Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

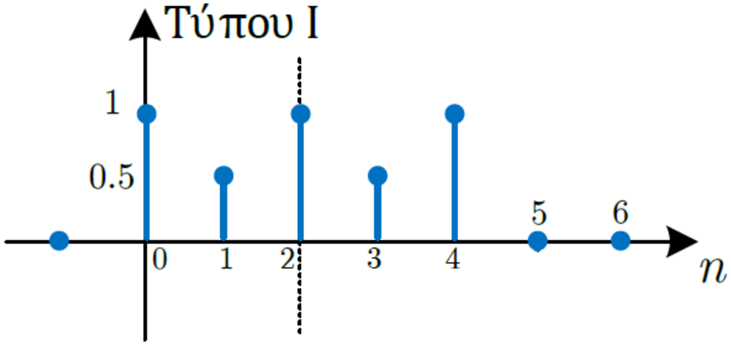
ΔΙΑΛΕΞΗ 18Η

- Συστήματα Γραμμικής Φάσης

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης**
- Ξέρουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να προκαλέσει σημαντική διαταραχή στη χρονική δομή ενός σήματος που δέχεται στην είσοδό του αν η απόκριση φάσης του δεν είναι σταθερή ή γραμμική
- Συστήματα **γραμμικής** φάσης είναι πολύ επιθυμητά και χρήσιμα στην πράξη
  - Καθυστερούν όλες τις συνιστώσες εισόδου το ίδιο στην έξοδο
  - Δε διαταράσσουν τη χρονική δομή του σήματος εισόδου
- Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση αν $H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{-j(a\omega+\beta)}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$
- Θα μας απασχολήσουν μόνο **FIR αιτιατά συστήματα γραμμικής φάσης**
  - ...τα οποία είναι υποχρεωτικά ευσταθή, ως FIR ☺
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι τέτοια συστήματα ικανοποιούν κάποιες συμμετρίες στην κρουστική τους απόκριση
- Υπάρχουν 4 **κατηγορίες** ΓΧΑ FIR συστημάτων γραμμικής φάσης
  - ...ανάλογα με το είδος της συμμετρίας της κρουστικής τους απόκρισης
- **Κατηγορίες : «Τύποι»: I, II, III, IV**

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**
- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου Ι έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ άρτιο}$$



- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$
- Απόκριση Συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$\boxed{k := M - n}$$

$$= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{k=0}^{(M-2)/2} h[M-k]e^{-j\omega(M-k)} + h\left[\frac{M}{2}\right]e^{-\frac{j\omega M}{2}}$$

$$\boxed{h[M-k] = h[k]}$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\frac{M-2}{2}} h[n]e^{j\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)} + \sum_{k=0}^{\frac{M-2}{2}} h[k]e^{-j\omega\left(\frac{M}{2}-k\right)} + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

$$\boxed{n := \frac{M}{2} - k}$$

$$= e^{-\frac{j\omega M}{2}}\left(\sum_{n=1}^{M/2} 2h\left[\frac{M}{2}-n\right]\cos(\omega n) + h\left[\frac{M}{2}\right]\right)$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου Ι**

- Οπότε συνολικά

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I**

- Παράδειγμα:

  - Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας για το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = [1, 2, 3, 2, 1]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] \cdot e^{-j\omega n} = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + 1e^{-j4\omega}$$

$$= h[0] + h[1]e^{-j1\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} + h[4]e^{-j4\omega} =$$

$$= h[0]\left(1 + e^{-j4\omega}\right) + h[1]\left(e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}\right) + h[2]e^{-j2\omega}$$

$$= h[0] \cdot e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) + h[1]e^{-j2\omega}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) + h[2] \cdot e^{-j2\omega} =$$

$$= e^{-j2\omega}\underbrace{\left(2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos(\omega) + h[2]\right)}_{A(\omega)}$$

$$= e^{-j2\omega}A(\omega)$$

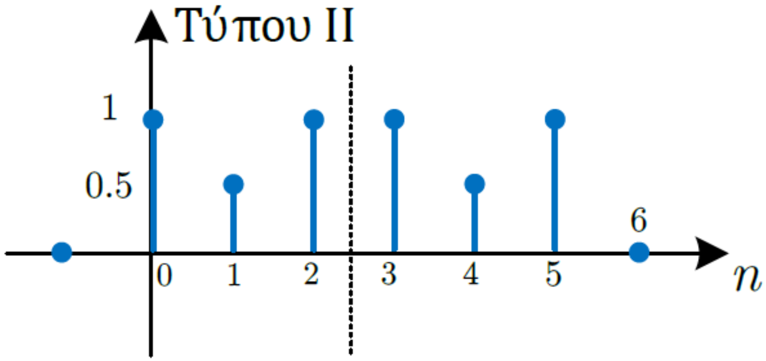
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου ΙΙ**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου ΙΙ έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$

- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι



$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

με

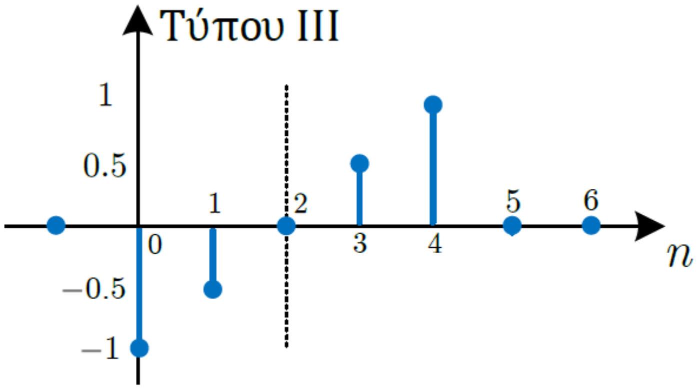
$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου ΙΙΙ**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου ΙΙΙ έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \le n \le M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ άρτιο}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z}$



- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$$

με

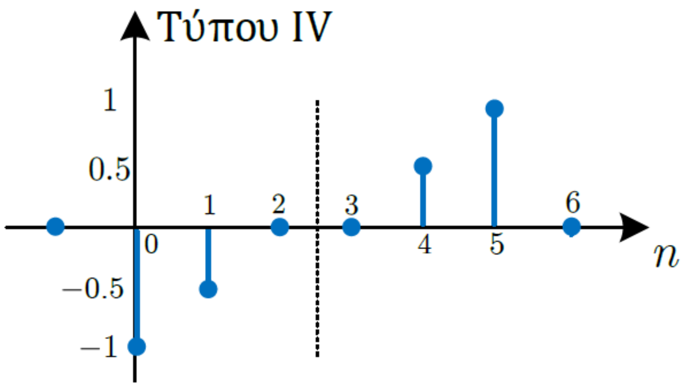
$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV**

- Ένα σύστημα γραμμικής φάσης Τύπου IV έχει αντι-συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = -h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M, \quad \boldsymbol{M} \textbf{ περιττό}$$

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο $a = \frac{M}{2} \notin \mathbb{Z}$



- Απόκριση Συχνότητας
  - Όμοια με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

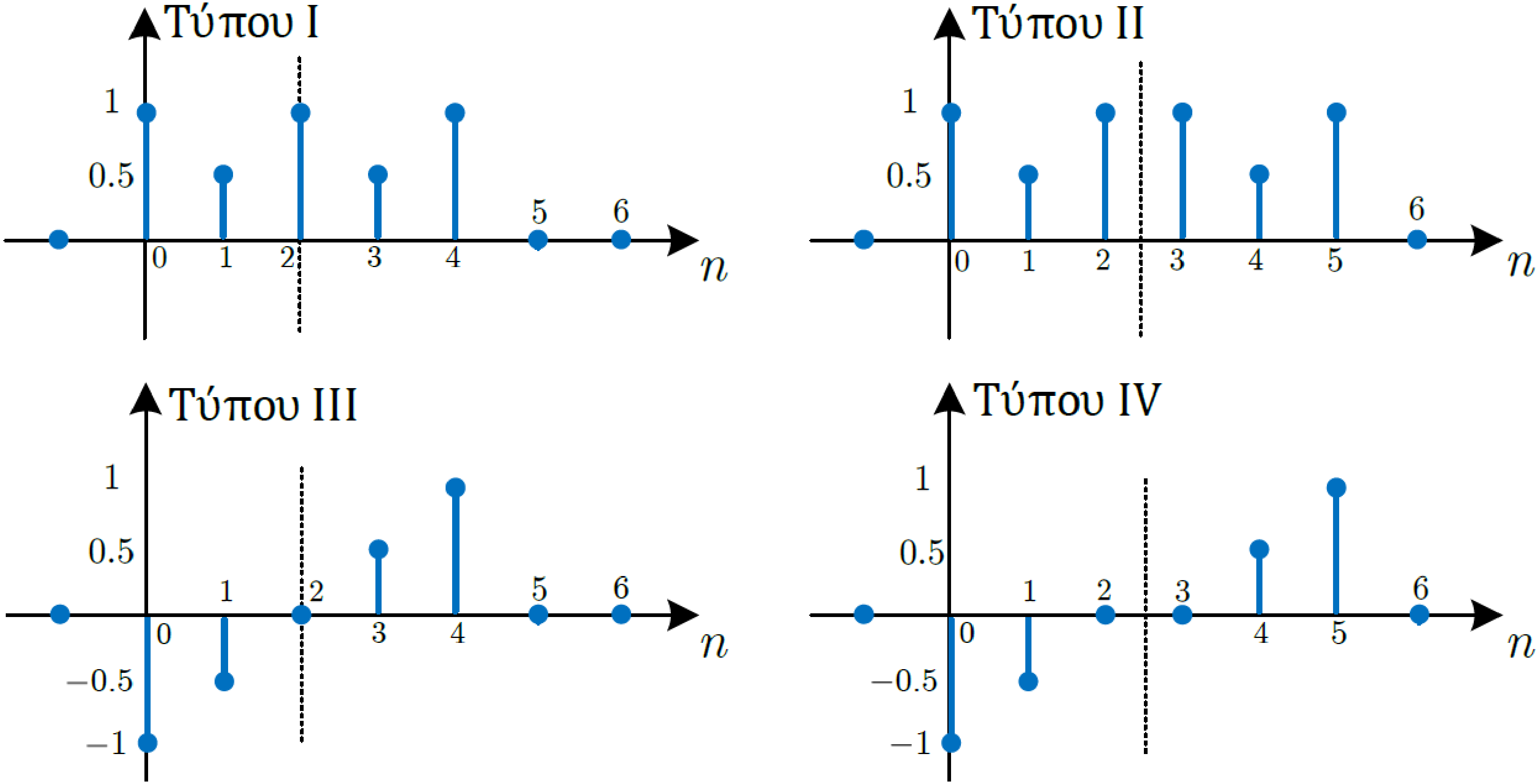
με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M
$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_k \cos(k\omega)$ με $a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$ $a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right]$	$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j\omega M}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$ με $b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$
Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M	**Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M**
$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} c_k \sin(k\omega)$ με $c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M}{2}$	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega M}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right)$ με $d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{M+1}{2}$

