Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Ζ

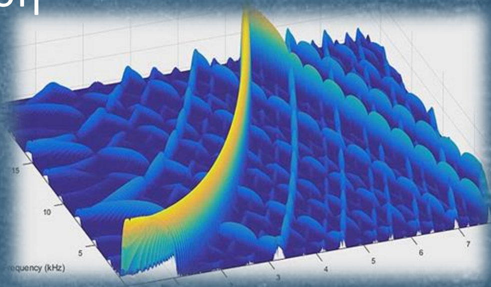
Τι περιέχει το HY370?

1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier

2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- Ο Μετασχ. Ζ είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αναπαράστασης σημάτων

- Η εμπειρία σας ως τώρα ίσως σας έχει αποκαλύψει τη χρήση του για ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων…
  - …μέσω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο → γινόμενο στο χώρο του Ζ

- Ας «πλεύσουμε» στο χώρο των συστημάτων με τον ίδιο τρόπο που κάναμε και στο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ξεκινάμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης και ιδιοτιμής!
  - Μπορούμε να δείξουμε εύκολα (do it! ☺) ότι το σήμα $x[n] = Az^n$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Η ιδιοτιμή του δίνεται από την εξίσωση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

η οποία βλέπετε ότι αποτελεί το Μετασχ. Ζ της κρουστικής απόκρισης του ΓΧΑ συστήματος

- Ο μετασχ. Ζ της κρουστικής απόκρισης

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

δε θα μπορούσε να μην έχει κι αυτός το δικό του όνομα: **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)**

- Η «έκδοση» του μετασχ. Ζ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα**, όπως ήδη γνωρίζετε

- Θα θυμάστε ίσως ότι τα ΓΧΑ συστήματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:
  - **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)**
  - **Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)**

- **FIR συστήματα**
- Περιγράφονται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k], \qquad N_1, N_2 > 0$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k}$$

- Βλέπετε ότι αποτελείται από θετικές και αρνητικές δυνάμεις του z
- Μπορούμε να το γράψουμε ως

$$H(z) = \frac{1}{z^{N_2}} \sum_{k=0}^{N_1+N_2} b_{k-N_1} z^{N_1+N_2-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρήστε ότι έχει N_2 πόλους στο $z = 0$ και N_1 πόλους στο άπειρο
  - ROC: $\{0 < |z| < \infty\}$
- Επίσης έχει $N_1 + N_2$ μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

- **FIR συστήματα**

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Αν $N_1 = 0$, τότε έχουμε ένα αιτιατό FIR σύστημα $\rightsquigarrow$ $h[n] = 0,\ n < 0$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_2 πόλους στο $z = 0$
  - ROC: $\{|z| > 0\}$
- Επίσης έχει N_2 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο
- Αν $N_2 = 0$, τότε έχουμε ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{0} b_k z^{-k} = b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} (z - c_k) = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_1 πόλους στο $z = \infty$
  - ROC: $\{|z| < \infty\}$
- Επίσης έχει N_1 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

- **FIR συστήματα**

- **Συμπεράσματα**

  - Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$

  - Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$

  - Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$

- **IIR συστήματα**
- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι

- Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$

- Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$

- Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

  - Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Ζ σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}$$

  - Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι $y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$

$$\updownarrow Z$$

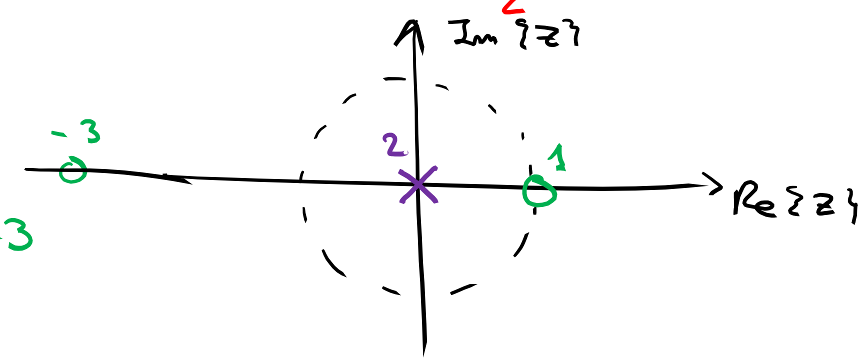
$$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z) = X(z)(1+2z^{-1}-3z^{-2})$$

Άρα $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1+2z^{-1}-3z^{-2} \rightsquigarrow$ FIR $\left(h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]\right)$

