

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 10<sup>H</sup>

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

# Τι περιέχει το ΗΥ370?

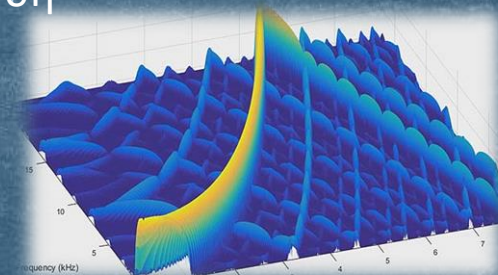
## 1<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier

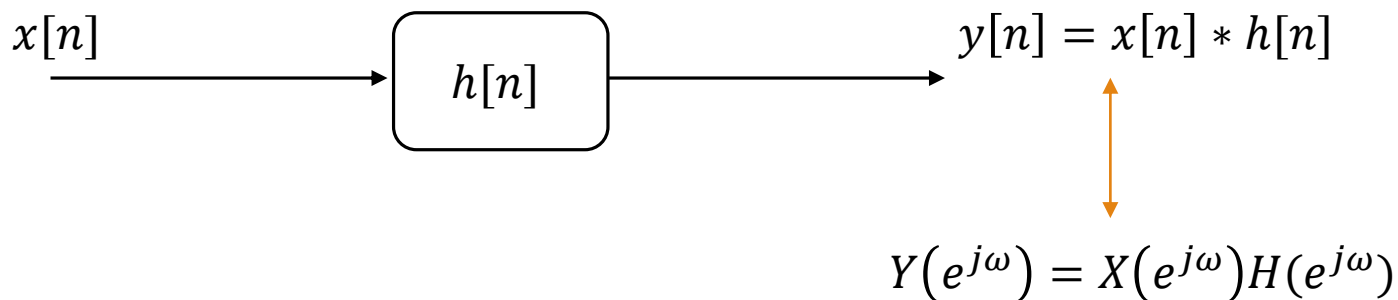


## 2<sup>ο</sup> Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας (επανάληψη...)



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

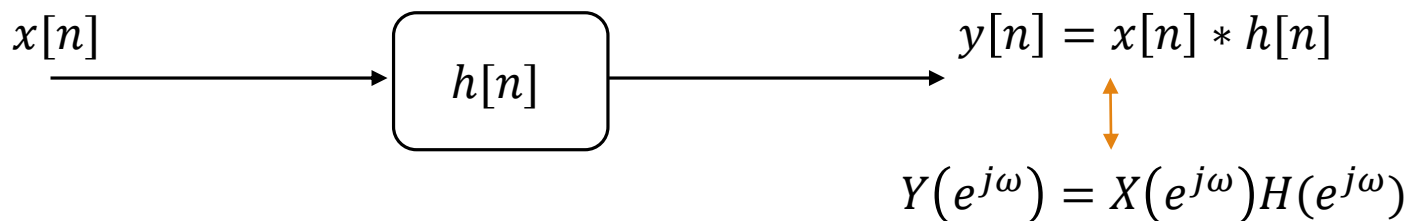
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$

$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

  - Η απόκριση πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$  δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
  - Η απόκριση φάσης  $\varphi_H(e^{j\omega})$  δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Για να μπορούμε να εφαρμόζουμε το μετασχ. Fourier σε μια εξίσωση διαφορών, υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, ότι η απόκριση σε συχνότητα υπάρχει
  - Δεν είναι πάντα αληθές αυτό
- Για να υπάρχει η απόκριση σε συχνότητα αρκεί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

- Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί συνθήκη ευστάθειας του συστήματος!
- Άρα πρέπει να έχουμε ευσταθές σύστημα για να μπορούμε να πάρουμε το μετασχ. Fourier του!

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Τα πράγματα όσον αφορά την επίδραση της απόκρισης πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδό του είναι σχετικά ξεκάθαρα
  - Η απόκριση πλάτους πολλαπλασιάζεται με το φάσμα πλάτους της εισόδου
- Φαινομενικά και η επίδραση της απόκρισης φάσης δε συνιστά κάτι πολύπλοκο
  - Η απόκριση φάσης προστίθεται στο φάσμα φάσης της εισόδου
- Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη χρονική δομή ενός σήματος
- Οπότε η επίδραση της απόκρισης φάσης διατηρεί ή όχι την αρχική χρονική δομή του σήματος
- Όμως τελικά τα πράγματα δεν είναι τα όσο απλά για την απόκριση φάσης. Γιατί?
- Γιατί η φάση ενός μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα!
  - Η πρόσθεση οποιουδήποτε ακέραιου πολλαπλάσιου του  $2\pi$  διατηρεί την ίδια τιμή στη φάση

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

• Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης, το αποτέλεσμα είναι πάντα στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$

- Αυτή η τιμή ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal phase value)

$$-\pi < ARG[H(e^{j\omega})] \leq \pi$$

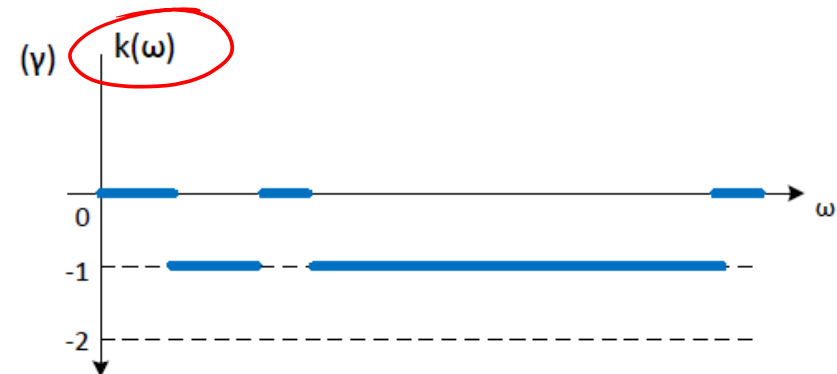
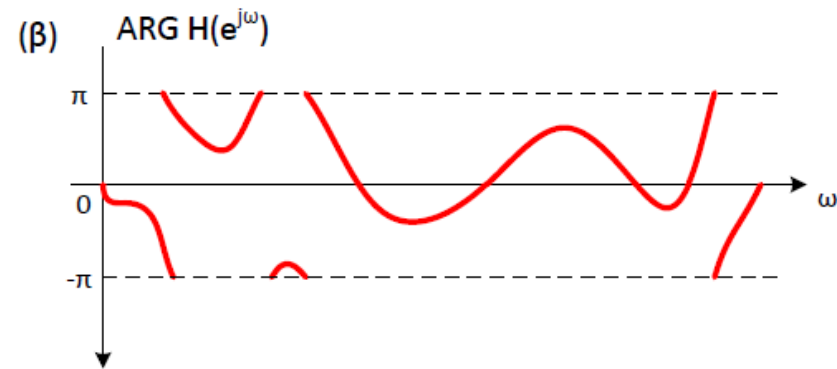
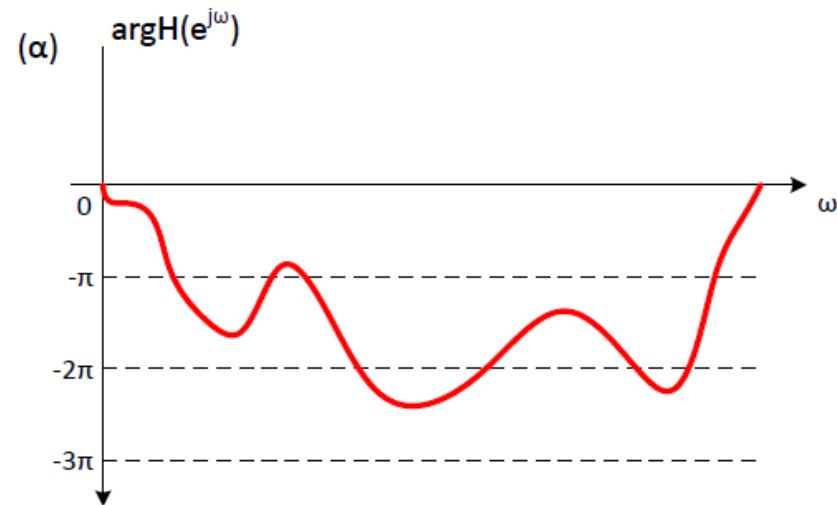
- Οποιαδήποτε άλλη γωνία μπορεί να γραφεί με βάση την πρωτεύουσα φάση ως

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) = \arg[H(e^{j\omega})] = ARG[H(e^{j\omega})] + 2\pi k(\omega) \rightarrow \in Z$$

• Η διαδικασία εύρεσης της συνεχούς (ως προς  $\omega$ ) συνάρτησης φάσης από την πρωτεύουσα φάση που παίρνουμε από την αντίστροφη εφαπτομένη ονομάζεται **ξετύλιγμα φάσης (phase unwrapping)**