• Συστήματα Γραμμικής Φάσης - Σύνοψη



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη**
- Συνολικά, η απόκριση συχνότητας των συστημάτων που είδαμε γράφεται

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{j\varphi(\omega)} \sum p_k S(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} A\left(e^{j\omega}\right)$$

- Το $A\left(e^{j\omega}\right)$ είναι πραγματική συνάρτηση του ω και ονομάζεται «ψευδοπλάτος»
  - Ως πραγματική συνάρτηση, η φάση της θα είναι 0 ή $\pm\pi$
- Για $0 \leq \omega \leq \pi$, η απόκριση φάσης $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ γράφεται

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2}, & \text{τύπου I, II}, \quad A\left(e^{j\omega}\right) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \pi, & \text{τύπου I, II}, \quad A\left(e^{j\omega}\right) < 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2}, & \text{τύπου III, IV}, \quad A\left(e^{j\omega}\right) > 0 \\ -\dfrac{\omega \mathrm{M}}{2} + \dfrac{\pi}{2} + \pi, & \text{τύπου III, IV}, \quad A\left(e^{j\omega}\right) < 0 \end{cases}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Οι προηγούμενες σχέσεις δε μας δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση για τη συμπεριφορά των συστημάτων γραμμικής φάσης στο χώρο της συχνότητας

- Θα πρέπει να περάσουμε στο χώρο του Ζ για να λάβουμε αυτήν την πληροφορία

- Προφανώς, για αιτιατά ΓΧΑ συστήματα γραμμικής φάσης, όλοι οι πόλοι θα βρίσκονται στο $z = 0$
  - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**
- Τύπου I, II: $h[n] = h[M-n] \leftrightarrow H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$
- Τύπου III, IV: $h[n] = -h[M-n] \leftrightarrow H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$

- Μας ενδιαφέρουν μόνο τα μηδενικά των συστημάτων, όπως είπαμε

- Παρατηρήστε ότι:

❑ Αν $z = z_0$ ένα μηδενικό του συστήματος $H(z)$, τότε υποχρεωτικά και το $z = \frac{1}{z_0}$ είναι μηδενικό του συστήματος

❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0}\right)$ λέγεται αμοιβαίο

❑ Το ζεύγος $\left(z_0, \frac{1}{z_0^*}\right)$ λέγεται συζυγές αμοιβαίο (όπως ξέρετε)

- Αν θέλουμε λοιπόν να σχεδιάσουμε ένα FIR γραμμικής φάσης με ένα μηδενικό στη θέση $z = z_0$, πρέπει **υποχρεωτικά** να βάλουμε κι ένα μηδενικό στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$!!!

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Άρα, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση:

  - Το $H(z)$ μπορεί να έχει μηδενικά:
    - συζυγή, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο: $z_k = e^{\pm j\theta_k}$
    - αμοιβαία, στον πραγματικό άξονα: $z_k = a, z_k = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$
    - αμοιβαία, αλλού: $z_k = r_k e^{j\theta_k}, r_k \neq 1$ και $z_k = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$

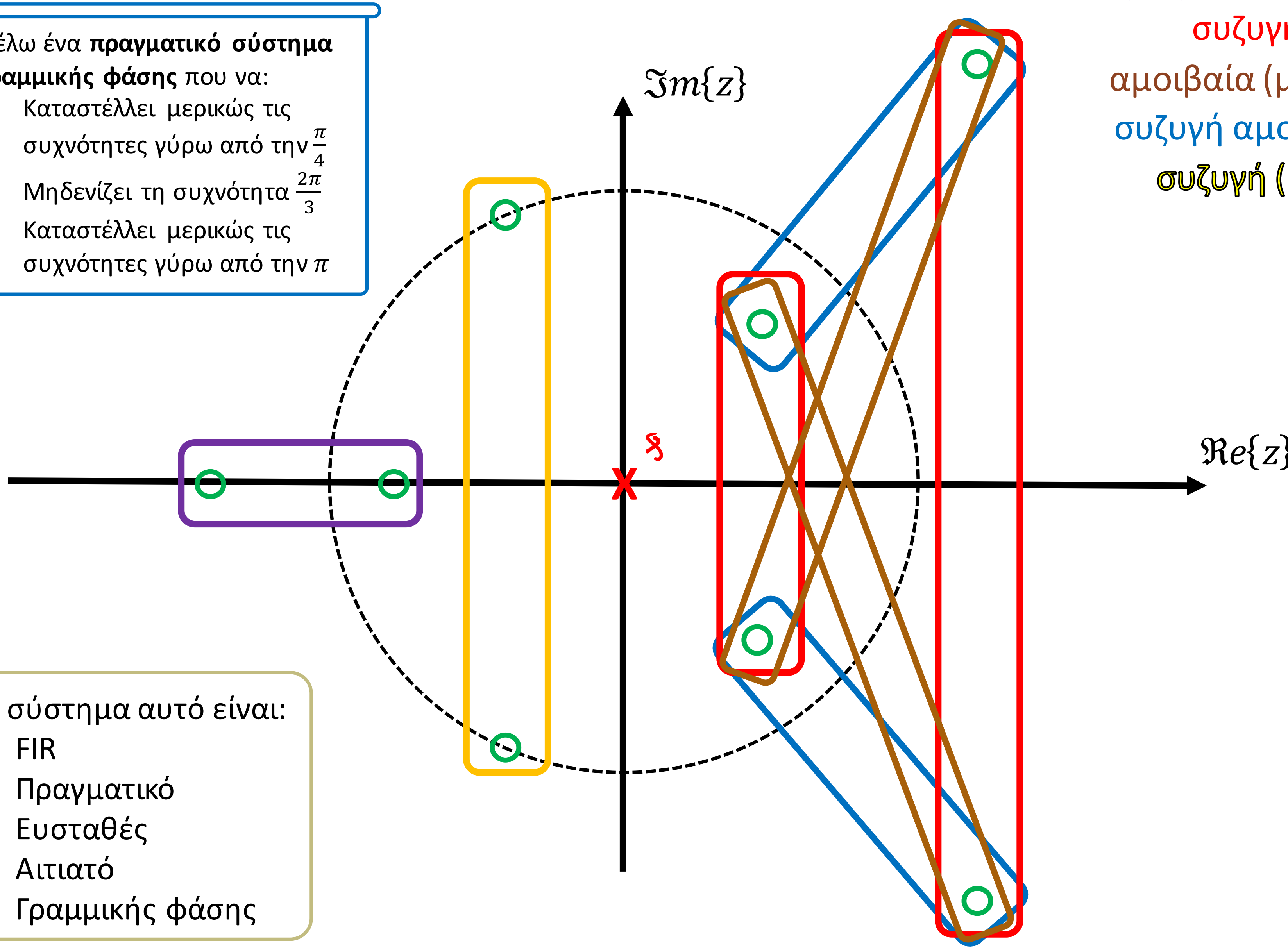
  - Αν επιπλέον το $H(z)$ αντιστοιχεί σε πραγματικό σύστημα ($h[n] \in \mathbb{R}$), τότε το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μιγαδικών μηδενικών (αφού κάθε μιγαδικό μηδενικό θα «φέρνει» μαζί και το συζυγές του, εκτός από το αμοιβαίο του)