με $|z|>0$. Επίσης, $H(z) = z^{-2}(z^2+2z-3) = \frac{z^2+2z-3}{z^2}$

Πόλοι: $z^2 = 0 \rightarrow z=0, \; z=0$

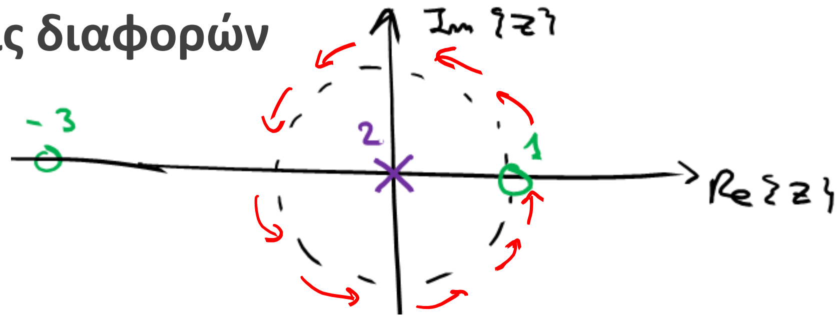
Μηδενικά: $z^2+2z-3=0 \rightarrow z=1, \; z=-3$

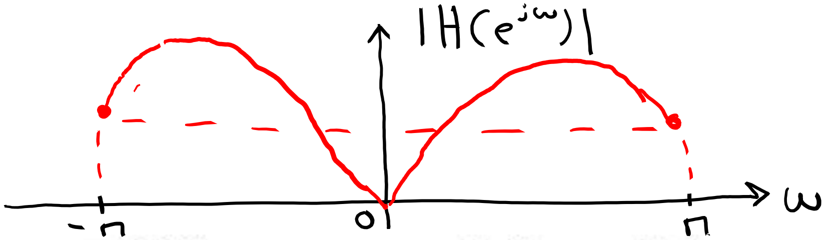


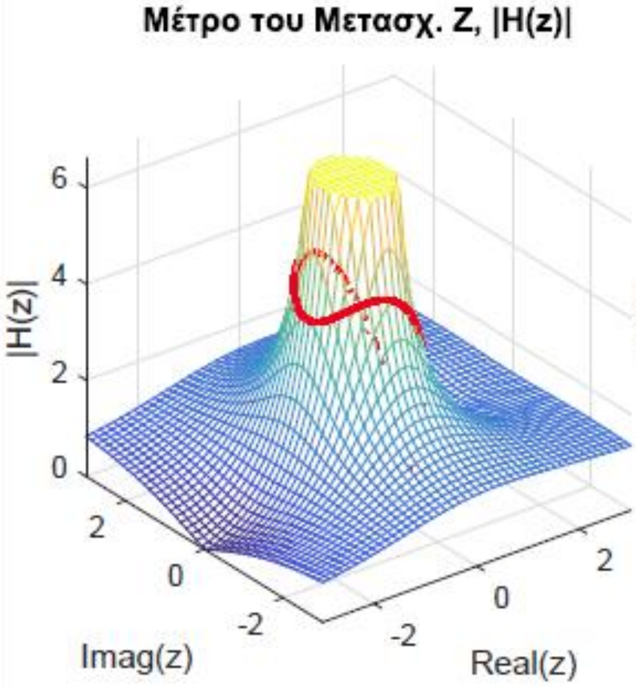
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

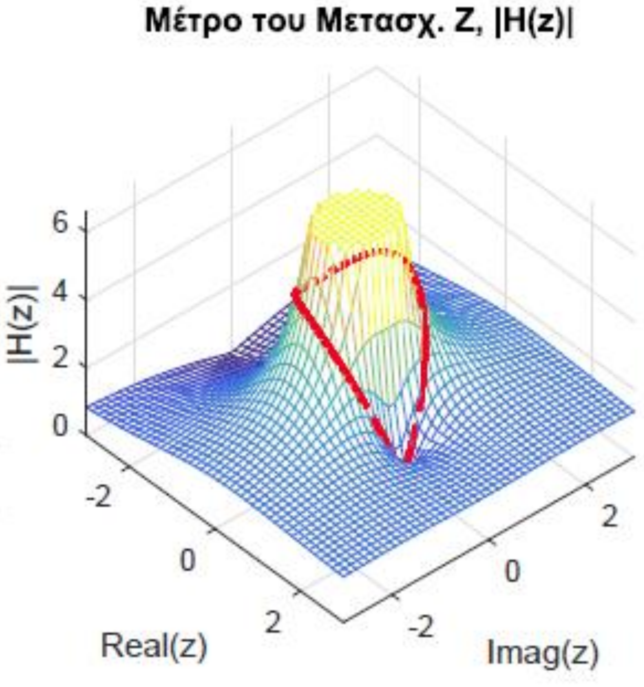
Τέλος, $|H(e^{j\omega})| = |H(z)|\big|_{z=e^{j\omega}} =$

