ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α΄) Θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega} - e^{-j6\omega} \tag{1}$$

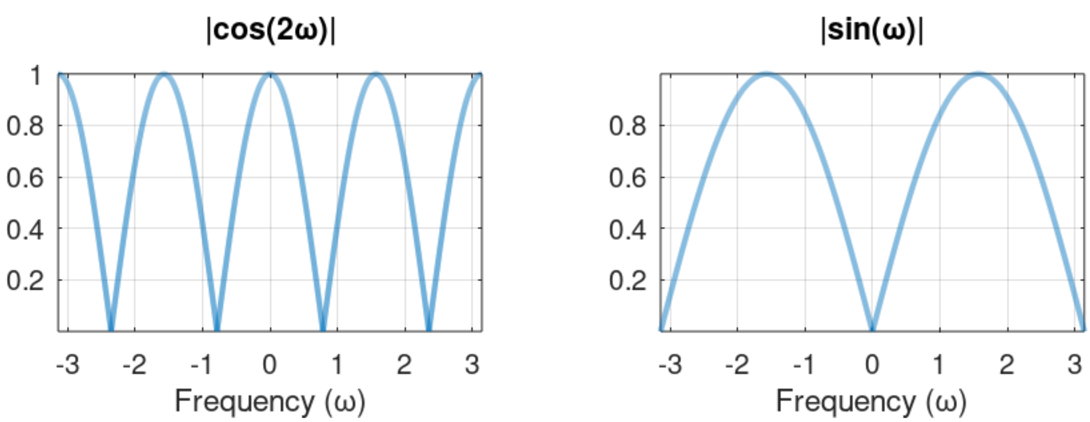
(β΄) Θα χρειαστεί να γράψουμε την απόκριση σε συχνότητα σε παραγοντική μορφή για ευκολία. Θα είναι

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega} - e^{-j6\omega} &(2)\\
&= e^{-j2\omega}(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) - e^{-j4\omega}(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) &(3)\\
&= e^{-j2\omega} 2\cos(2\omega) - e^{-j4\omega} 2\cos(2\omega) &(4)\\
&= 2\cos(2\omega)(e^{-j2\omega} - e^{-j4\omega}) &(5)\\
&= 2\cos(2\omega)e^{-j3\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) &(6)\\
&= 2\cos(2\omega)e^{-j3\omega} 2j\sin(\omega) &(7)\\
&= 4j\cos(2\omega)\sin(\omega)e^{-j3\omega} &(8)
\end{aligned}$$

Άρα

$$|H(e^{j\omega})| = 4|\cos(2\omega)||\sin(\omega)| \tag{9}$$

Δείτε το Σχήμα 1 και η συνολική απόκριση πλάτους φαίνεται στο Σχήμα 2 Για τη φάση θα έχουμε



Σχήμα 1: *Επιμέρους πλάτη.*

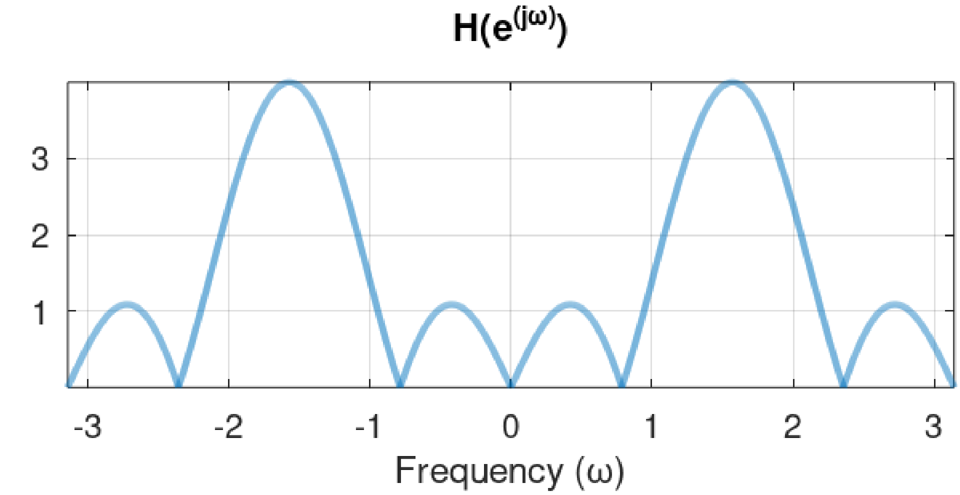
$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle j + \angle\cos(2\omega) + \angle\sin(\omega) + \angle e^{-j3\omega} = \frac{\pi}{2} - 3\omega + \angle\cos(2\omega) + \angle\sin(\omega) \tag{10}$$