$$\left(z_k = r_k e^{\pm j\theta_k}, z_k = \frac{1}{r_k} e^{\mp j\theta_k} \right)$$

Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z

Θέλω ένα **πραγματικό σύστημα γραμμικής φάσης** που να:

- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την $\frac{\pi}{4}$
- Μηδενίζει τη συχνότητα $\frac{2\pi}{3}$
- Καταστέλλει μερικώς τις συχνότητες γύρω από την π

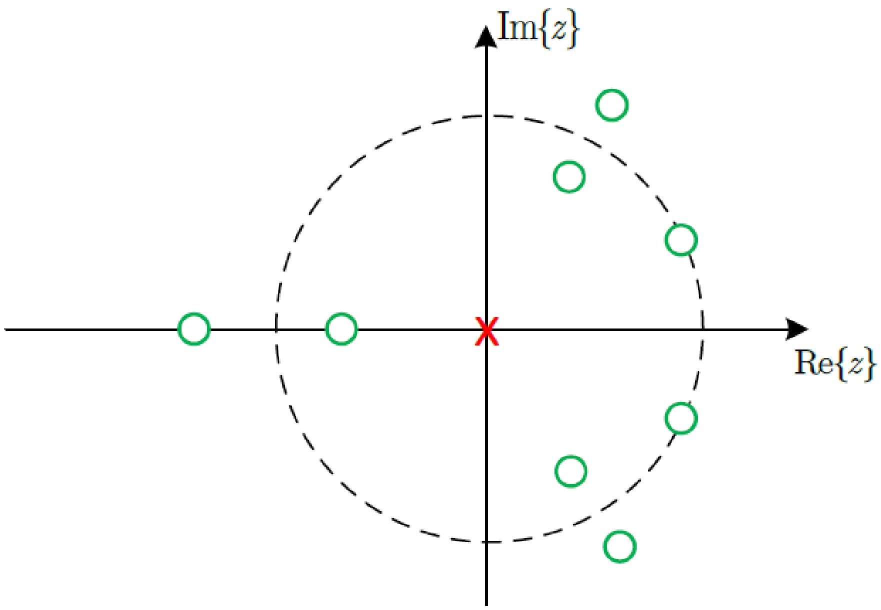


αμοιβαία (πραγμ.)
συζυγή
αμοιβαία (μιγαδ.)
συζυγή αμοιβαία
συζυγή (uc)

Το σύστημα αυτό είναι:

- FIR
- Πραγματικό
- Ευσταθές
- Αιτιατό
- Γραμμικής φάσης

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$
- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$: ταυτότητα
- Τύπου I : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