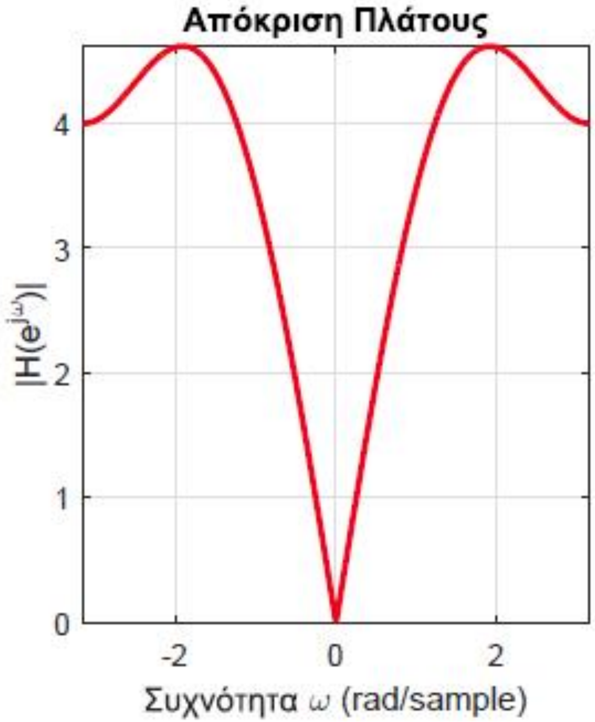
$= 1 + 2e^{-j\omega} - 3e^{-j2\omega}$











- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι $y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$

$$\Big\updownarrow Z$$

$$Y(z) = X(z)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}\right)$$

$|z|>0$

Άρα $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \rightarrow$ FIR

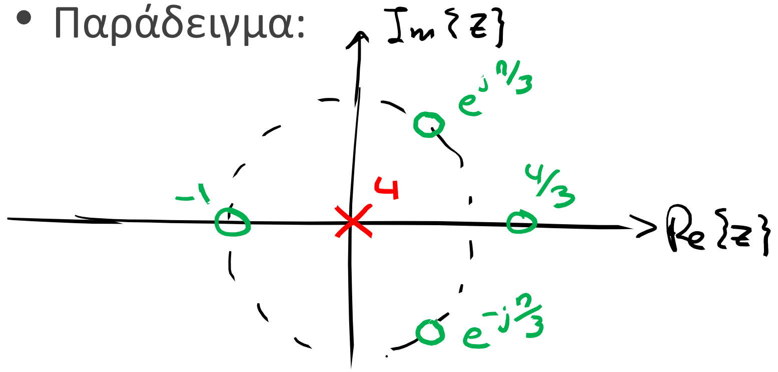
Επίσης, $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4]$

Γράφουμε $H(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4} = Q(z)$

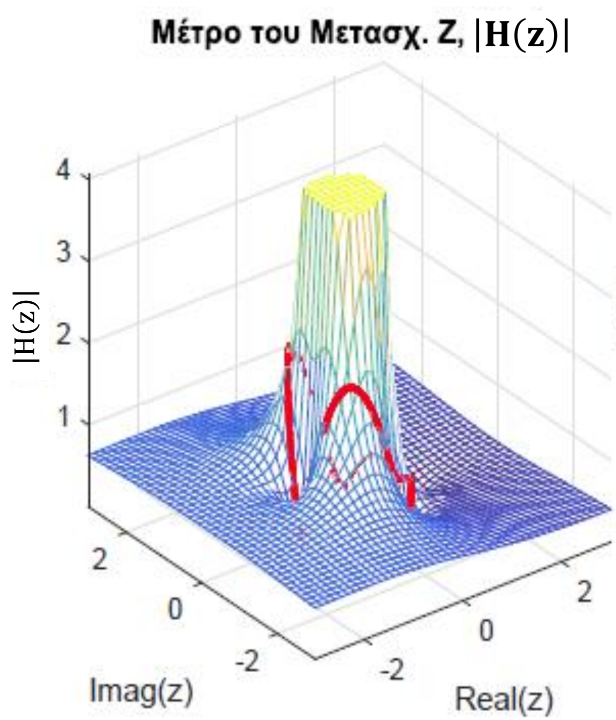
Πόλοι: $z^4 = 0 \Leftrightarrow 4$ πόλοι στο $z = 0$