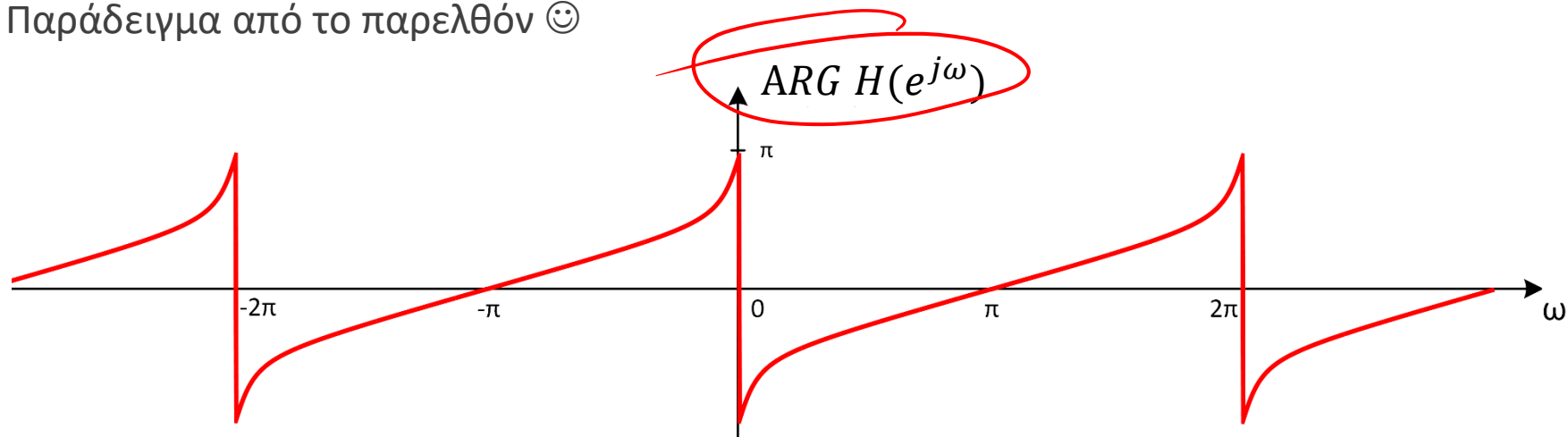
- Δείτε το ακόλουθο σχήμα

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης



## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

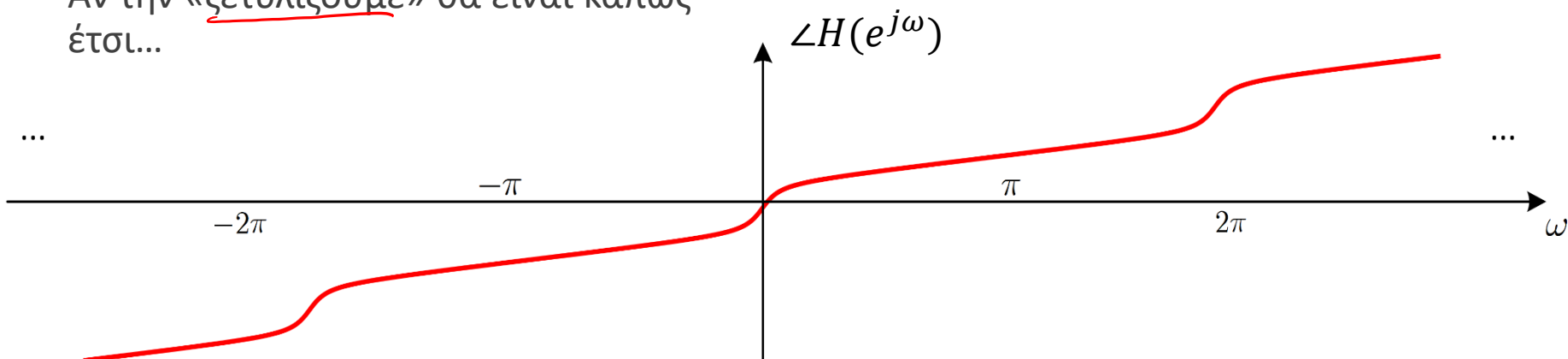
- Παράδειγμα από το παρελθόν ☺



- Αυτή είναι η απόκριση φάσης του γνωστού σας σήματος

$$h[n] = -a^n u[-n - 1], |a| > 1$$

- Αν την «ξετυλίξουμε» θα είναι κάπως έτσι...





## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Απόκριση Φάσης

- Θυμηθείτε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος για ημιτονοειδή είσοδο της μορφής

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta), \quad -\infty < n < +\infty$$



δίνεται ως

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))$$

- Προσέξτε:

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 \left(n + \frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}\right) + \theta\right)$$

- Η ποσότητα

$$-\frac{\varphi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}$$

μας δείχνει τη **χρονική καθυστέρηση σε δείγματα** του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου

- Η συνάρτηση

$$\tau_p(e^{j\omega}) = -\frac{\varphi_H(e^{j\omega})}{\omega}$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης (phase delay)**

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση  $h[n]$  έχει απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi_H(e^{j\omega})}$$

Απόκριση πλάτους

Απόκριση φάσης

- Ένα σήμα εισόδου  $x[n]$  μπορεί να γραφεί συχνοτικά μέσω του μετασχ. Fourier του:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_X(e^{j\omega})}$$

Φάσμα πλάτους εισόδου

Φάσμα φάσης εισόδου

- Ξέρουμε ότι στην έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})| e^{j\phi_Y(e^{j\omega})} = |H(e^{j\omega})| |X(e^{j\omega})| e^{j(\phi_X(e^{j\omega}) + \phi_H(e^{j\omega}))}$$

Φάσμα πλάτους εξόδου

Φάσμα φάσης εξόδου

- Ας παραμείνουμε στην ημιτονοειδή μορφή εισόδου

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi_x)$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Η επίδραση της απόκρισης πλάτους είναι προφανής
  - Διαμορφώνει **πολλαπλασιαστικά** το φάσμα εισόδου και παραδίδει ένα φάσμα εξόδου
- Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι όμως ότι η απόκριση φάσης δρα **αθροιστικά** επάνω στο φάσμα φάσης της εισόδου
- Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης γνωρίζουμε ότι

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 n + \phi_x + \phi_H(e^{j\omega_0})\right), \quad -\infty < n < +\infty$$

- Η **αρχική φάση** του ημιτόνου άλλαξε στην έξοδο!
  - Προστέθηκε μια φάση  $\phi_H(e^{j\omega_0})$
  - ...η οποία σχετίζεται με το ΓΧΑ σύστημα και με τη συχνότητα  $\omega_0$  της εισόδου
    - Δηλ. εν γένει για διαφορετική συχνότητα εισόδου, θα προστεθεί διαφορετική φάση στην ήδη υπάρχουσα
- Η έξοδος μπορεί κι αυτή να γραφεί ως

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 \left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}\right)\right)$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\phi_x}{\omega_0} + \frac{\phi_H(e^{j\omega_0})}{\omega_0}\right)\right)$$

- Άρα το ΓΧΑ σύστημα πρόσθεσε μια επιπλέον καθυστέρηση φάσης!

- Αριθμητικά, αν για ένα σήμα εισόδου  $x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$ , η απόκριση φάσης του ΓΧΑ συστήματος ήταν της μορφής  $\phi_H(e^{j\omega}) = -2\omega$ , τότε το σύστημα εισάγει στην είσοδο φάση ίση με

$$\phi_H(e^{j\pi/3}) = -2\omega \Big|_{\omega=\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

- Άρα η καθυστέρηση φάσης του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου ισούται με

$$\tau_p\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\phi_H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 2$$

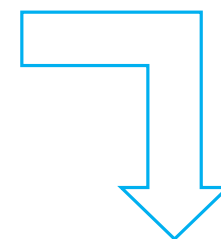
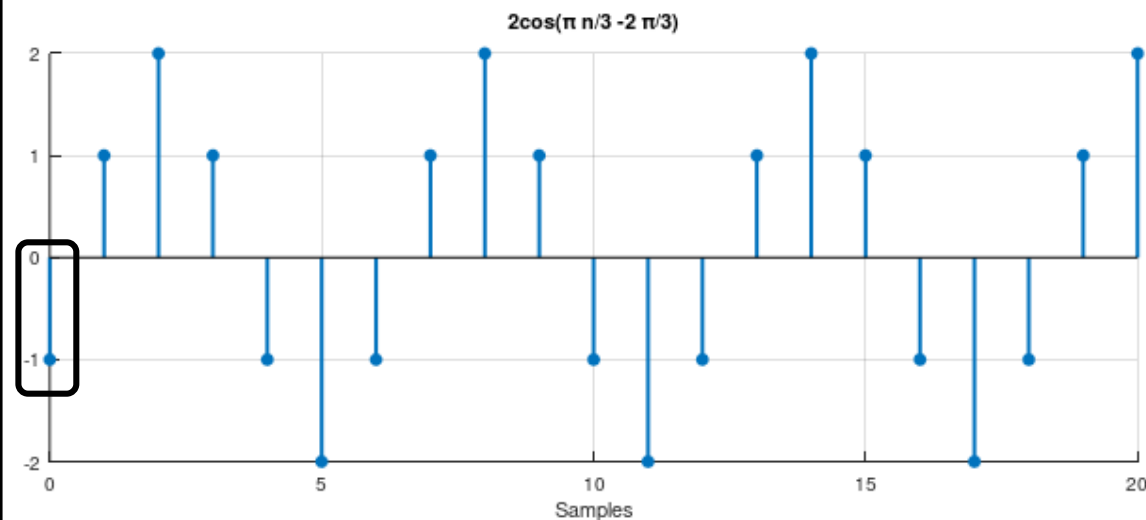
- Άρα η έξοδος καθυστέρησε 2 δείγματα σε σχέση με την είσοδο

- ... που ήταν ήδη καθυστερημένη κατά 2 δείγματα σε σχέση με το σημείο αναφοράς (0,0)☺

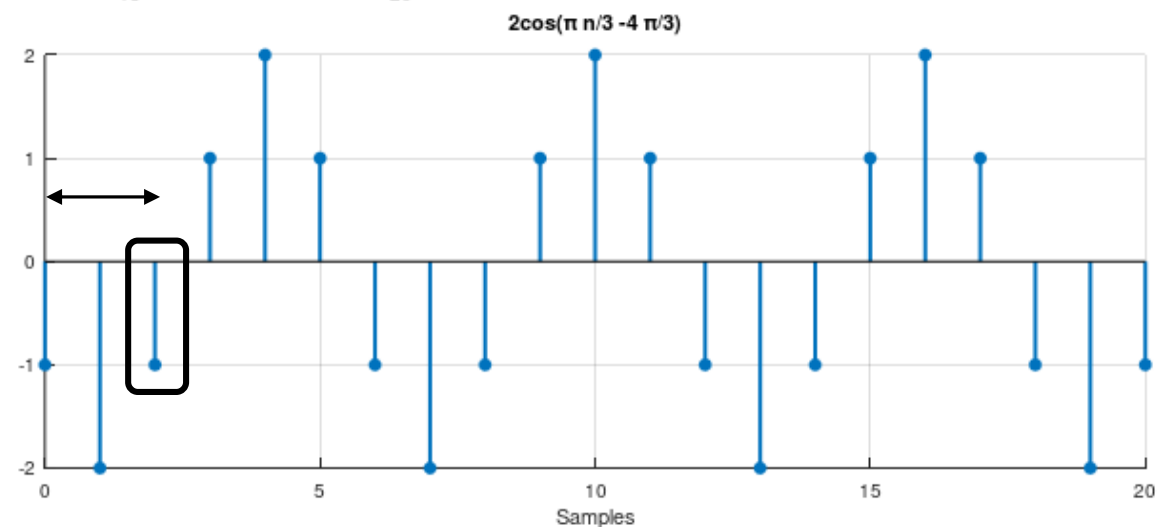
- Επιβεβαίωση:

$$y[n] = 2|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(n - \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} - 2\right)\right) = 2|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\frac{\pi}{3}(n - 4)\right)$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Η καθυστέρηση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος ισούται με το πλήθος των δειγμάτων που καθυστερεί ένα άπειρης διάρκειας ημιτονοειδές σήμα εισόδου όταν περάσει από ένα ΓΧΑ σύστημα



- Αγνοήσαμε σκόπιμα την επίδραση της απόκρισης πλάτους
  - ...η οποία μπορεί να αλλοιώνει το πλάτος του σήματος εισόδου



# • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Όμως είναι αυτή η *πραγματική* καθυστέρηση ενός σήματος στην έξοδο ενός συστήματος?

