ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

i. Το σύστημα γράφεται σε κάθε περίπτωση:

(α΄) $y[n] = 2x[n]$, που είναι προφανώς χρονικά αμετάβλητο.

(β΄) $y[n] = x[n](n+n-1) = (2n-1)x[n]$, που είναι χρονικά μεταβλητό γιατί για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος είναι $(2n-1)x[n-n_0]$, ενώ καθυστερώντας την έξοδο κατά n_0 παίρνουμε $(2(n-n_0)-1)x[n-n_0]$. Οι δυο έξοδοι δεν είναι ίδιες.

(γ΄) $y[n] = x[n](1+(-1)^n+1+(-1)^{n-1}) = x[n](2+(-1)^n(1-(-1)^{-1})) = 2x[n]$, που είναι ξανά χρονικά αμετάβλητο.

ii. Η πρόταση είναι λάθος. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το εξής: αν $y_1[n] = x_1[n]+1$ και $y_2[n] = x_2[n]-1$ δυο μη γραμμικά συστήματα, η σειριακή τους σύνδεση βάζει την έξοδο του ενός στην είσοδο του άλλου, οπότε θα είναι $y_2[n] = (x_1[n]+1)-1 = x_1[n]$, που είναι γραμμικό. Φυσικά υπάρχουν κι άλλα παραδείγματα.

Άσκηση 2.

Η συνολική κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_{tot}[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) * h_4[n] \tag{1}$$

η οποία γράφεται

$$\begin{aligned} h_{tot}[n] &= \delta[n+N] * (u[n-N] - u[n-2N]) * (1/4)^n u[n] &(2)\\ &= (u[n] - u[n-N]) * (1/4)^n u[n] &(3)\\ &= (1/4)^n u[n] * u[n] - (1/4)^n u[n] * u[n-N] &(4)\end{aligned}$$

Οι δυο συνελίξεις γράφονται αντίστοιχα

$$c_1[n] = (1/4)^n u[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/4)^k u[k] u[n-k] \tag{5}$$

και

$$c_2[n] = (1/4)^n u[n] * u[n-N] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/4)^k u[k] u[n-N-k] \tag{6}$$

Θα είναι

$$\begin{aligned} c_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/4)^k u[k] u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} (1/4)^k &(7)\\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\Big(1-\Big(\frac{1}{4}\Big)^{n+1}\Big), \ \ n \geq 0 &(8)\\ &= \frac{4}{3}\Big(1-\Big(\frac{1}{4}\Big)^{n+1}\Big) u[n] &(9)\end{aligned}$$

και

$$c_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/4)^k u[k]u[n-N-k] = \sum_{k=0}^{n-N} (1/4)^k \tag{10}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-N+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\Big(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-N+1}\Big), \ n \geq N \tag{11}$$

$$= \frac{4}{3}\Big(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-N+1}\Big)u[n-N] \tag{12}$$

'ρα συνολικά

$$h_{tot}[n] = c_1[n] - c_2[n] = \frac{4}{3}\Big[\Big(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\Big)u[n] - \Big(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-N+1}\Big)u[n-N]\Big] \tag{13}$$

Άσκηση 3.

i. $y[n] = x[2n+4]$:

- Το σύστημα είναι γραμμικό γιατί είναι ομογενές και αθροιστικό, δηλ.
  (α΄) Ομογενές: για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος είναι $cx[2n+4] = cy[n]$.
  (β΄) Αθροιστικό: για είσοδο $x_1[n] + x_2[n]$, η έξοδος είναι $x_1[2n+4] + x_2[2n+4] = y_1[n] + y_2[n]$.
- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί αν $|x[n]| \leq B_x$, ισχύει

$$|y[n]| = |x[2n+4]| \leq B_x = B_y \tag{14}$$

- Το σύστημα δεν είναι αιτιατό γιατί απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί η τρέχουσα τιμή της εξόδου.
- Το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό γιατί για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος είναι $x[2n-n_0+4]$, ενώ η καθυστέρηση κατά n_0 της εξόδου δίνει $x[2(n-n_0)+4]$. Οι δυο έξοδοι είναι διαφορετικές.
- Το σύστημα είναι δυναμικό γιατί απαιτεί μνήμη, π.χ. το $y[0]$ απαιτεί το $x[4]$.

ii. $y[n] = n^2 x[n-1]$:

- Το σύστημα είναι γραμμικό γιατί είναι ομογενές και αθροιστικό, δηλ.
  (α΄) Ομογενές: για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος είναι $n^2 cx[n-1] = cn^2 x[n-1] = cy[n]$.
  (β΄) Αθροιστικό: για είσοδο $x_1[n] + x_2[n]$, η έξοδος είναι $n^2 x_1[n-1] + n^2 x_2[n-1] = y_1[n] + y_2[n]$.
- Το σύστημα δεν είναι ευσταθές γιατί αν $|x[n]| \leq B_x$, ισχύει

$$|y[n]| = |n^2 x[n-1]| = |n^2||x[n-1]| = n^2|x[n-1]| \leq n^2 B_x \tag{15}$$

  που μεγαλώνει στο άπειρο όσο $n \to \infty$.
- Το σύστημα είναι αιτιατό γιατί απαιτεί μόνο παρελθοντικές τιμές της εισόδου, δηλ. δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές.
- Το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό γιατί για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος είναι $n^2 x[n-n_0-1]$, ενώ η καθυστέρηση κατά n_0 της εξόδου δίνει $(n-n_0)^2 x[n-n_0-1]$. Οι δυο έξοδοι είναι διαφορετικές.
- Το σύστημα είναι δυναμικό γιατί απαιτεί μνήμη, π.χ. το $y[1]$ απαιτεί το $x[0]$.

iii. $y[n] = \dfrac{1}{e^{x[n]}}$:

- Το σύστημα δεν είναι γραμμικό γιατί δεν είναι ομογενές (ούτε αθροιστικό), δηλ.