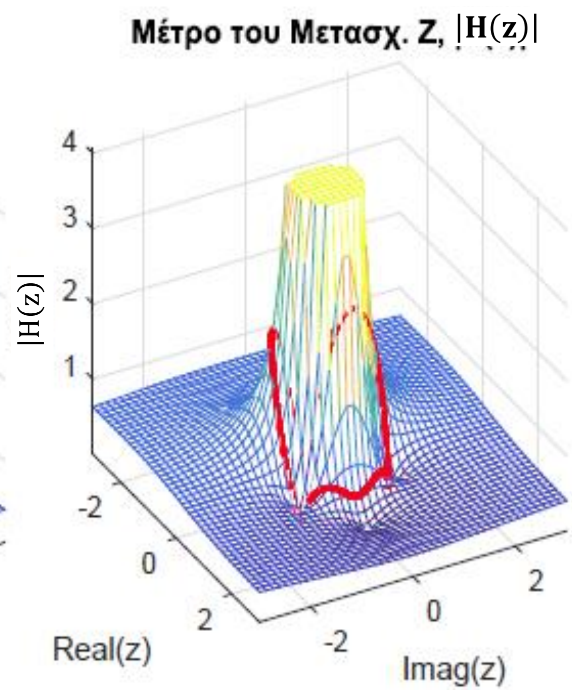
Μηδενικά: $Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = -1,\ z = \frac{4}{3},\ z = e^{j\frac{\pi}{3}},\ z = e^{-j\frac{\pi}{3}}$

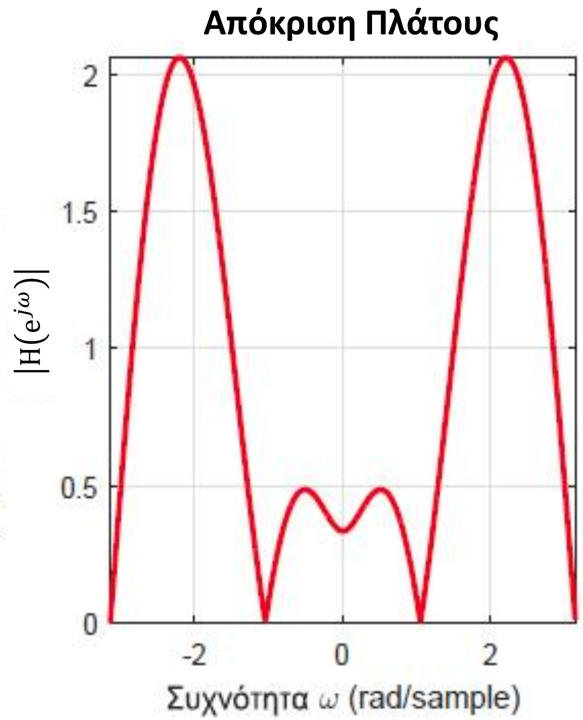
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:



$$|H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j3\omega} - \frac{2}{3}e^{-j4\omega}$$







- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το <u>μη-αιτιατό</u> ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

Είναι $y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$

$$\Big\updownarrow Z$$

$$Y(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1})$$

Άρα $\dfrac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{1+2z^{-1}-3z^{-2}} = \dfrac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$

IIR, μη αιτιατό!

$\Downarrow$

$1 < |z| < 3$

Επίσης, $H(z) = \dfrac{A}{1+3z^{-1}} + \dfrac{B}{1-z^{-1}}$

$A = H(z)(1+3z^{-1})\Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \dfrac{5}{4}$

$B = H(z)(1-z^{-1})\Big|_{z^{-1}=1} = -\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow H(z) = \dfrac{5}{4}\dfrac{1}{1+3z^{-1}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

- $|z| > 3$
- $\boxed{|z| < 3}$

- $\boxed{|z| > 1}$
- $|z| < 1$

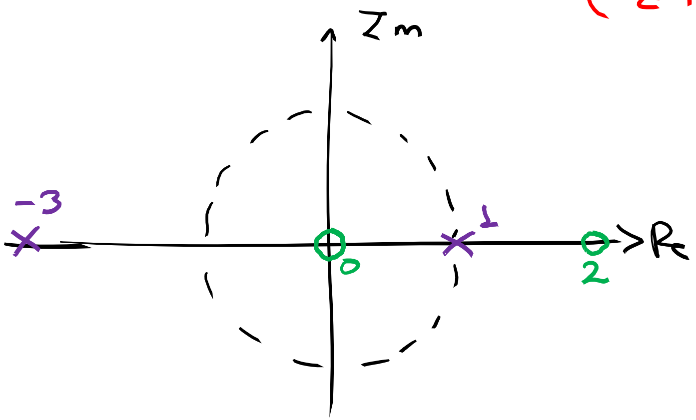
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