- Έστω το σήμα

$$x[n] = A \underbrace{\cos(\omega_0 n)}_{\text{περιβάλλουσα}} \underbrace{\cos(\omega_c n)}_{\text{φέρων σήμα}} = \frac{A}{2} \cos(\omega_l n) + \frac{A}{2} \cos(\omega_u n)$$

με χρήση Euler/τριγωνομετρίας και με

$$\omega_l = \omega_c - \omega_0$$

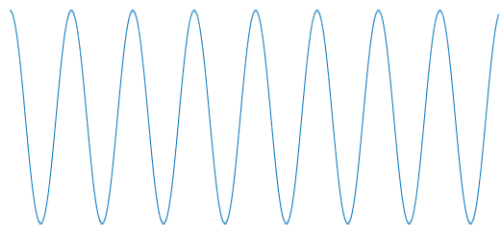
και

$$\omega_u = \omega_c + \omega_0$$

με

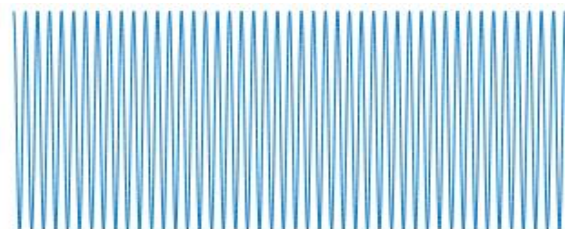
$$\omega_c \gg \omega_0$$

περιβάλλουσα



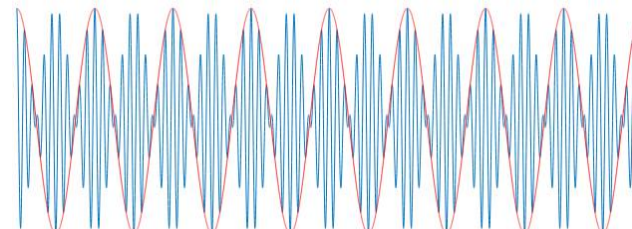
×

φέρων σήμα



=

$x[n]$



## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Αν περάσουμε το σήμα από ένα σύστημα

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi_h(e^{j\omega})} \leftarrow$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \frac{A|H(e^{j\omega_l})|}{2} \cos(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)) + \frac{A|H(e^{j\omega_u})|}{2} \cos(\omega_u n + \phi_h(\omega_u))$$

- Αν η απόκριση πλάτους είναι περίπου μοναδιαία (γενικότερα, σταθερή) γύρω από τις συχνότητες  $\omega_u, \omega_l$  τότε

$$y[n] = \frac{A}{2} \cos(\omega_l n + \phi_h(\omega_l)) + \frac{A}{2} \cos(\omega_u n + \phi_h(\omega_u))$$

$$= A \cos\left(\omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2}\right) \cos\left(\omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2}\right)$$

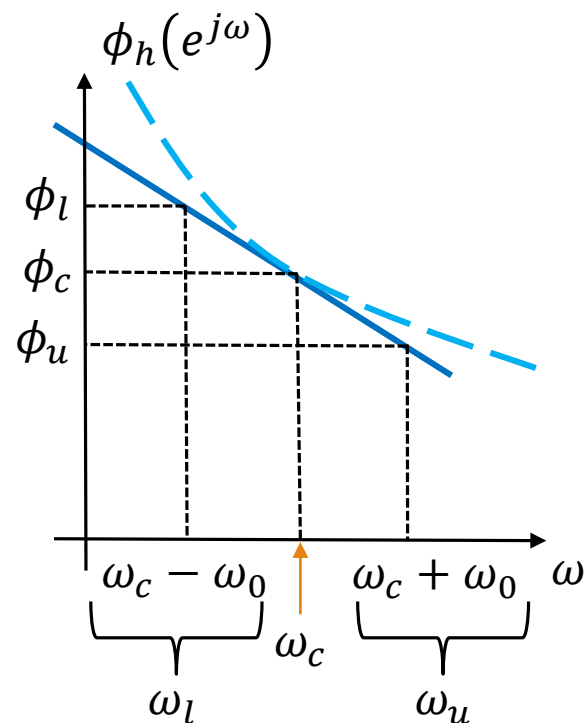
- Επαναφέραμε το άθροισμα σε γινόμενο για να βρούμε πόσο καθυστερεί η περιβάλλουσα και πόσο το φέρον σήμα

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A \cos \left( \omega_0 n + \frac{\phi_h(\omega_u) - \phi_h(\omega_l)}{2} \right) \cos \left( \omega_c n + \frac{\phi_h(\omega_u) + \phi_h(\omega_l)}{2} \right)$$

- Αφού υποθέσαμε ότι  $\omega_c \gg \omega_0$ , τότε  $\omega_u \approx \omega_c$  και  $\omega_l \approx \omega_c$
- Υποθέτουμε ότι η απόκριση φάσης είναι **περίπου γραμμική** γύρω από το  $\omega_c$
- Αφού όλες οι τιμές της φάσης στην παραπάνω σχέση εξαρτώνται από την απόκριση φάσης του συστήματος, ας συμβολίσουμε για ευκολία:

- $\phi_l = \phi_h(e^{j(\omega_c - \omega_0)}) = \phi_h(e^{j\omega_l})$
- $\phi_u = \phi_h(e^{j(\omega_c + \omega_0)}) = \phi_h(e^{j\omega_u})$
- $\phi_c = \phi_h(e^{j\omega_c})$





- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A \cos \left( \omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2} \right) \cos \left( \omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2} \right)$$

- Με χρήση του παραπάνω, η καθυστέρηση φάσης του δεύτερου όρου του γινομένου θα είναι

$$-\frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c} \approx -\frac{2\phi_c}{2\omega_c} = -\frac{\phi_h(e^{j\omega_c})}{\omega_c}$$

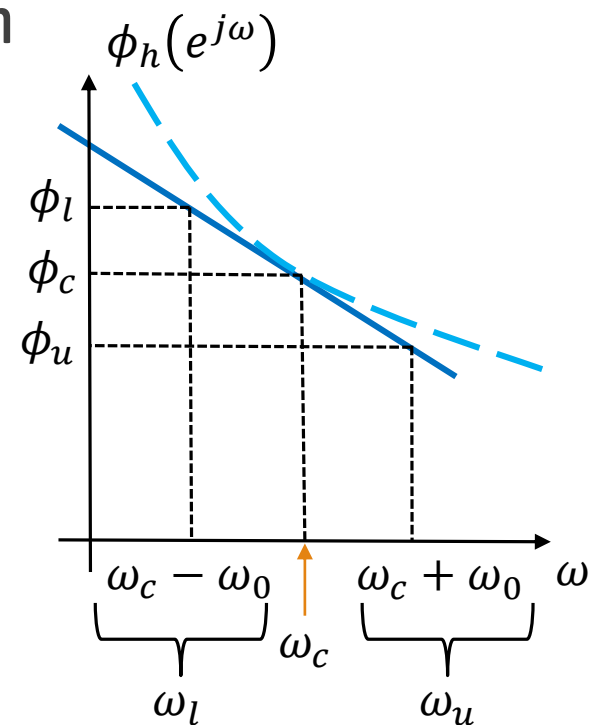
- Για τον πρώτο όρο

$$-\frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0} = -\frac{\phi_u - \phi_l}{\omega_u - \omega_l} \approx -\frac{d}{d\omega} \phi_h(e^{j\omega_c})$$

που ονομάζεται **καθυστέρηση ομάδας (group delay)**  $\tau_g(e^{j\omega_c})$  στη συχνότητα  $\omega_c$

- Η καθυστέρηση ομάδας ορίζεται ως

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} \phi_h(e^{j\omega})$$



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

$$y[n] = A \cos \left( \omega_0 n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2} \right) \cos \left( \omega_c n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2} \right)$$

- Έτσι το σήμα γράφεται ως

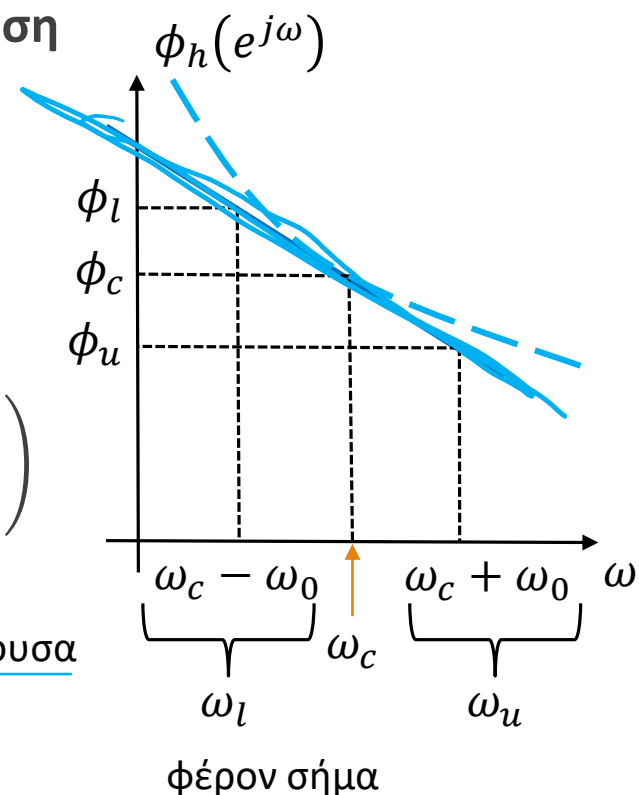
$$y[n] = A \cos \left( \omega_0 \left( n + \frac{\phi_u - \phi_l}{2\omega_0} \right) \right) \cos \left( \omega_c \left( n + \frac{\phi_u + \phi_l}{2\omega_c} \right) \right)$$

και με βάση τα παραπάνω

περιβάλλουσα

$$y[n] \approx A \cos(\omega_0(n - \tau_g(e^{j\omega_c}))) \cos(\omega_c(n - \tau_p(e^{j\omega_c})))$$

φέρων σήμα

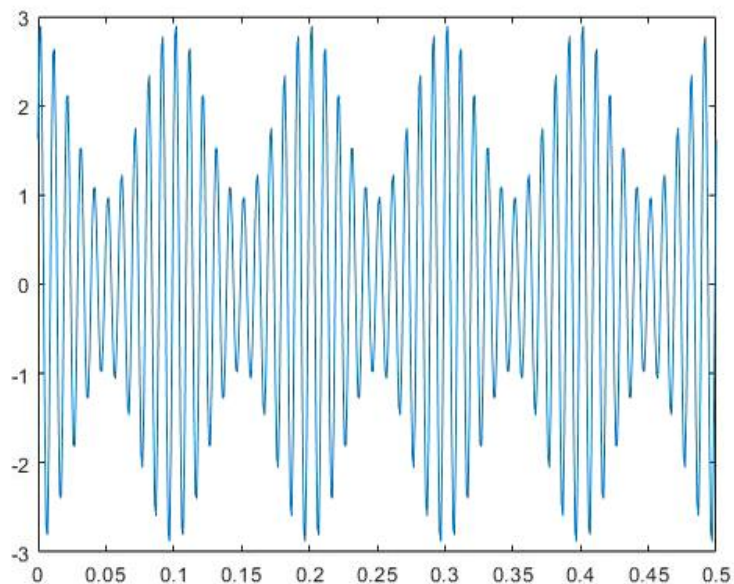


- Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα καθυστερεί διαφορετικό χρόνο στην έξοδο από το φέρων σήμα!