Πρέπει να βρούμε τα πρόσημα των δυο ημιτονοειδών. Σημεία μηδενισμού του $\cos(2\omega)$ είναι

$$\cos(2\omega) = 0 \iff 2\omega = 2k\pi \pm \pi/2 \iff \omega = k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ k \in \mathrm{Z} \tag{11}$$

οπότε στο $(-\pi, \pi]$ θα είναι

$$\omega_1 = -\pi/4,\ \omega_2 = \pi/4,\ \omega_3 = 3\pi/4,\ \omega_4 = -3\pi/4 \tag{12}$$

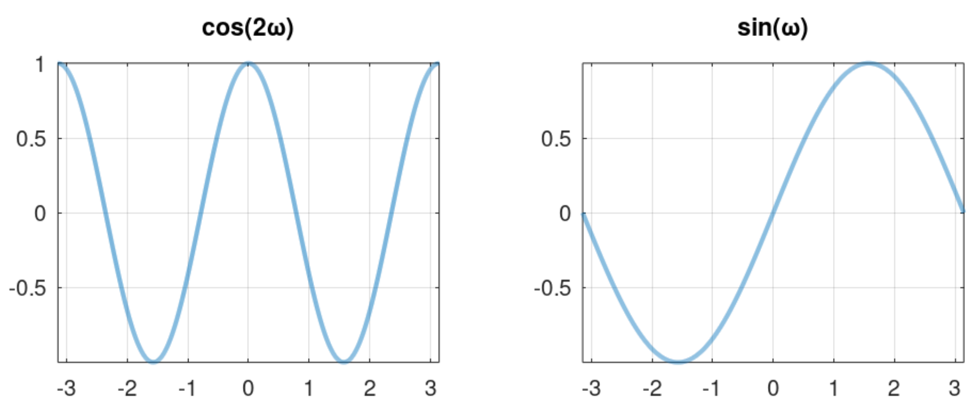


Σχήμα 2: *Απόκριση πλάτους.*

Όμοια για τον όρο $\sin(\omega)$

$$\sin(\omega) = 0 \iff \omega = k\pi,\ k \in Z \tag{13}$$

άρα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ θα είναι μόνο τα $\omega_1 = 0,\ \ \omega_2 = \pi$. Δείτε το Σχήμα 3. Οπότε η φάση θα είναι



Σχήμα 3: *Όροι για εύρεση φάσης.*

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3\omega - \pi, & -\pi < \omega < -3\pi/4 \\ \frac{\pi}{2} - 3\omega, & -3\pi/4 < \omega < -\pi/4 \\ \frac{\pi}{2} - 3\omega - \pi, & -\pi/4 < \omega < 0 \\ \frac{\pi}{2} - 3\omega, & 0 < \omega < \pi/4 \\ \frac{\pi}{2} - 3\omega + \pi, & \pi/4 < \omega < 3\pi/4 \\ \frac{\pi}{2} - 3\omega, & 3\pi/4 < \omega < \pi \end{cases} \tag{14}$$

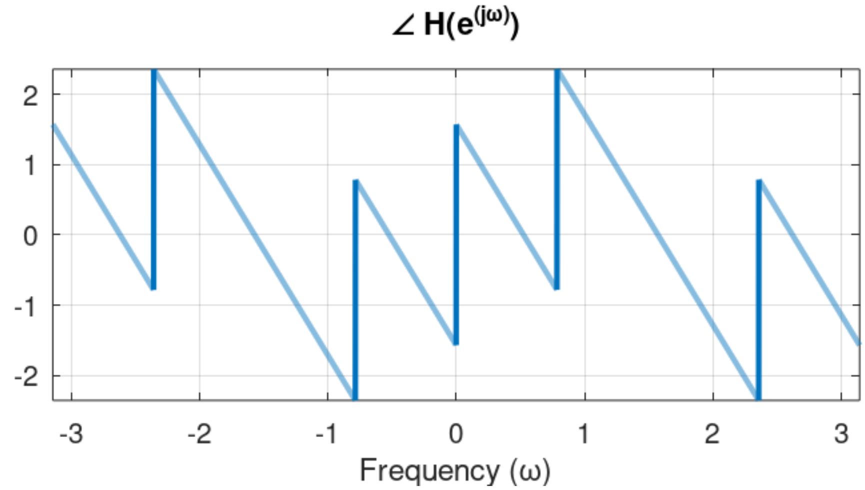
και τη βλέπουμε στο Σχήμα 4.

(γ) Θα είναι

i. $x[n] = 2\cos(\pi n/4 + \pi)$, η έξοδος θα είναι $y[n] = 0$ γιατί η απόκριση πλάτους μηδενίζεται στη συχνότητα $\omega = \pi/4$.

ii. $x[n] = \cos(\pi n/2)$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = |H(e^{j\pi/2})| \cos(\pi n/2 + \angle H(e^{j\pi/2})) = 4\cos(\pi n/2 + 0) = 4\cos(\pi n/2) \tag{15}$$



Σχήμα 4: *Απόκριση φάσης.*

(δ΄) Η καθυστέρηση ομάδας $\tau_g(e^{j\omega})$ θα δίνεται ως

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega}) = 3 \tag{16}$$

για κάθε ω (εκτός από τα σημεία ασυνέχειας).

