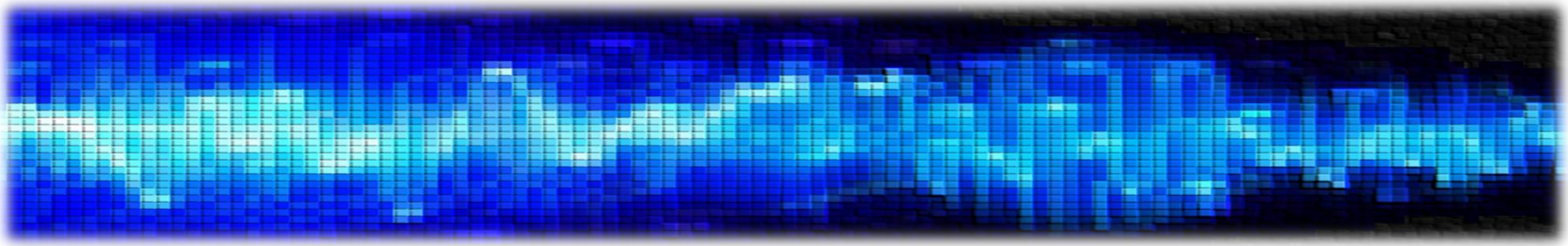
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 9^{Η}



- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ιδιότητες

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα

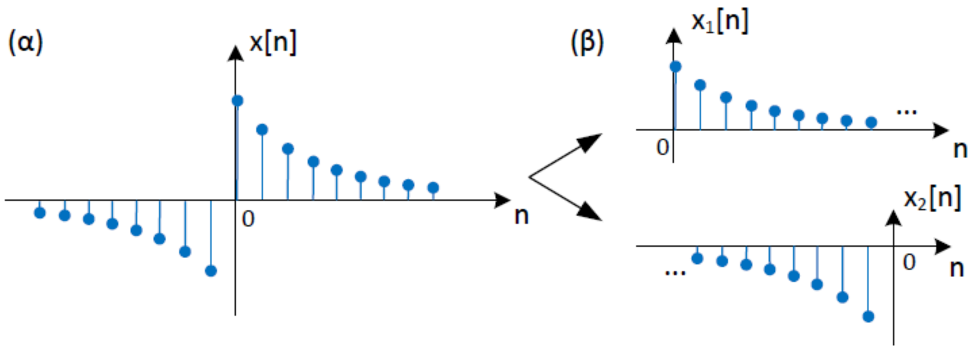
$$x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$$
$$x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$w[n] = a x_1[n] + \beta x_2[n] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W(e^{j\omega}) = \sum_n w[n] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_n a x_1[n] e^{-j\omega n} + \sum_n \beta x_2[n] \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= a \underbrace{\sum_n x_1[n] e^{-j\omega n}}_{X_1(e^{j\omega})} + \beta \underbrace{\sum_n x_2[n] \cdot e^{-j\omega n}}_{X_2(e^{j\omega})} = a X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα
  - ○ Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



$$x_1[n] = a^n u[n] \qquad a<1$$

$$x_2[n] = -b^n u[-n-1] \qquad b>1$$

$$F\{x[n]\} = F\{x_1[n]+x_2[n]\} = F\{x_1[n]\} + F\{x_2[n]\} =$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-be^{-j\omega}} = \frac{(1-be^{-j\omega})+(1-ae^{-j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})} =$$

$$= \frac{2-(a+b)e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \qquad x[n-n_0] \longrightarrow e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$$

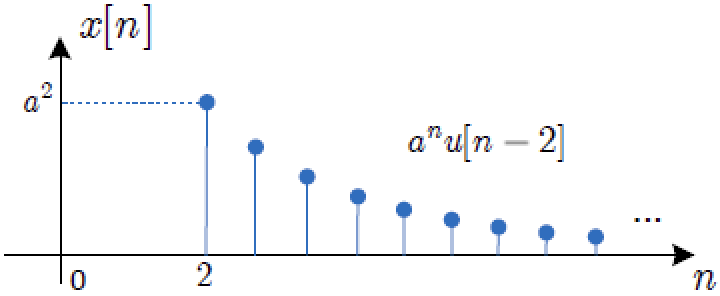
$$F\{x[n-n_0]\} = \sum_n x[n-n_0] e^{-j\omega n} = \underbrace{\sum_{n'} x[n'] e^{-j\omega n'}}_{X(e^{j\omega})} \cdot e^{-j\omega n_0} =$$

$n' = n - n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = n' + n_0$

$$= e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση
  - Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



$$\begin{cases} a^n u[n] \rightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \\ a^{n-2} u[n-2] \rightarrow \dfrac{e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}} \end{cases}$$

$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n-n_0] \rightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

