, αυτό σημαίνει ότι $M = 4$, άρτιο, άρα είναι Τύπου I ή III. Αφού έχει ενα μηδενικό στη θέση $z = j/2$ θα έχει και μηδενικά στις συζυγείς (ως πραγματικό σύστημα) και στις συζυγείς αμοιβαίες (ως γραμμικής φάσης) του, άρα

$$H(z) = A(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})(1 - \frac{2}{j}z^{-1})(1 + \frac{2}{j}z^{-1}) = A(1 + \frac{17}{4}z^{-2} + z^{-4}) \tag{18}$$

μετά από πράξεις. Βλέπουμε ότι είναι ξεκάθαρα Τύπου I. Επειδή $H(1) = 1$, έχουμε

$$H(1) = A(1 + \frac{17}{4} + 1) \Longrightarrow A = \frac{4}{25} \tag{19}$$

Άρα τελικά η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \frac{4}{25}\Big[\delta[n] + \frac{17}{4}\delta[n-2] + \delta[n-4]\Big] \tag{20}$$

Άσκηση 6.

Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$|H(z)|^2\Big|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})|^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos(\omega) = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}e^{j\omega} - \frac{1}{4}e^{-j\omega} \tag{21}$$

και άρα

$$|H(z)|^2 = H(z)H^*(1/z^*) = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}z^{-1} \tag{22}$$

Συγκρίνοντας με τη γενική σχέση των διαλέξεων βλέπουμε ότι το σύστημα έχει ένα μηδενικό στο $z = 1/4$. Ένα τέτοιο σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = 1 - \frac{1}{4}z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1] \tag{23}$$

που ικανοποιεί $h[0] \geq \frac{1}{4}$, $h[1] < 0$. Από την ίδια γενική σχέση των διαλέξεων παρατηρούμε ότι το σύστημα μπορεί να έχει κι ένα μηδενικό στο $z = 4$. Ένα τέτοιο σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1}{4} - z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \frac{1}{4}\delta[n] - \delta[n-1] \tag{24}$$

που ικανοποιεί ότι $h[0] \geq \frac{1}{4}$, $h[1] < 0$.