Άσκηση 2. Θα είναι

$$h[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n} \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = F\{\cos(\pi n/2)\} * F\Big\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}\Big\} \tag{17}$$

$$= \Big(\pi\delta(\omega-\pi/2) + \pi\delta(\omega+\pi/2)\Big) * \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{5} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{18}$$

$$= \Big(\pi\delta(\omega-\pi/2) + \pi\delta(\omega+\pi/2)\Big) * \mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{\frac{2\pi}{5}}\Big) \tag{19}$$

$$= \pi\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{5}}\Big) + \pi\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega+\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{5}}\Big) \tag{20}$$

με

$$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{21}$$

δανειζόμενοι το συμβολισμό από το ΗΥ215 - φυσικά δεν είναι απαραίτητο να το γράψετε έτσι. Η απόκριση συχνότητας είναι μη μηδενική στα διαστήματα $(-6\pi/10, -4\pi/10) = (-0.6\pi, -0.4\pi)$ και $(4\pi/10, 6\pi/10) = (0.4\pi, 0.6\pi)$. Το σήμα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) + \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \tag{22}$$

έχει συχνότητες $\omega_1 = \pi/8 = 0.125\pi$ και $\omega_2 = 3\pi/4 = 0.75\pi$, οι οποίες είναι αμφότερες εκτός του διαστήματος που η απόκριση πλάτους παίρνει μη μηδενικές τιμές. Άρα

$$y[n] = 0 \tag{23}$$

Άσκηση 3. Ο μετασχ. Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{8}e^{-j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \tag{24}$$

γράφεται

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})} \tag{25}$$

Επειδή ο αριθμητής είναι μικρότερου βαθμού από τον παρονομαστή, μπορούμε να γράψουμε

$$X(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{26}$$

με

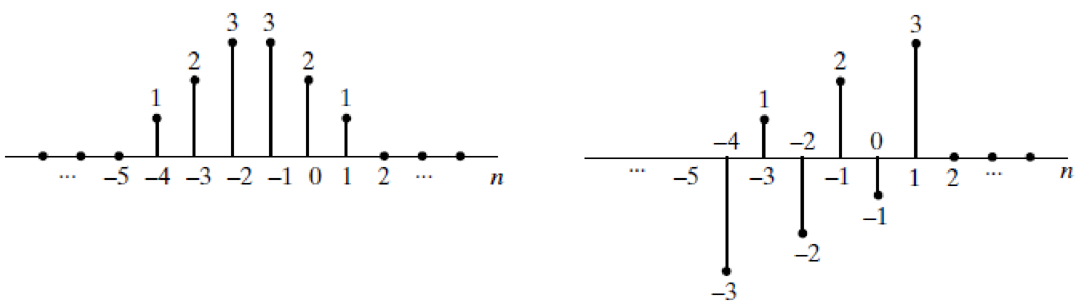
$$A = X(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=4} = 1 \tag{27}$$

$$B = X(e^{j\omega})(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=-2} = 1 \tag{28}$$

οπότε

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \longleftrightarrow x[n] = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + \Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \tag{29}$$

Άσκηση 4. Με βάση το Σχήμα 5



Σχήμα 5: *Πραγματικό (αριστερά) και φανταστικό (δεξιά) μέρος ενός μιγαδικού σήματος* $x[n]$.

(α') $X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 12$

(β') $X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](-1)^n = -12j$

(γ') $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\Big|_{n=0} = 2\pi x[0] = 2\pi(2-j)$

(δ') Ξέρουμε ότι

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega}) \tag{30}$$

οπότε δείτε το Σχήμα 6.