(αʹ) Ομογενές: για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος είναι $1/ce^{x[n]} \neq c/e^{x[n]}$.

(βʹ) Αθροιστικό: για είσοδο $x_1[n] + x_2[n]$, η έξοδος είναι $1/e^{(x_1[n]+x_2[n])} \neq 1/e^{x_1[n]} + 1/e^{x_2[n]} = y_1[n] + y_2[n]$.

- Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί αν $|x[n]| \leq B_x \Longleftrightarrow -B_x \leq x[n] \leq B_x$, ισχύει

$$|y[n]| = |1/e^{x[n]}| \leq 1/e^{-B_x} = e^{B_x} = B_y \tag{16}$$

- Το σύστημα είναι αιτιατό γιατί η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου.
- Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος είναι $1/e^{x[n-n_0]}$, ενώ η καθυστέρηση κατά n_0 της εξόδου δίνει $1/e^{x[n-n_0]}$. Οι δυο έξοδοι είναι ίδιες.
- Το σύστημα δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτεί μνήμη.

Άσκηση 4.
Είναι

$$\begin{aligned}
c_{xy}[n] = y[n] * x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]x[n-k] && (17)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^k u[k+2]\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k-2} u[n-k-2] && (18)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k-2} u[k+2]u[n-k-2] && (19)\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-2} \sum_{k=-2}^{n-2} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^k \Big(\frac{1}{2}\Big)^{-k} && (20)\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-2} \sum_{k=-2}^{n-2} \Big(-\frac{2}{3}\Big)^k && (21)\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-2} \frac{\Big(-\frac{2}{3}\Big)^{-2} - \Big(-\frac{2}{3}\Big)^{n-2+1}}{1+\frac{2}{3}} && (22)\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-2} \frac{3}{5}\Big(\frac{9}{4} - \Big(-\frac{2}{3}\Big)^{n-1}\Big) && (23)\\
&= \frac{3}{5}\Big[9\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big(-\frac{2}{3}\Big)^{n-1}\Big] && (24)\\
&= \frac{1}{5}\Big[27\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - 6\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n-1}\Big] && (25)\\
&= \frac{1}{5}\Big[3^3\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + 18\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big] && (26)\\
&= \frac{1}{5}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big[18 - 8\Big(-\frac{3}{2}\Big)^{n+3}\Big] && (27)
\end{aligned}$$

Η συνέλιξη $x[n] * y[n]$ βγάζει πιο εύκολα το σωστό αποτέλεσμα, αλλά δείτε ότι το ίδιο αποτέλεσμα παίρνετε και - αρκετά πιο δύσκολα - με την παραπάνω ακολουθία πράξεων.

Άσκηση 5.
Η ομογενής εξίσωση είναι

$$y[n] + \frac{3}{8}y[n-1] + \frac{1}{32}y[n-2] = 0 \tag{28}$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\gamma^2 + \frac{3}{8}\gamma + \frac{1}{32} = 0 \tag{29}$$

με χαρακτηριστικές ρίζες τις

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4} \ , \ \gamma_2 = -\frac{1}{8} \tag{30}$$

Η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι

$$y_{zi}[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n, \ \ n \geq 0 = c_1(-1/4)^n + c_2(-1/8)^n, \ \ n \geq 0 \tag{31}$$

Ισχύει

$$y_{zi}[-1] = -4c_1 - 8c_2 = 0 \tag{32}$$

και

$$y_{zi}[-2] = 16c_1 + 64c_2 = 16 \tag{33}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $c_1 = -1$, $c_2 = \frac{1}{2}$. ’ρα

$$y_{zi}[n] = \Big[-\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{8}\Big)^n\Big]u[n] \tag{34}$$

Για την κρουστική απόκριση, θεωρούμε το σύστημα

$$y[n] + \frac{3}{8}y[n-1] + \frac{1}{32}y[n-2] = x[n] \tag{35}$$

Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$ και τότε

$$h_o[n] + \frac{3}{8}h_o[n-1] + \frac{1}{32}h_o[n-2] = \delta[n] \tag{36}$$

Άρα η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_o[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n, \ \ n \geq 0 = c_1(-1/4)^n + c_2(-1/8)^n, \ \ n \geq 0 \tag{37}$$

αφού το σύστημα έχει την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση και ρίζες με πριν. Ισχύει

$$h_o[0] + \frac{3}{8}h_o[-1] + \frac{1}{32}h_o[-2] = \delta[0] = 1 \Longleftrightarrow h_o[0] = 1 \tag{38}$$

και

$$h_o[1] + \frac{3}{8}h[0] + \frac{1}{32}h_o[-1] = 0 \Longleftrightarrow h_o[1] = -\frac{3}{8} \tag{39}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ και έτσι

$$h_o[n] = \Big[2\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n - \Big(-\frac{1}{8}\Big)^n\Big]u[n] \tag{40}$$

Για το αρχικό σύστημα, η κρουστική του απόκριση θα είναι

$$h[n] = \frac{1}{2}h_o[n-1] = \Big[\Big(-\frac{1}{4}\Big)^{n-1} - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{8}\Big)^{n-1}\Big]u[n-1] \tag{41}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι απολύτως μικρότερες της μονάδας.