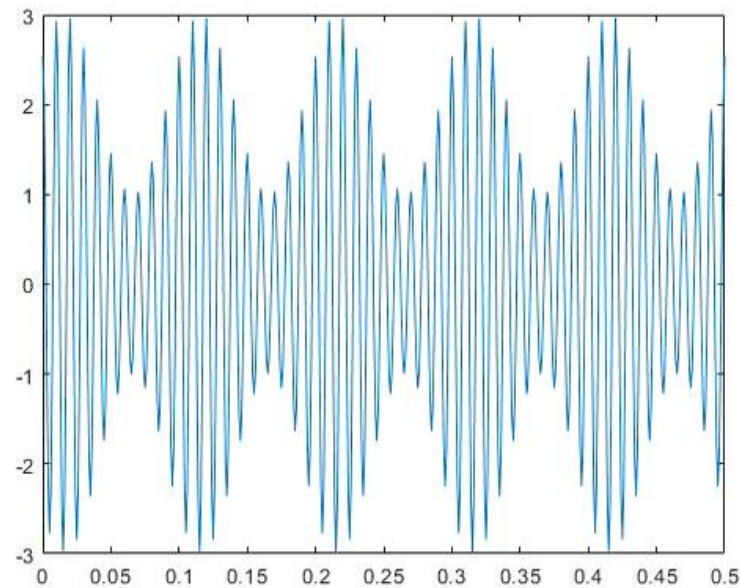
- Κάναμε **δύο** υποθέσεις:

1. Το φάσμα πλάτους είναι (σχεδόν) σταθερό γύρω από τη συχνότητα  $\omega_c$
2. Η απόκριση φάσης (σχεδόν) γραμμική γύρω από τη συχνότητα  $\omega_c$

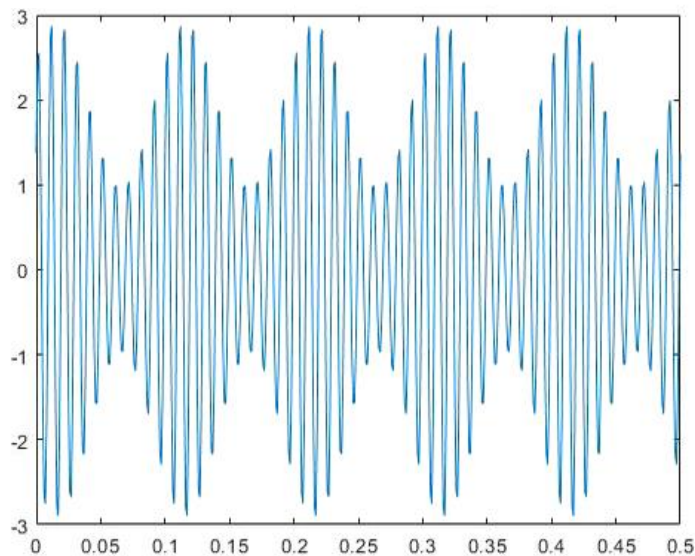
• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



Phase Delay

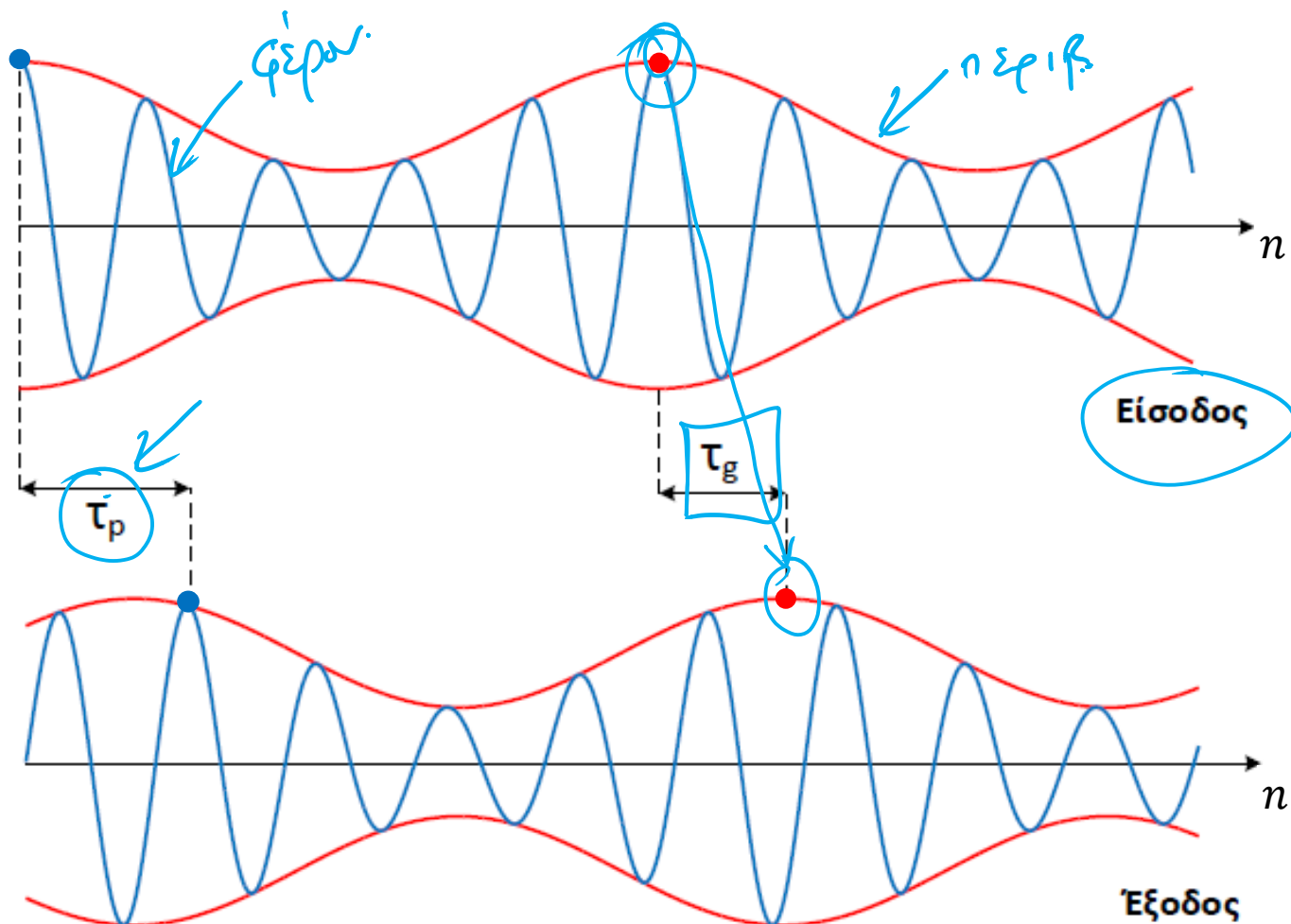


Group Delay



Phase & Group Delay

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

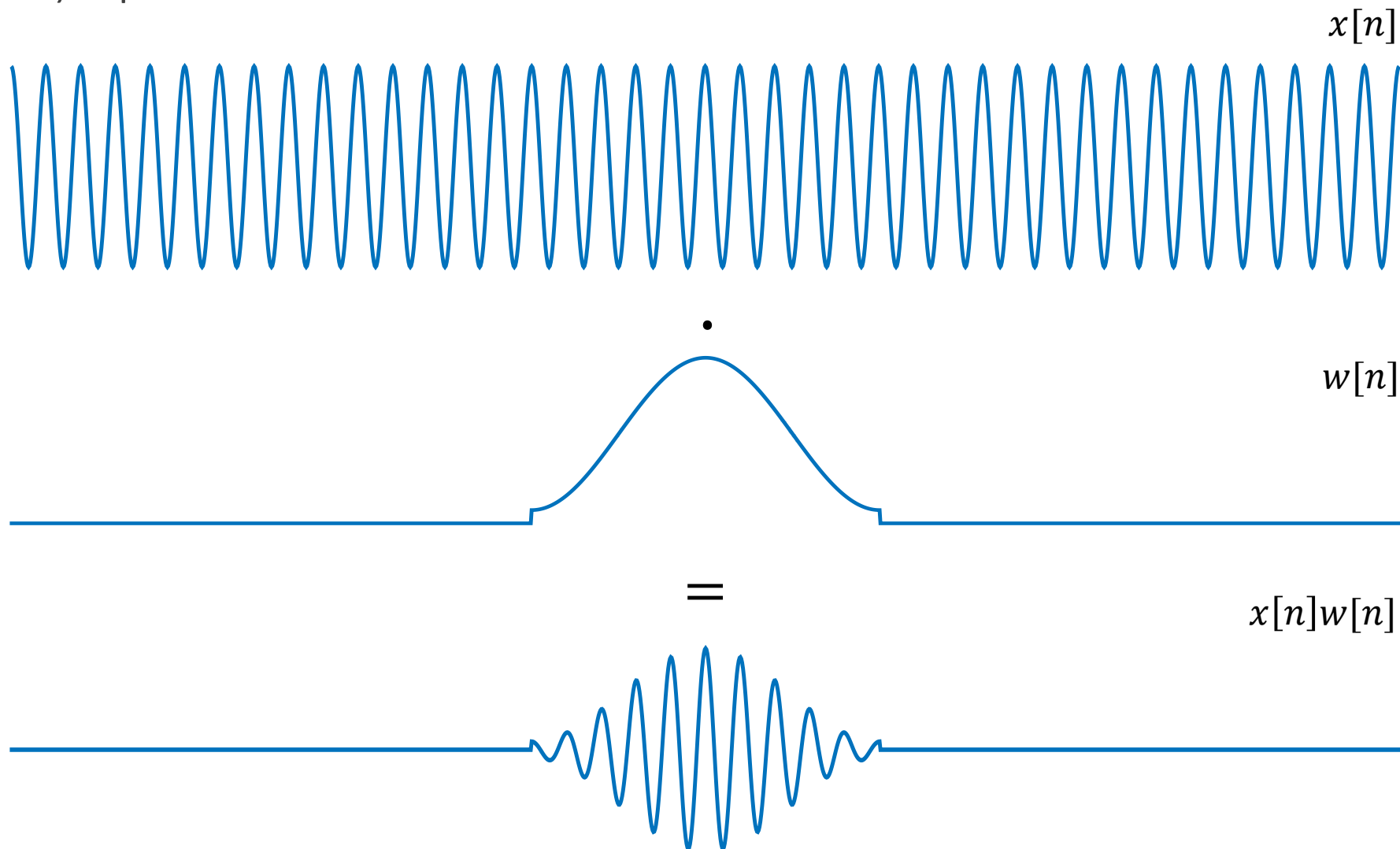


- Ποια από τις δυο μετρικές εκφράζει την καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του συστήματος;