Οπότε $h[n] = -\frac{5}{4}(-3)^n u[-n-1] - \frac{1}{4}(1)^n u[n]$

$= -\frac{5}{4}(-3)^n u[-n-1] - \frac{1}{4} u[n]$

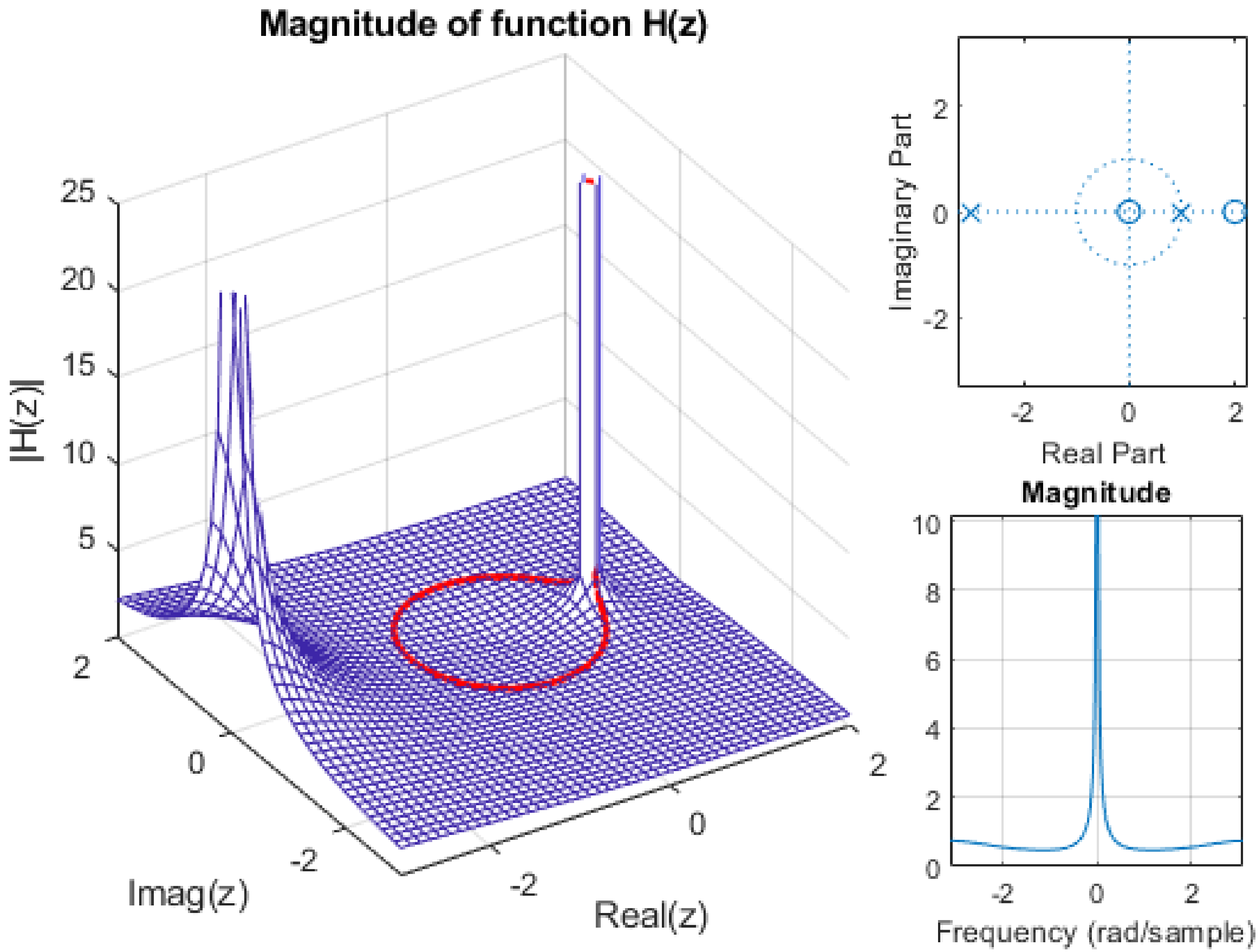
Επίσης, $H(z) = \frac{z(z-2)}{(z+3)(z-1)} \longrightarrow$ Μηδενικά: $z=0,\ z=2$

Πόλοι: $z=-3,\ z=1$



$$H(e^{j\omega}) = +\frac{5}{4}\frac{1}{1+3e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega)\right)$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