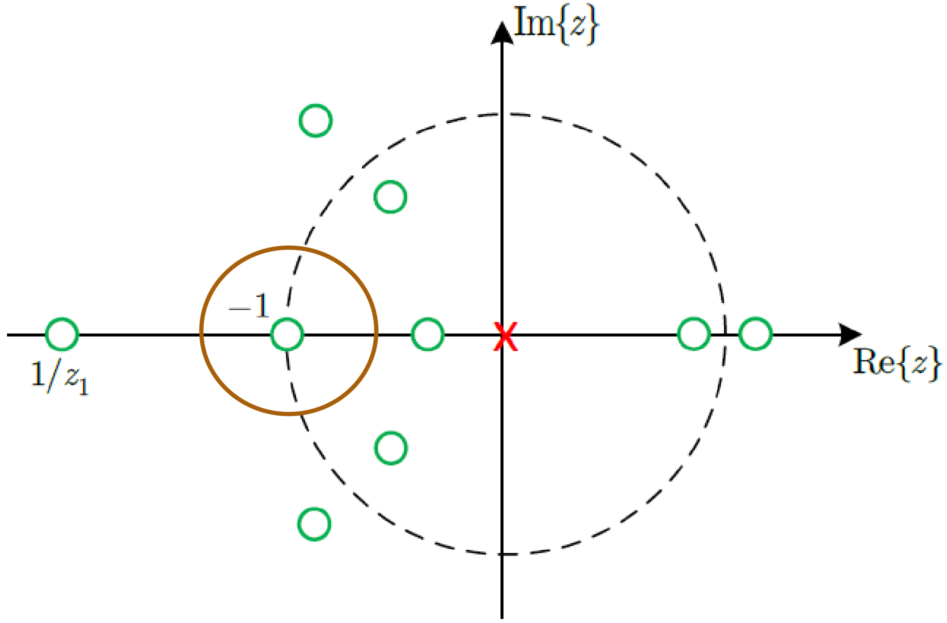
- Θα επιμείνουμε λίγο περισσότερο στις θέσεις $z = \pm 1$

- Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = 1$: ταυτότητα

- Τύπου II : $H(z) = H(z^{-1})z^{-M}$, M περιττό, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{II}(e^{j\pi}) = 0$!



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

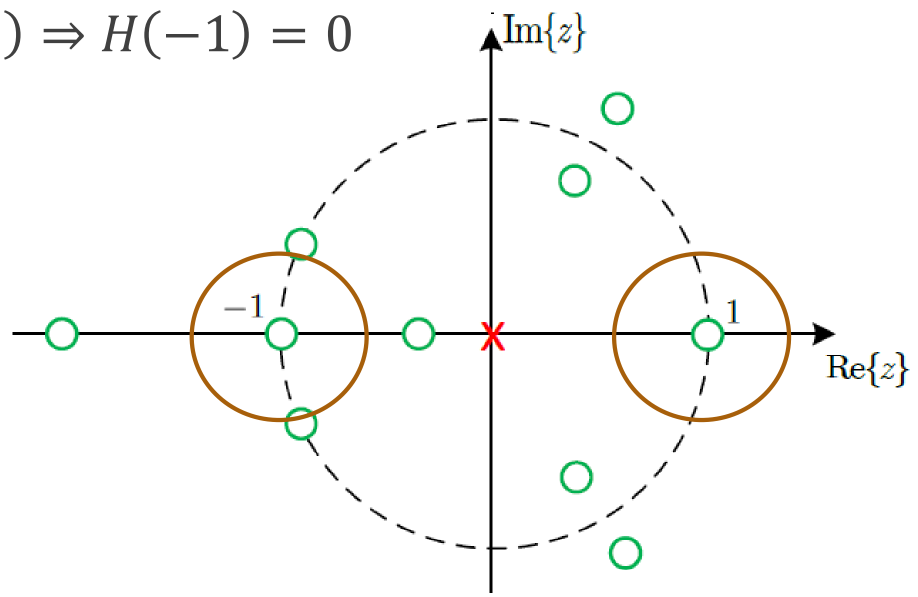
$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{III}\left(e^{j0}\right) = 0$!

- Τύπου III : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$:

$$H(-1) = -H(-1) \Rightarrow H(-1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = \pi \Rightarrow H_{III}\left(e^{j\pi}\right) = 0$!



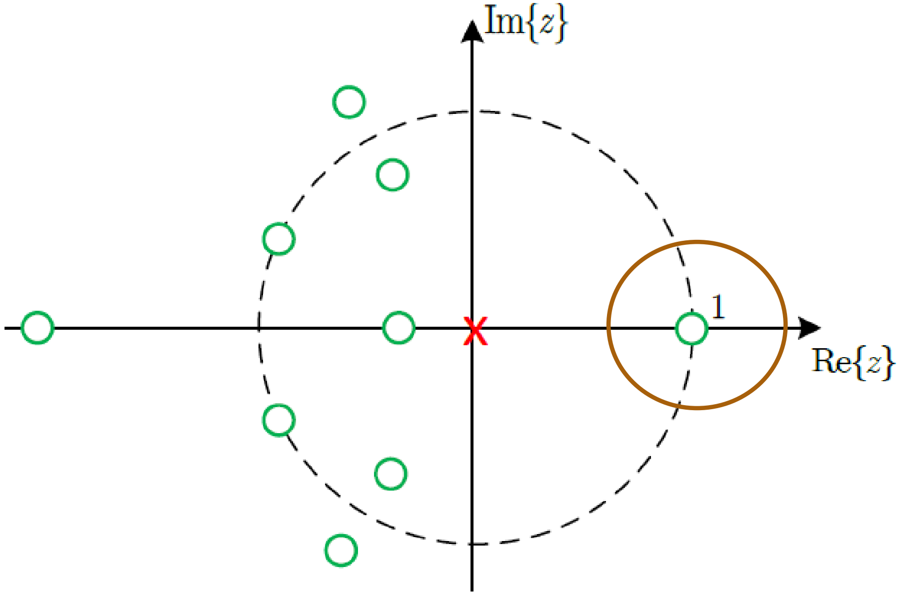
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = 1$:

$$H(1) = -H(1) \Rightarrow H(1) = 0$$

❑ Άρα για $\omega = 0 \Rightarrow H_{IV}\left(e^{j0}\right) = 0$!