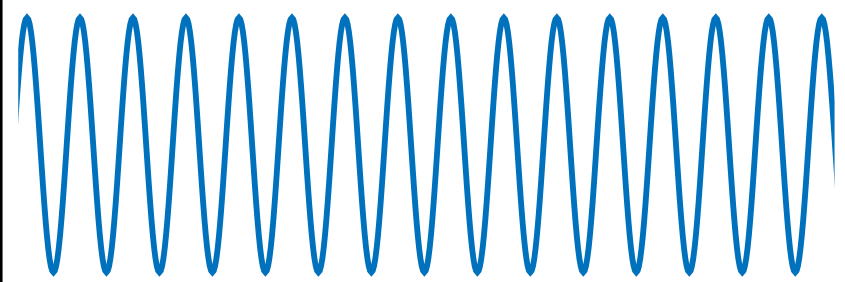
## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε ότι το σήμα εισόδου αποτελούνταν από ένα group (ομάδα) δυο συχνοτήτων, **όλες πολύ κοντά και γύρω από μια:**
  - Την  $\omega = \omega_c$  (δηλ. τη φέρουσα συχνότητα)
- Η ομάδα αποτελούνταν από τις  $\omega_c \pm \omega_0$ 
  - Η καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο του ΓΧΑ συστήματος καθορίστηκε από την καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα  $\omega_c$ , δηλ. από την καθυστέρηση που έλαβαν οι δυο αυτές συχνότητες, υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε
- Όλα τα παραπάνω είχαν μια υπόθεση:  $-\infty < n < +\infty$
- Στην πραγματικότητα δεν έχουμε τέτοιες διάρκειες σημάτων
  - Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα από ένα άπειρης διάρκειας σήμα
- Ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άπειρης διάρκειας σήμα πολλαπλασιασμένο με ένα παράθυρο
- Ξέρουμε ότι οι συχνότητες ενός τέτοιου σήματος θα καθορίζονται από το μετασχ. Fourier του παραθύρου
  - Αυτό είναι το group συχνοτήτων μας! 😊
- Ας θεωρήσουμε ένα παράθυρο Hanning κι ας δούμε τι συμβαίνει...

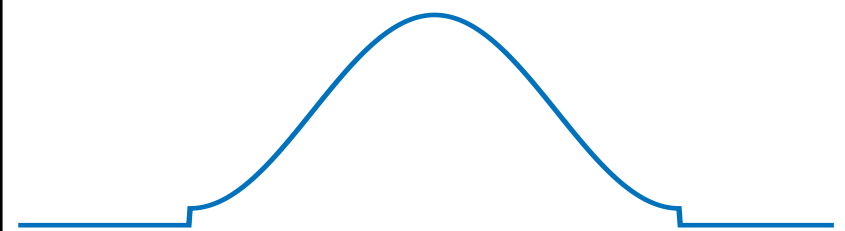
- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Το ημίτονο εισόδου δεν είναι άπειρης διάρκειας, οπότε θα προκύπτει όπως παρακάτω:



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

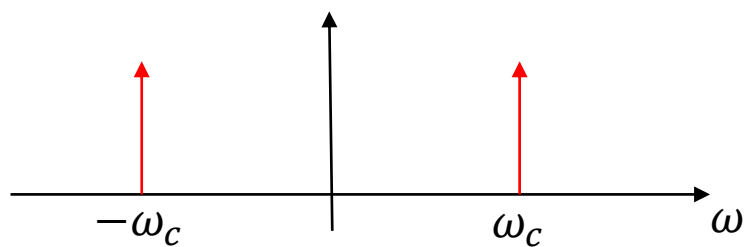
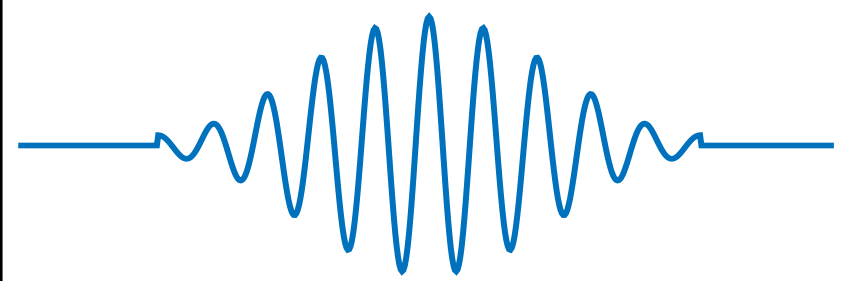


•

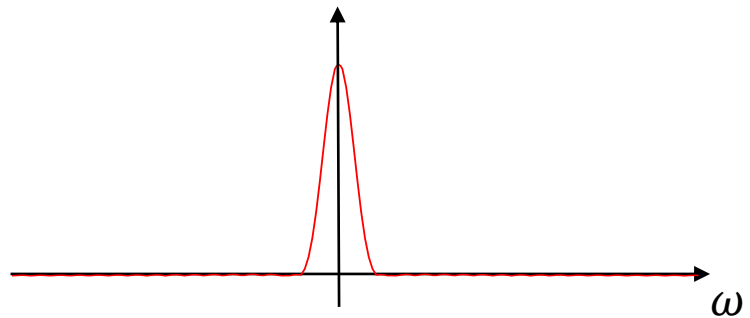


$|F|$

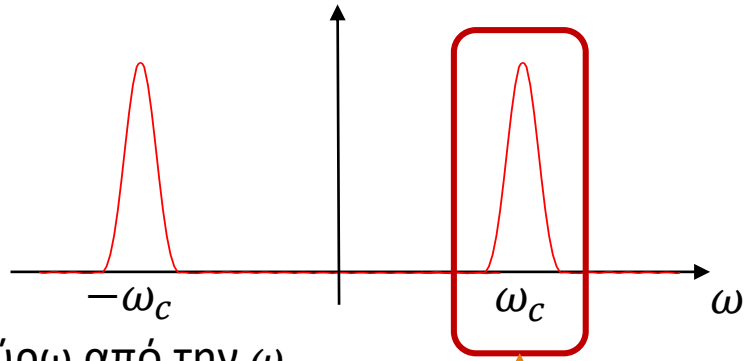
=



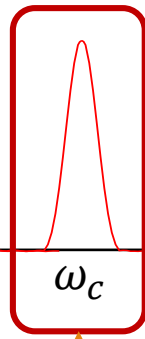
\*



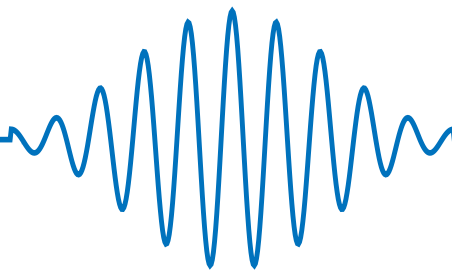
=



Γκρουπ συχνοτήτων γύρω από την  $\omega_c$



## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



- Παρατηρήσατε ότι ο παραπάνω ημιτονοειδής παλμός δεν έχει συχνοτικό περιεχόμενο μόνο στη συχνότητα  $\omega_c$  αλλά σε ένα εύρος συχνοτήτων γύρω από αυτή
- Γιατί;

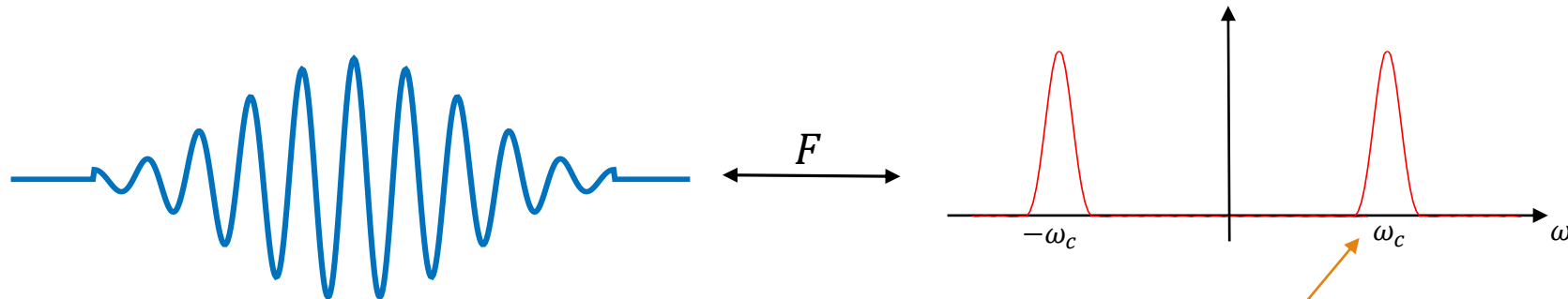
$$w[n] \cdot A \cos(\omega_c n) \stackrel{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) * (A\pi\delta(\omega - \omega_c) + A\pi\delta(\omega + \omega_c))$$

$$\frac{A}{2} W(e^{j(\omega - \omega_c)}) + \frac{A}{2} W(e^{j(\omega + \omega_c)})$$

- Άρα το εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει ο ημιτονοειδής παλμός εξαρτάται από το εύρος του μετασχηματισμού Fourier  $W(e^{j\omega})$  του σήματος της περιβάλλουσας  $w[n]$ !
- Αν το εύρος συχνοτήτων του μετασχ. της είναι μικρό, τότε το σήμα ονομάζεται **στενής ζώνης!**
  - Για να ισχύει αυτό, η περιβάλλουσα  $w[n]$  πρέπει να έχει «μεγάλη» διάρκεια...
  - Γιατί? Ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης!



## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



- Παρατηρήστε ότι το ημίτονο είναι **διαμορφωμένο** (πολλαπλασιασμένο) με μια Gaussian-like περιβάλλουσα  $w[n]$
- Μας ενδιαφέρει πόσο θα καθυστερήσει στην έξοδο το «πακέτο συχνοτήτων» που αποτελεί τον ημιτονοειδή παλμό!
- Αν ένα σήμα εισόδου αποτελείται από ένα άθροισμα από **διαμορφωμένα** ημίτονα διαφορετικής συχνότητας το καθένα, τότε κάθε «πακέτο» κάθε συχνότητας θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος, κι έτσι η έξοδος θα είναι εν γένει διαφορετική στη μορφή της σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου
- Αν όμως τα διαμορφωμένα ημίτονα («πακέτα») είναι σήματα **στενής ζώνης**, δηλ. ο μετασχ. Fourier τους έχει σημαντικές τιμές μόνο γύρω από ένα εύρος συχνοτήτων

$$[-\omega_c - B, -\omega_c + B], [\omega_c - B, \omega_c + B]$$

με  $\omega_c$  τη συχνότητα του ημιτόνου, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την καθυστέρηση ομάδας για μια πολύ καλή προσέγγιση της καθυστέρησης κάθε «πακέτου» της εξόδου!

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Έστω ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^N w_k[n] \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

- Έστω ότι η περιβάλλουσα  $w_k[n]$  κάθε συχνότητας  $\omega_k$  είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης στη συχνότητα, δηλ.

$$\begin{aligned} w_k[n] &\neq 0, & N_1 &\leq n \leq N_2 \\ W_k(e^{j\omega}) &= 0, & |\omega| &> B_k, & B_k &\ll \omega_k \end{aligned}$$

- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{2} e^{j\theta_k} W_k(e^{j(\omega-\omega_k)}) + \frac{1}{2} e^{-j\theta_k} W_k(e^{j(\omega+\omega_k)}) \right)$$

- Πράγματι έχουμε ένα άθροισμα σημάτων στενής ζώνης!

## • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Υπό τις προϋποθέσεις που είπαμε νωρίτερα, η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = \sum_{k=1}^N w_k [n - \tau_g(e^{j\omega_k})] \cos(\omega_k (n - \tau_p(e^{j\omega_k})) + \theta_k)$$

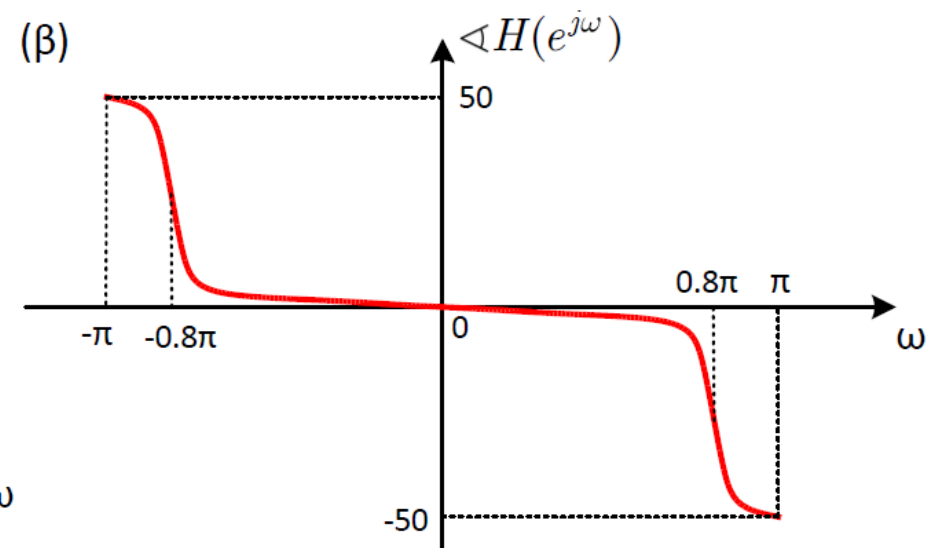
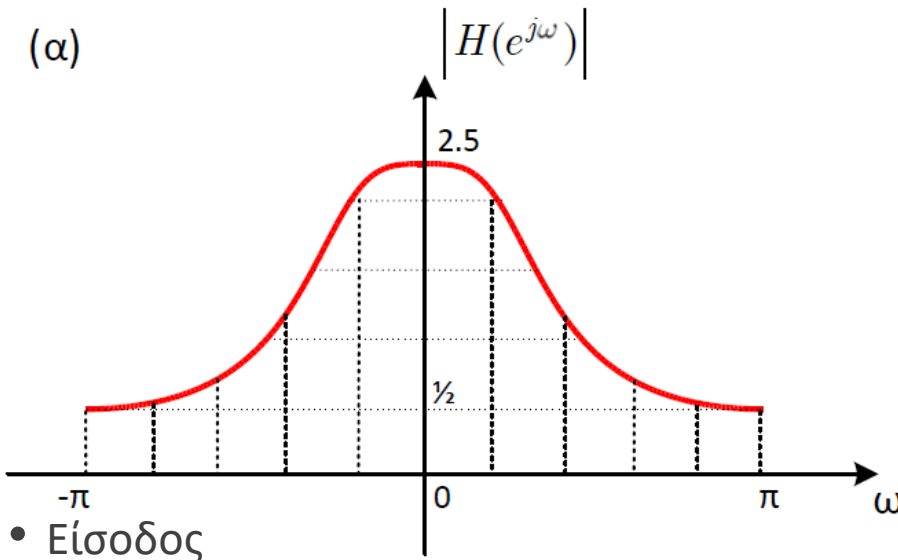
- Ξεκάθαρα βλέπετε ότι κάθε διαμορφωμένο ημίτονο συχνότητας  $\omega_k$  έχει καθυστερήσει κατά  $\tau_g(e^{j\omega_k})$
- Η ερμηνεία του group delay ως η καθυστέρηση ενός ημιτονοειδούς παλμού στην έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος είναι έγκυρη μόνον αν:

- Η απόκριση πλάτους γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
- Η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τις συχνότητες της εισόδου είναι σχεδόν σταθερή
  - Δηλ. η απόκριση πλάτους της εισόδου πρέπει να είναι αρκετά narrowband (“στενής ζώνης”)

# ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Παράδειγμα:

- Έστω το ΓΧΑ σύστημα που φαίνεται στο σχήμα.

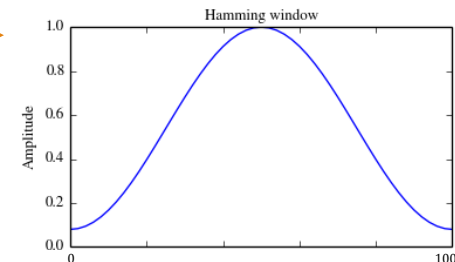


$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

$$= w[n - M] \sin(0.2\pi n) + w[n - M] \sin(0.8\pi n) + w[n - 7M] \sin(0.4\pi n)$$

με  $M = 50$  και  $w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ ,  $0 \leq n \leq N = 100$

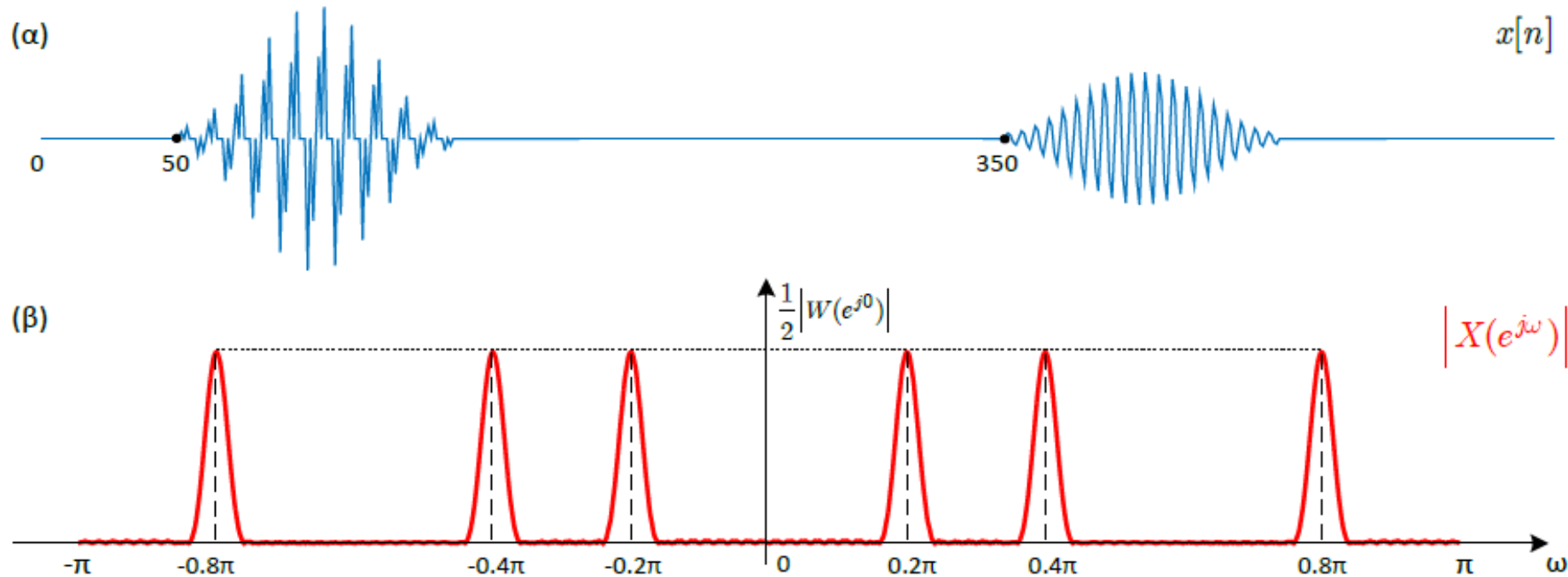
- Το σημαντικό εύρος συχνοτήτων για αυτό το  $w[n]$  είναι  $\sim \frac{8\pi}{100} \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