- $y[n] = a^n \; u[n-2]$

$$y_1[n] = a^{n-2} u[n-2] \rightarrow Y_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^2 y_1[n] = a^n u[n-2] = y[n] \rightarrow Y(e^{j\omega}) = a^2 \frac{e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

$$x[n] \longrightarrow X(e^{j\omega})$$

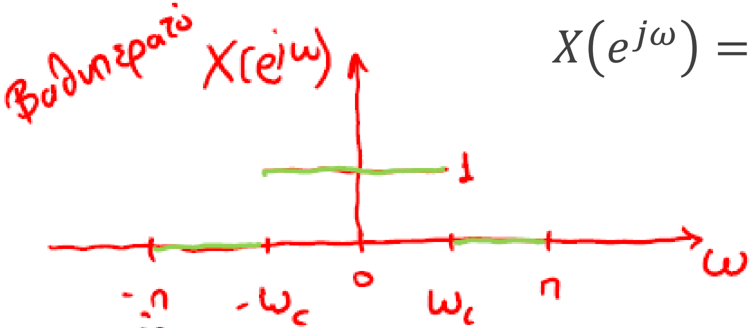
$$e^{j\omega_0 n} \cdot x[n] \longrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

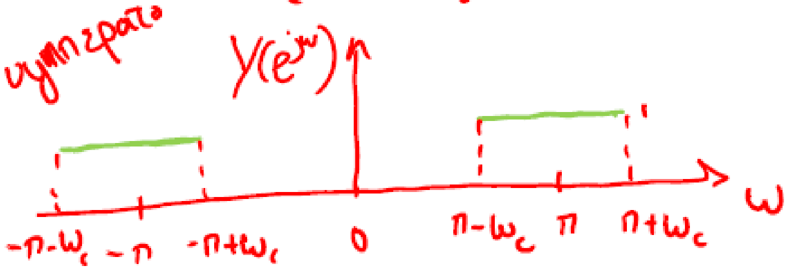
$$\sum_n x[n] \cdot e^{j\omega_0 n} \cdot e^{-j\omega n} = \sum_n x[n] \cdot e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ αν

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \rightarrow x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$





$$y[n] = e^{j\pi n} x[n] = \left(e^{j\pi}\right)^n x[n] = (-1)^n x[n]$$

Άρα $y[n] = (-1)^n \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

• $x[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[kn] \rightarrow X(e^{j\omega/k})$

$$F\{x[kn]\} = \sum_{n} x[kn]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n_1} x[n_1]\, e^{-j\frac{\omega}{k} n_1} = X(e^{j\omega/k})$$