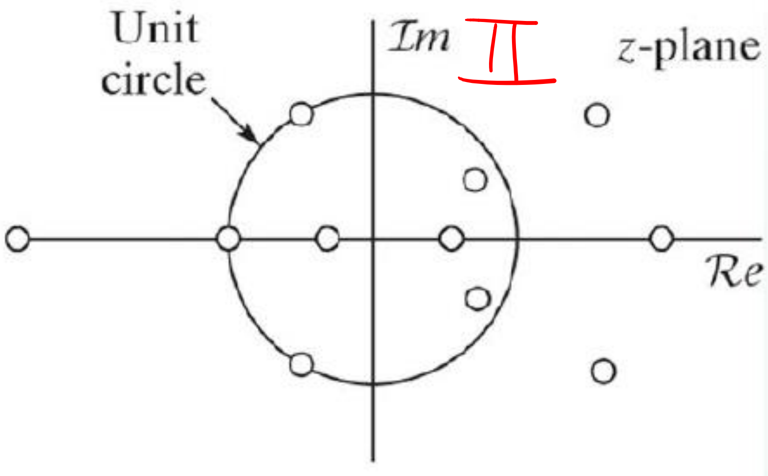
- Τύπου IV : $H(z) = -H(z^{-1})z^{-M}$, M άρτιο, για $z = -1$: ταυτότητα



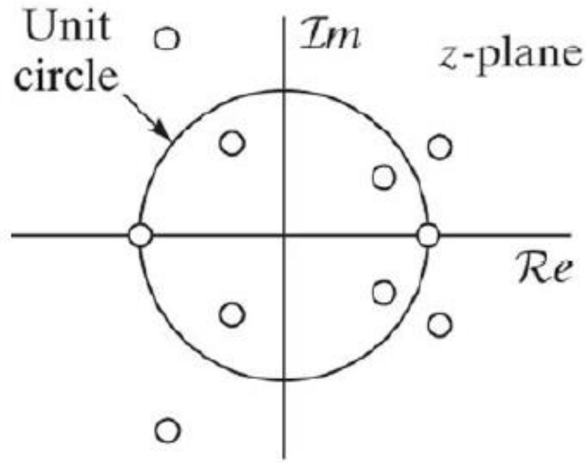
• Συστήματα Γραμμικής Φάσης – Σύνοψη

Τύπου I – συμμετρική h[n] – άρτιο M	Τύπου II – συμμετρική h[n] – περιττό M
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}\left(e^{j\pi}\right) = 0$
Τύπου III – αντισυμμετρική h[n] – άρτιο M	**Τύπου IV – αντισυμμετρική h[n] – περιττό M**
$H_{III}\left(e^{j0}\right) = 0, H_{III}\left(e^{j\pi}\right) = 0$	$H_{IV}\left(e^{j0}\right) = 0$

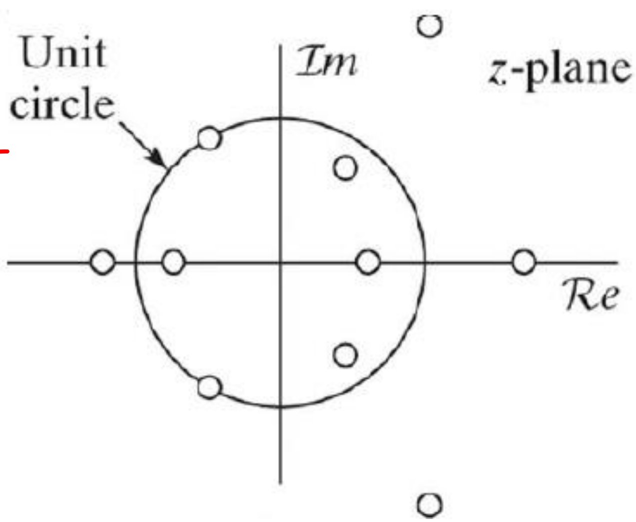
- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