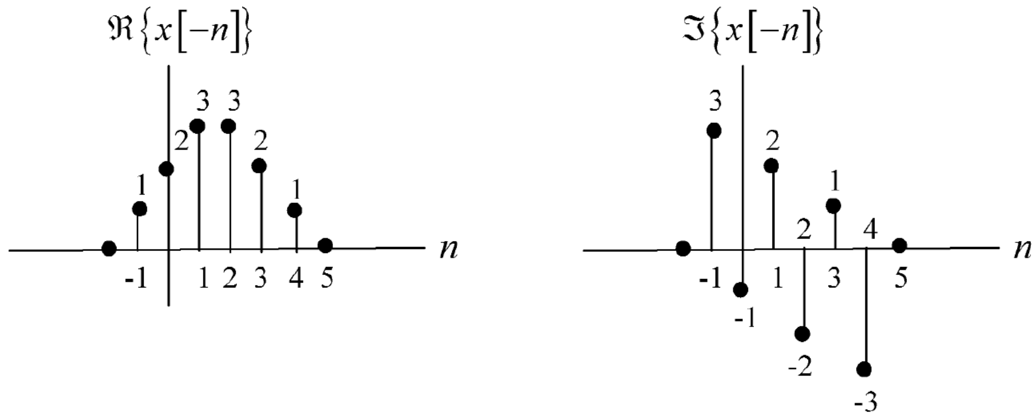
(ε') Ξέρουμε ότι

$$x_o[n] \longleftrightarrow j\Im\{X(e^{j\omega})\} \tag{31}$$

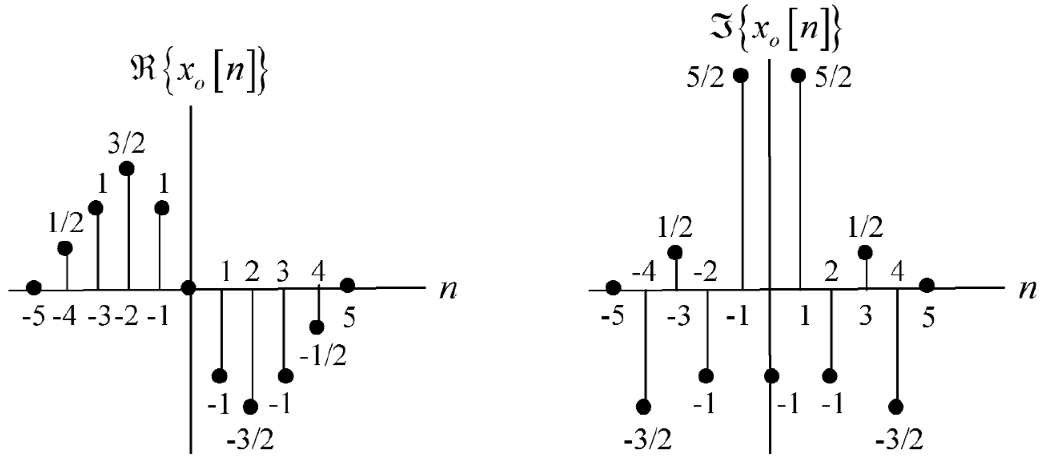
με $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$ οπότε δείτε το Σχήμα 7.

Άσκηση 5. Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{4}{5}e^{-j\omega}} \tag{32}$$



Σχήμα 6: *Σήμα ερωτήματος 4δ.*



Σχήμα 7: *Σήμα ερωτήματος 4ε.*

(α΄) Θα είναι

$$h[n] = F^{-1}\Big\{\frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}\Big\} + F^{-1}\Big\{\frac{e^{-j2\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}\Big\} = \Big(\frac{4}{5}\Big)^n u[n] + \Big(\frac{4}{5}\Big)^{n-2} u[n-2] \tag{33}$$

(β΄) Αφού

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega}}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+e^{-j2\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}} \tag{34}$$

τότε

$$Y(e^{j\omega})(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})(1+e^{-j2\omega}) \tag{35}$$

και από ιδιότητες

$$y[n] - 0.8y[n-2] = x[n] + x[n-2] \tag{36}$$

(γ΄) Αν θέλουμε να μηδενιστεί ο ημιτονοειδής όρος, πρέπει να επιλέξουμε ένα ω_0 που να έχει μηδενισμό στην απόκριση πλάτους. Βλέπουμε ότι η απόκριση πλάτους μηδενίζεται για $\omega = \pi/2$, οπότε

$$y[n] = 4H(e^{j0}) + 2\cdot 0\cos(\pi n/2) = 4\cdot 10 = 40 \tag{37}$$

Εν γένει, η τιμή του ω_0 μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τις $2\pi k \pm \pi/2$, $k \in$ Z.

Άσκηση 6. Η είσοδος

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \tag{38}$$

έχει μετασχ. Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \tag{39}$$

και η έξοδος

$$y[n] = (n+3)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{40}$$

έχει μετασχ. Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega}\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})^2} + \frac{3}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \tag{41}$$

Το ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{3 - \frac{17}{12}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}{1 - \frac{2}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{9}e^{-j2\omega}} \tag{42}$$

και

$$Y(e^{j\omega})(1 - \frac{2}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{9}e^{-j2\omega}) = X(e^{j\omega})(3 - \frac{17}{12}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}) \tag{43}$$

και γυρνώντας πίσω στο χρόνο από γνωστές ιδιότητες

$$y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = 3x[n] - \frac{17}{12}x[n-1] + \frac{1}{6}x[n-2] \tag{44}$$