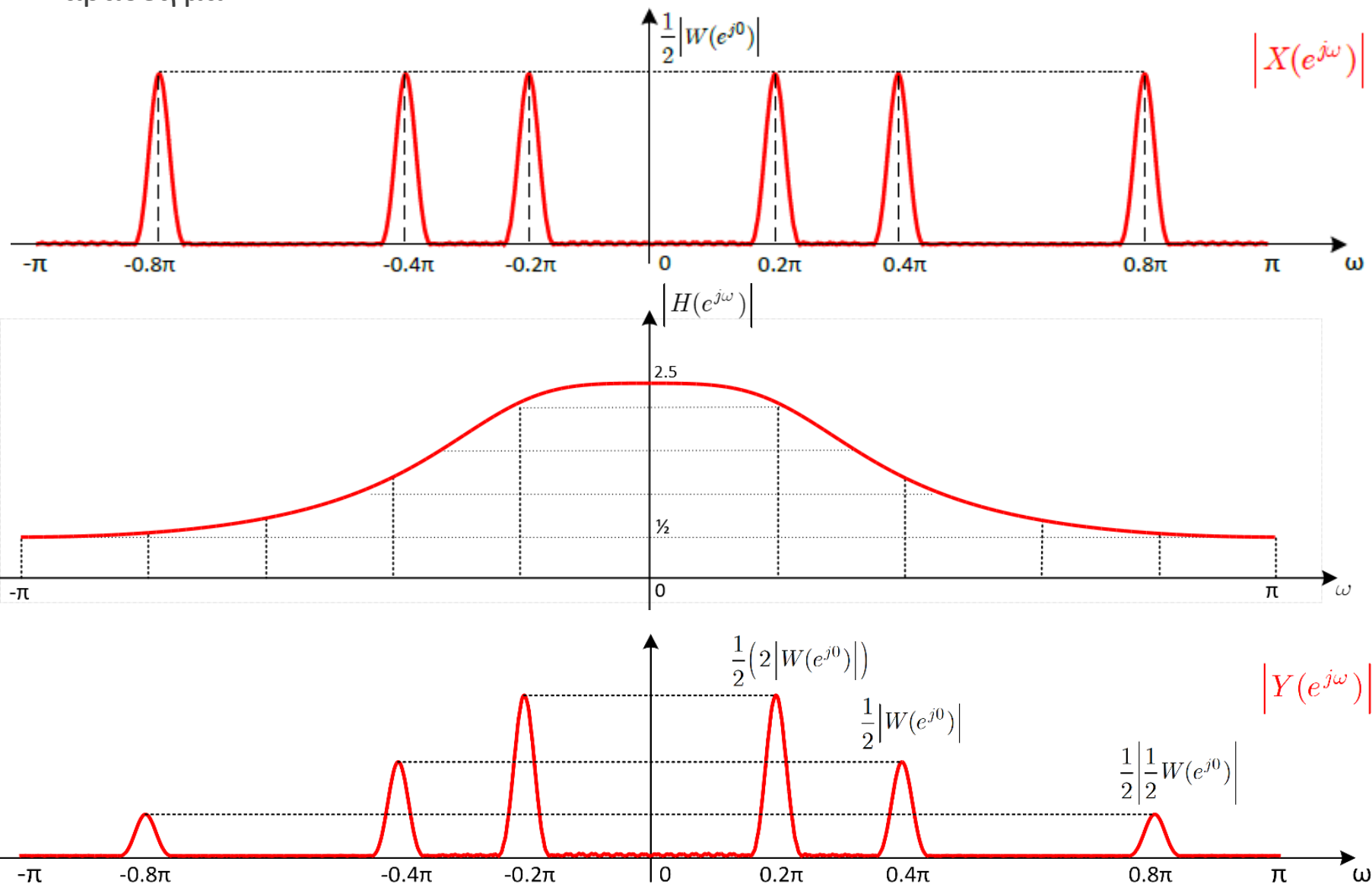
- Παράδειγμα:

$$x[n] = w[n - 50] \sin(0.2\pi n) + w[n - 50] \sin(0.8\pi n) + w[n - 350] \sin(0.4\pi n)$$

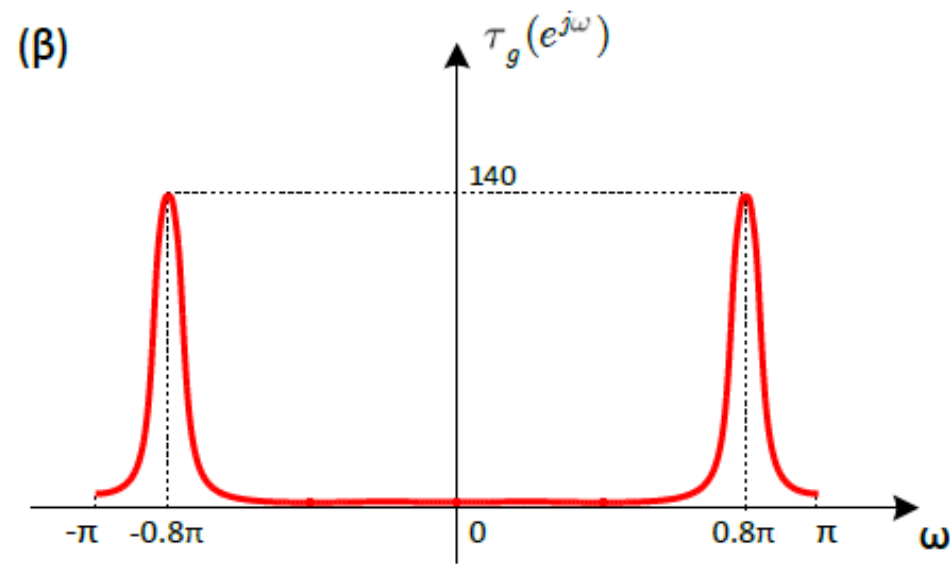
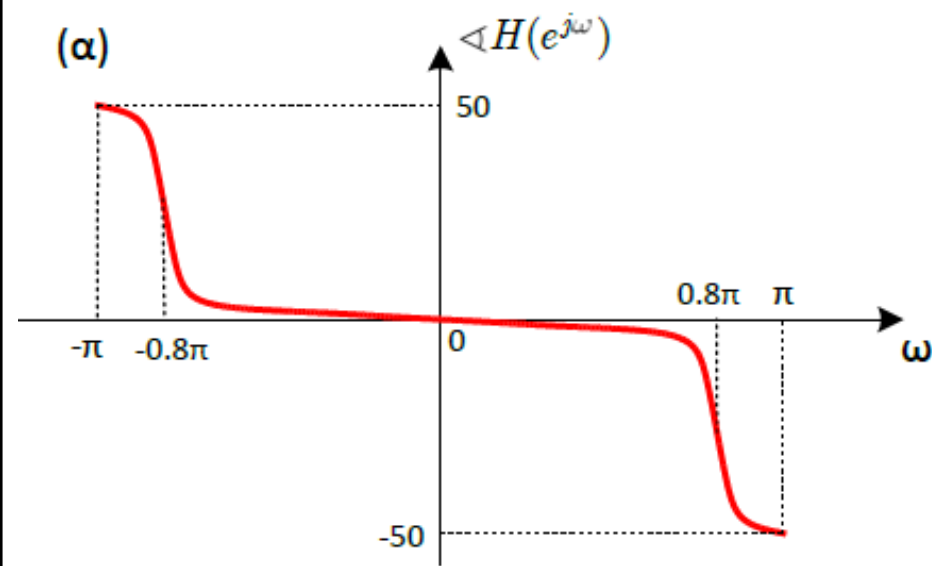


- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Παράδειγμα:

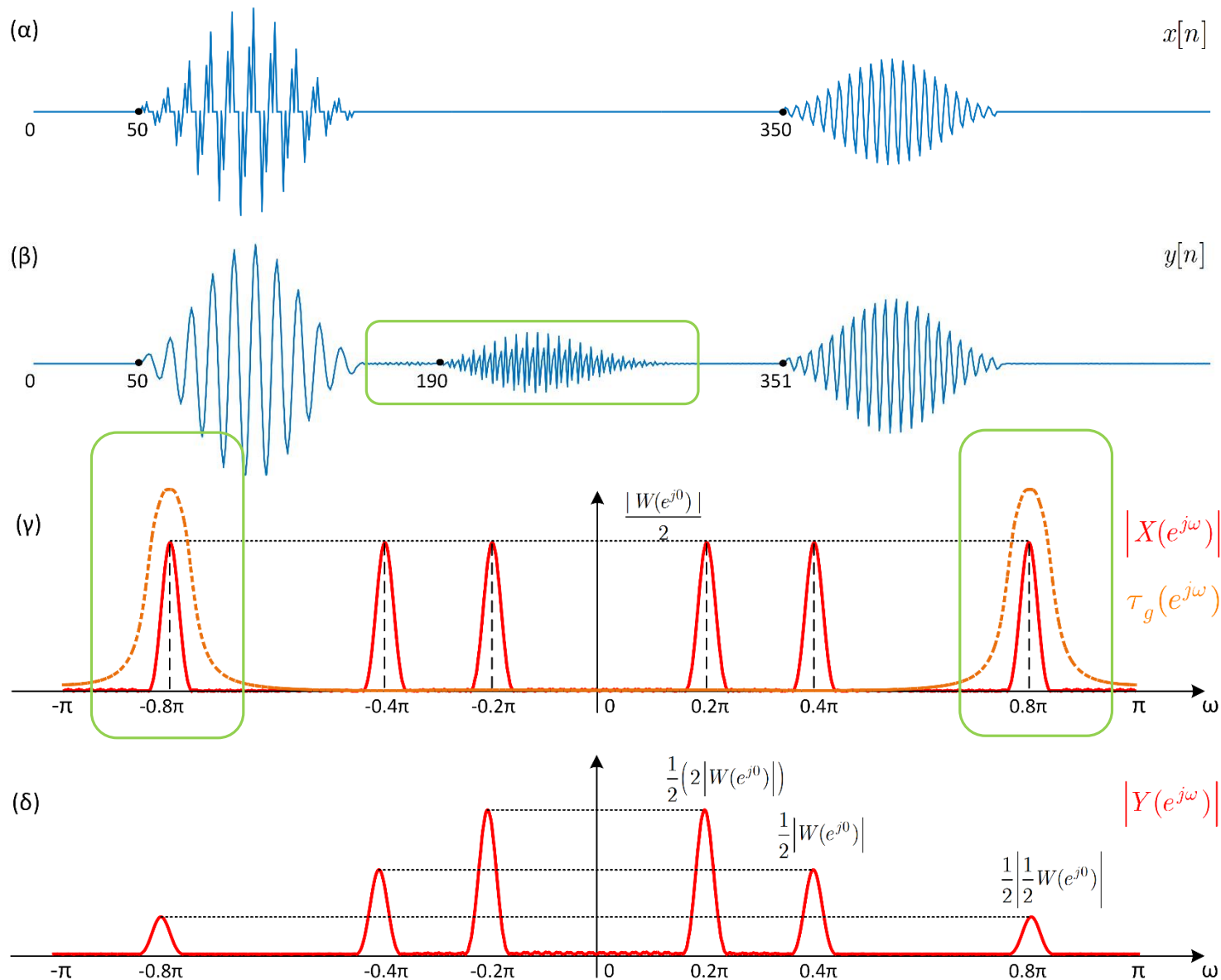


- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας
- Παράδειγμα:



# ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

- Παράδειγμα:

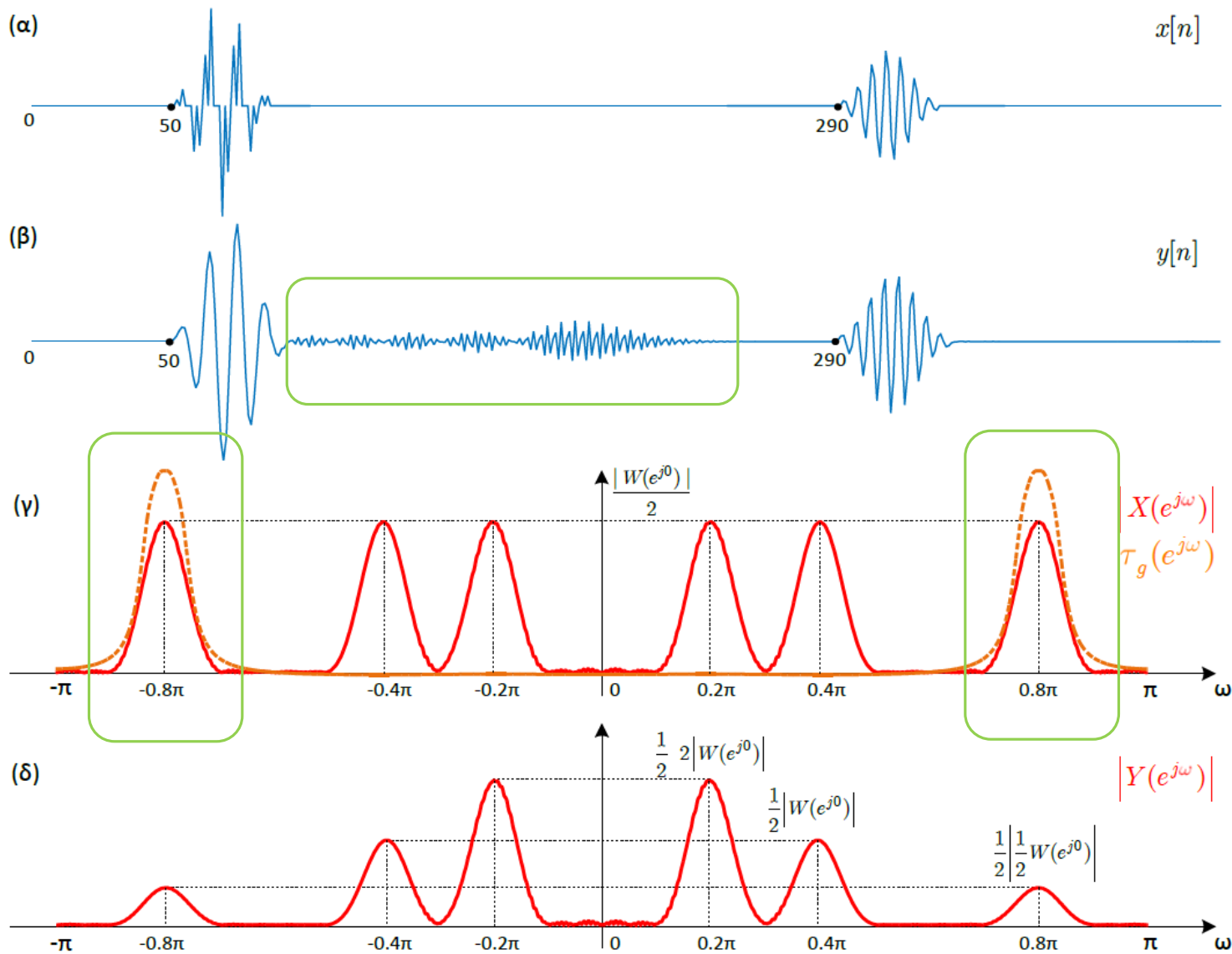




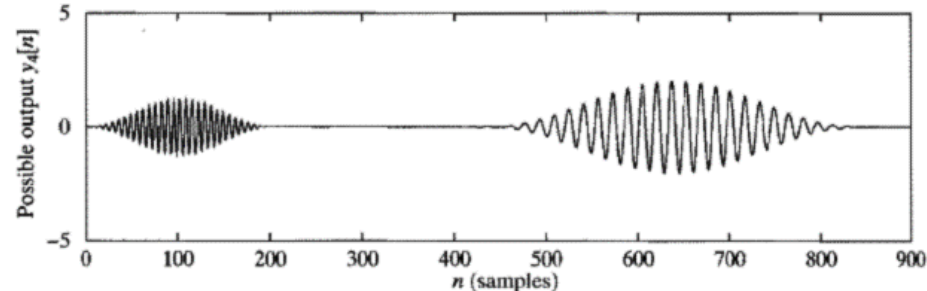
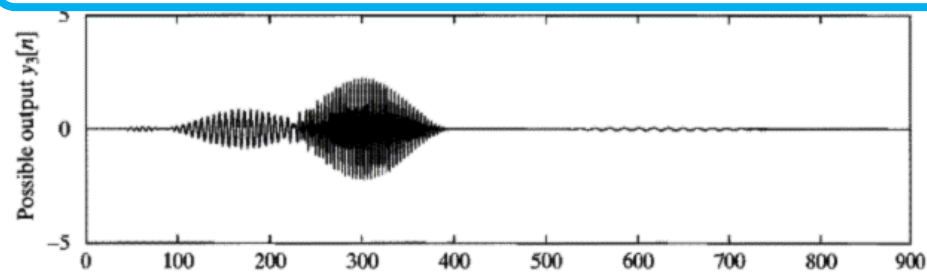
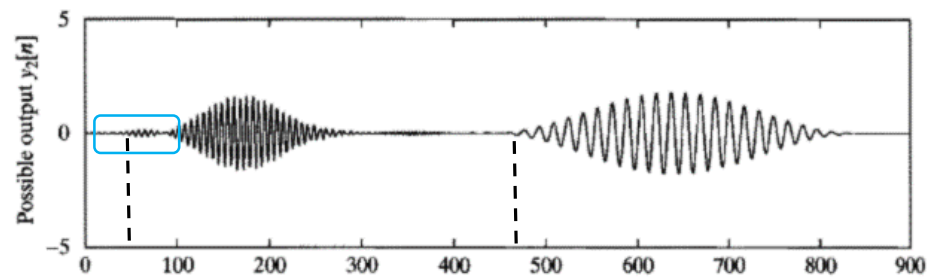
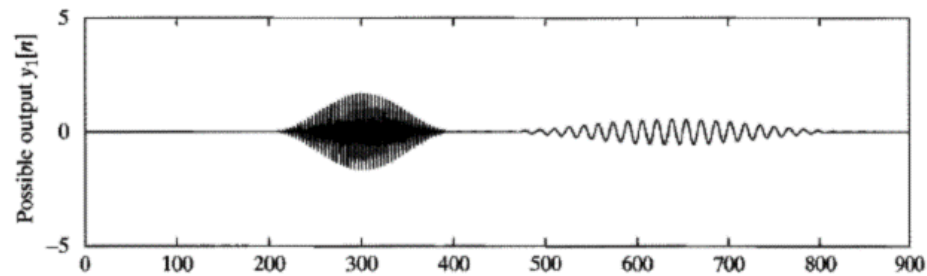
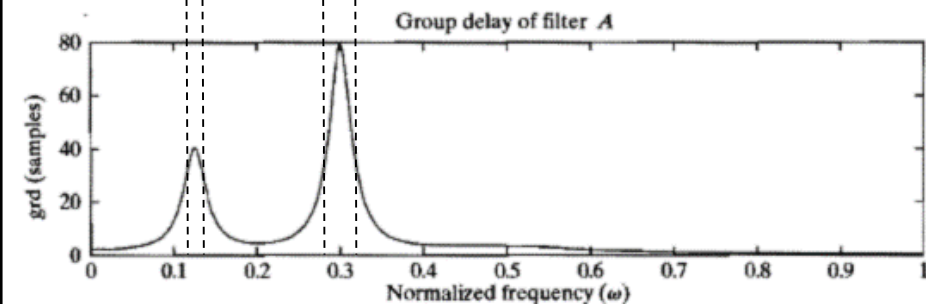
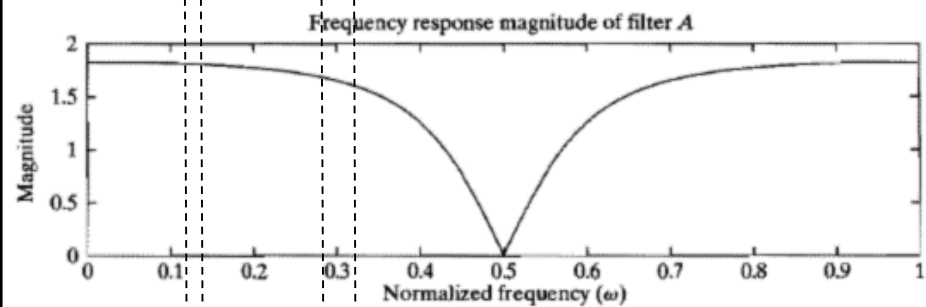
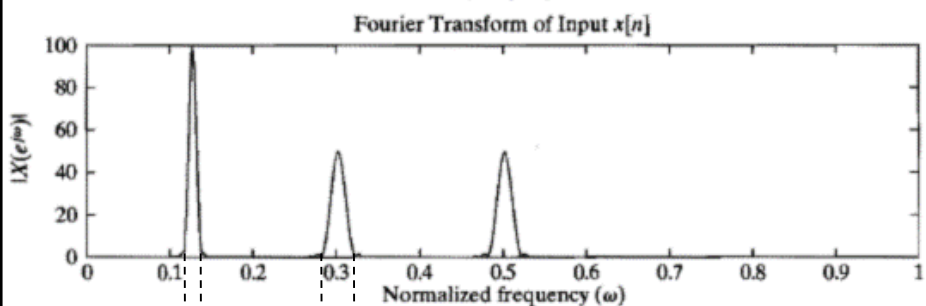
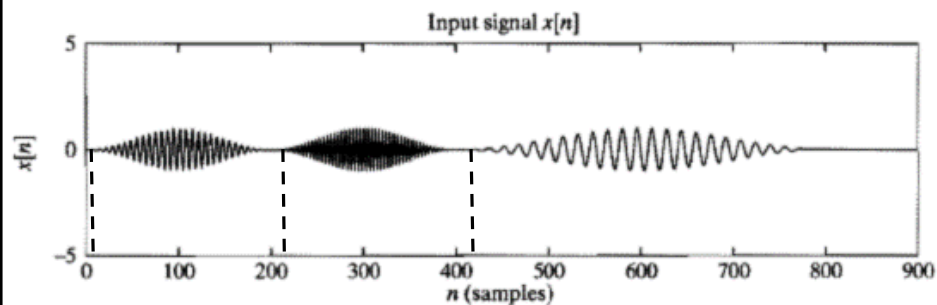
# ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας

## Παράδειγμα:

Είσοδος ευρείας ζώνης  
(wideband)



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Καθυστέρηση Φάσης & Ομάδας



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