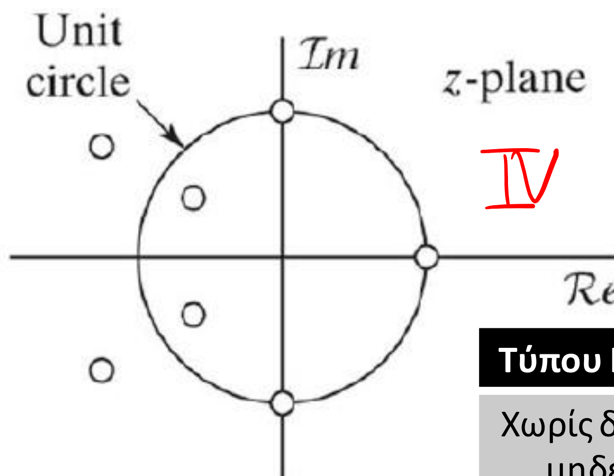


III



I

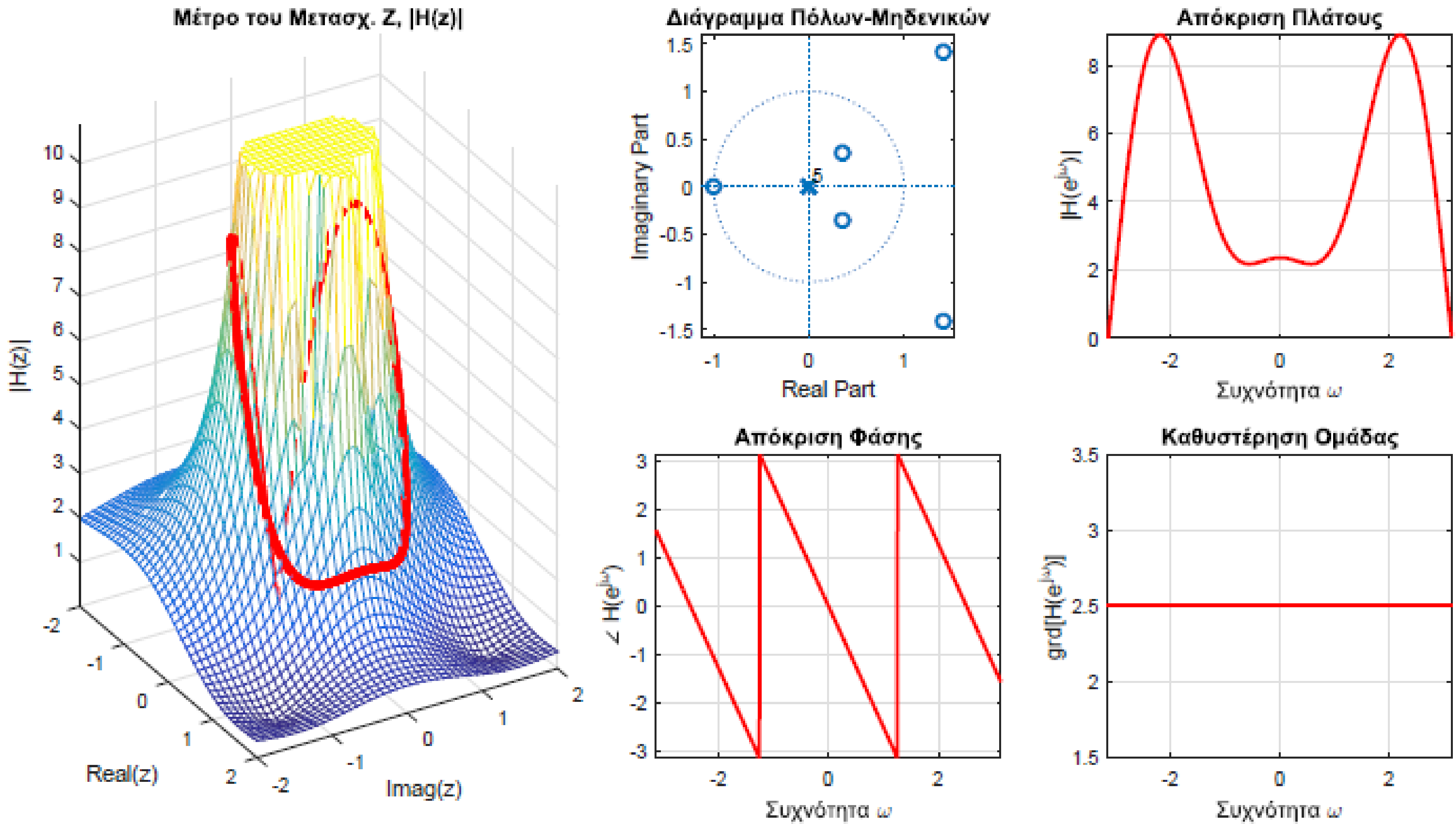




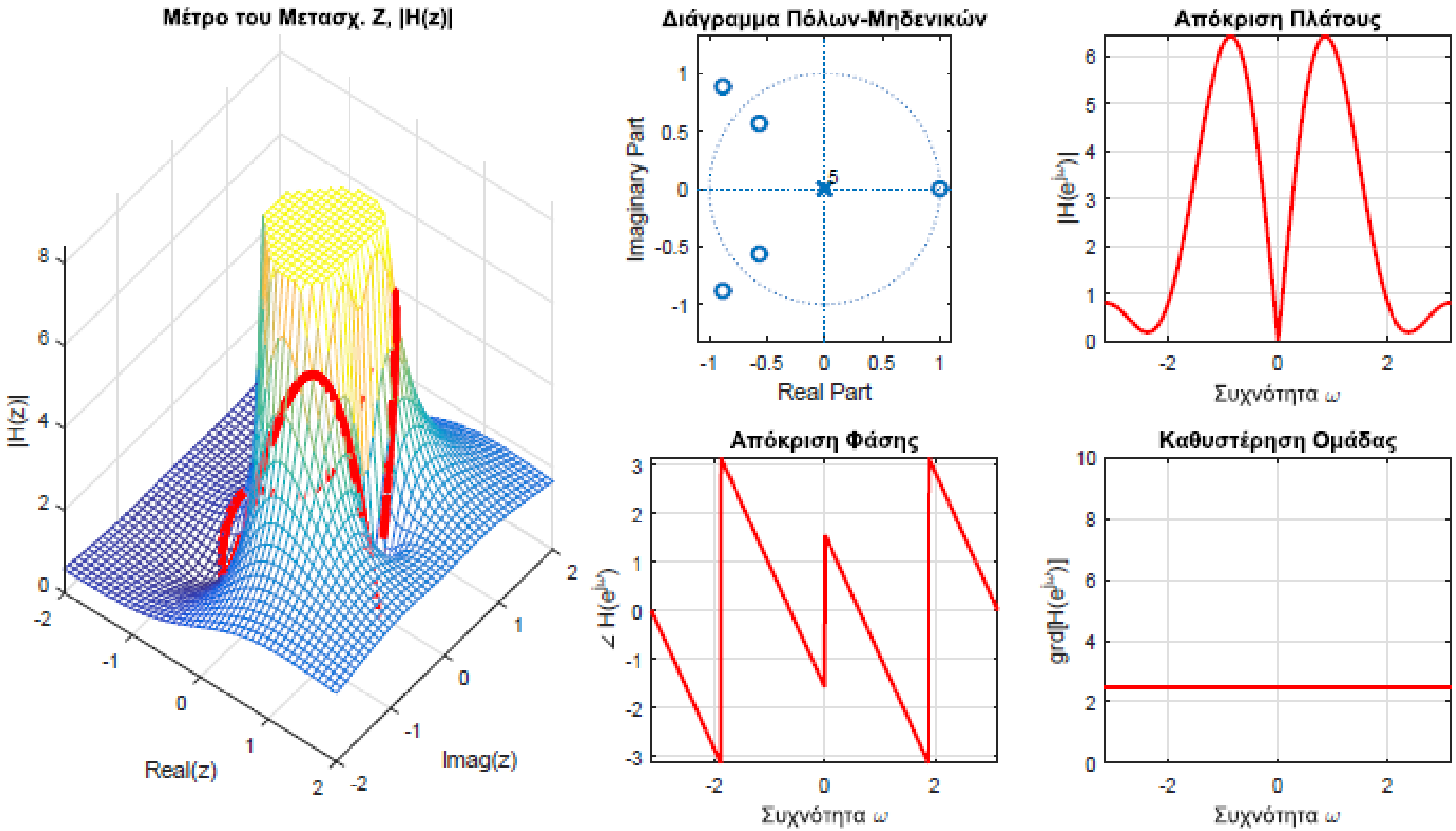
Τύπου I	Τύπου II
Χωρίς δέσμευση μηδενικών	$H_{II}(e^{j\pi}) = 0$
Τύπου III	**Τύπου IV**
$H_{III}(e^{j0}) = 0$, $H_{III}(e^{j\pi}) = 0$	$H_{IV}(e^{j0}) = 0$

- Αναγνωρίζετε τους τύπους των συστημάτων γραμμικής φάσης;

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**



- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Ζ**

- Ένα FIR σύστημα γραμμικής φάσης μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων:

○ ενός όρου ελάχιστης φάσης

$$H_{min}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \quad , \qquad |c_k| < 1$$

○ ενός όρου μέγιστης φάσης

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_i}{2}} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*)$$

○ ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$$H_{uc}(z) = \prod_{k=1}^{\frac{M_o}{2}} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z) H_{uc}(z) H_{max}(z)$$

με

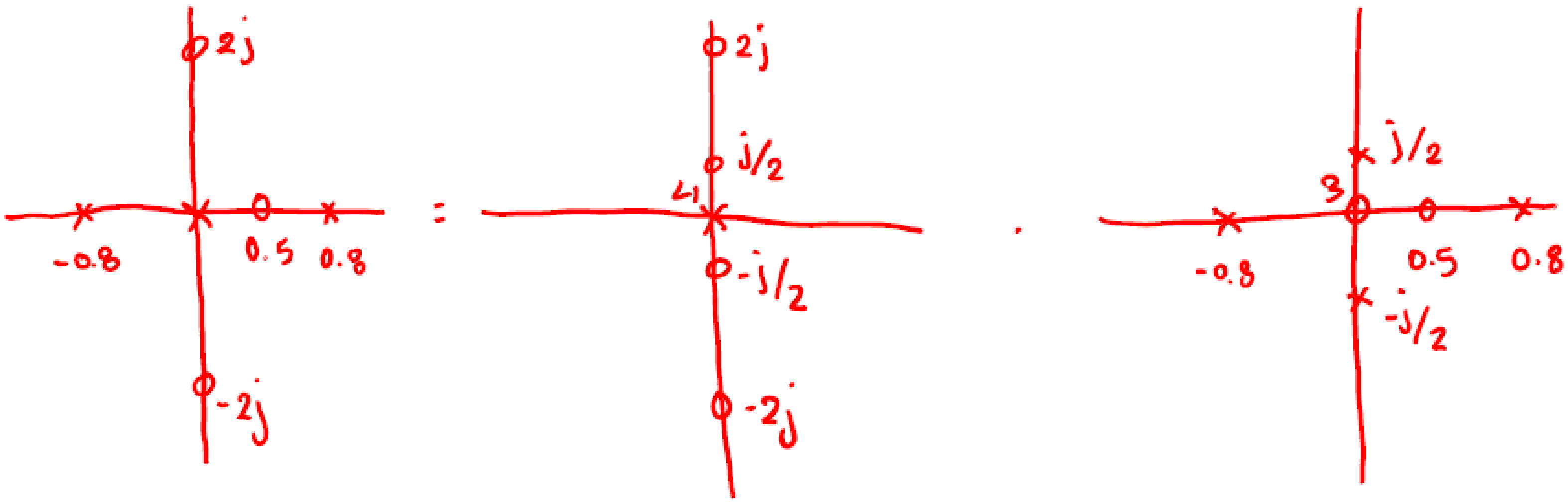
$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1}) z^{-M_i}$$

- **Συστήματα Γραμμικής Φάσης στο χώρο του Z**

- Παράδειγμα:
  - Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \qquad |z| > 0.8$$

Γράψτε το σε μορφή $H(z) = H_{min}(z)H_{linear}(z)$



$H(z)$

$H_{linear}(z) =$

$= (1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})(1-\frac{j}{2}z^{-1})$

$$H_{min}(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})} \cdot \frac{}{(1+\frac{j}{2}z^{-1})(1-\frac{j}{2}z^{-1})}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