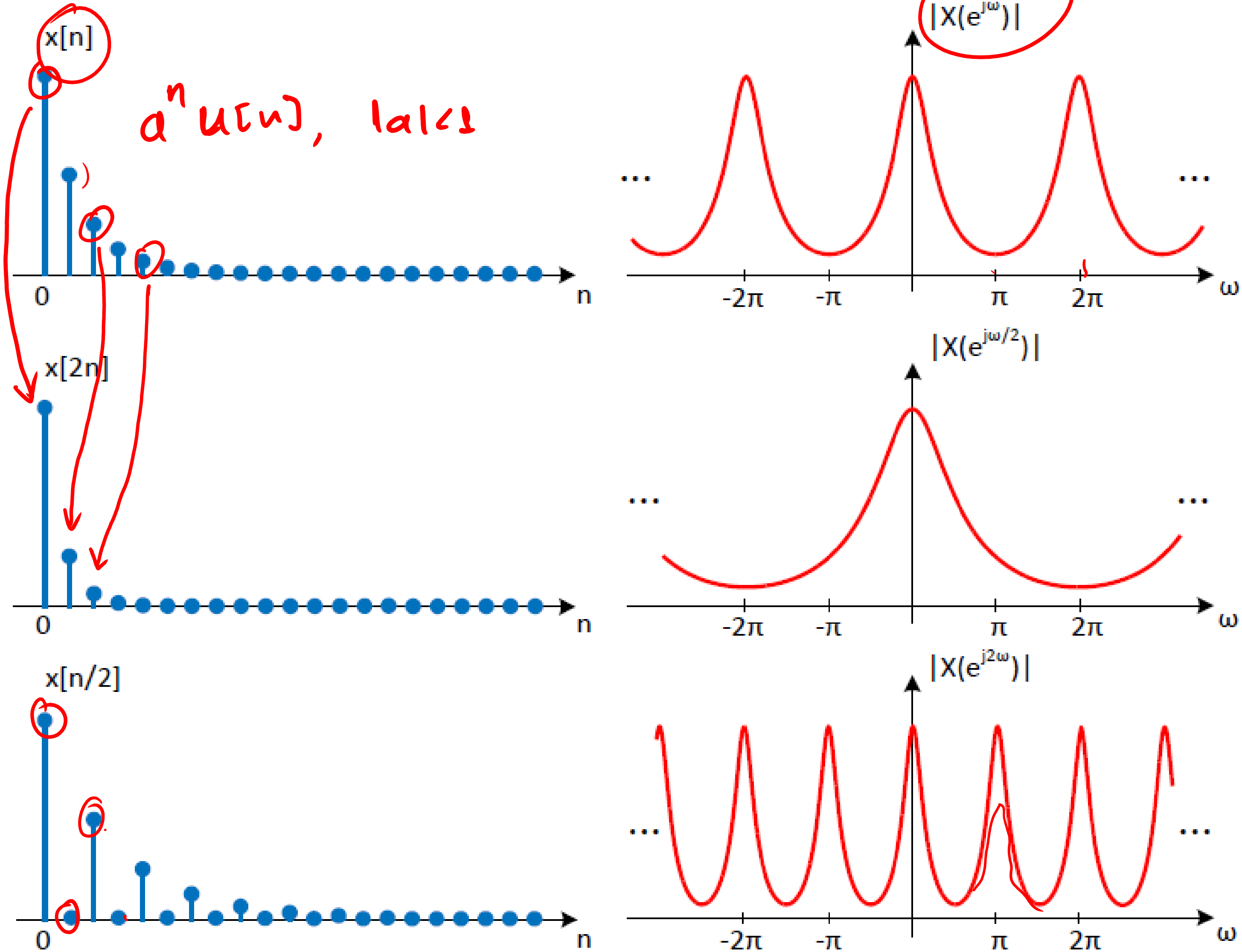
$n_1 = kn \Rightarrow n = n_1/k$

• $x[\frac{n}{2}]$ $\quad \begin{cases} x[n] = a^n u[n], & |a|<1 \\ X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \end{cases}$

$$x[\tfrac{n}{2}] \rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\omega}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a^n u[n], \ |a|<1$



$k=2$

$k=1/2$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$x[n] \longrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$F\{x[n] * y[n]\} = \sum_n x[n] * y[n] \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_n \underbrace{\sum_k x[k]\, y[n-k]}_{x[n] * y[n]} \cdot e^{-j\omega n} = \sum_k x[k] \underbrace{\sum_n y[n-k] \cdot e^{-j\omega n}}_{e^{-j\omega k} \cdot Y(e^{j\omega})} =$$

$$= \underbrace{\sum_k x[k] \cdot e^{-j\omega k}}_{X(e^{j\omega})} \cdot Y(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n] * y[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$x[n] = a^n u[n] \quad |a|<1$

$y[n] = b^n u[n] \quad |b|<1$

$c_{xy}[n]$

$x[n] * y[n] \rightarrow X(e^{j\omega})\, Y(e^{j\omega})$

$X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$Y(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}$

$\Rightarrow \mathcal{F}\{c_{xy}[n]\} = \underbrace{\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}}_{C_{xy}(e^{j\omega})} =$

$= \dfrac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \dfrac{B}{1-be^{-j\omega}}$

$A = (1-ae^{-j\omega}) \cdot C_{xy}(e^{j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{a}} = \dfrac{1}{1-be^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{a}} = \dfrac{a}{a-b}$

$B = (1-be^{-j\omega})\, C_{xy}(e^{j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{b}} = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{b}} = \dfrac{b}{b-a}$

$C_{xy}(e^{j\omega}) = \dfrac{a}{a-b} \cdot \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \dfrac{b}{b-a}\, \dfrac{1}{1-be^{-j\omega}} \Rightarrow c_{xy}[n] =$

$= \dfrac{a}{a-b} \cdot a^n u[n] + \dfrac{b}{b-a}\, b^n u[n] = \dfrac{1}{a-b}\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right) u[n]$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: θεώρημα Parseval

$$\sum_n |x[n]|^2 < \infty$$

$$E_x = \underbrace{\sum_n |x[n]|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\sum_n |x[n]|^2 = \sum_n x[n]\, x^*[n] = \sum_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega \cdot x^*[n] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \underbrace{\sum_n x^*[n]\, e^{j\omega n}}_{\underbrace{\left(\sum_n x[n]\, e^{-j\omega n}\right)^*}_{X(e^{j\omega})}} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

$x[n] = \delta[n] \Rightarrow E_x = 1$

$X(e^{j\omega}) = 1 \quad \forall \omega$

Άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 1 = E_x$$

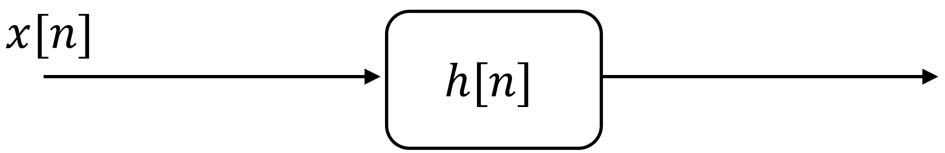
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

  - Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του DTFT είναι:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x[n] \arrow[r, "*"] \arrow[d, leftrightarrow, "F"'] & y[n] \arrow[r, "="] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] & c[n] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] \\
X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\bullet"] & Y(e^{j\omega}) \arrow[r, "="] & C(e^{j\omega})
\end{tikzcd}
$$

  - Αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

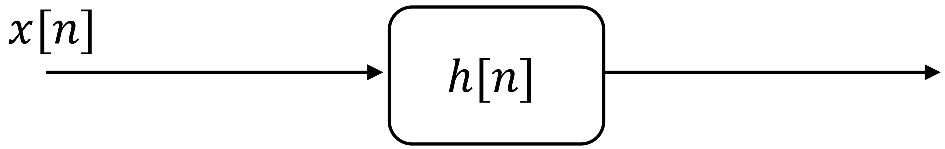
$$\updownarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

  - Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

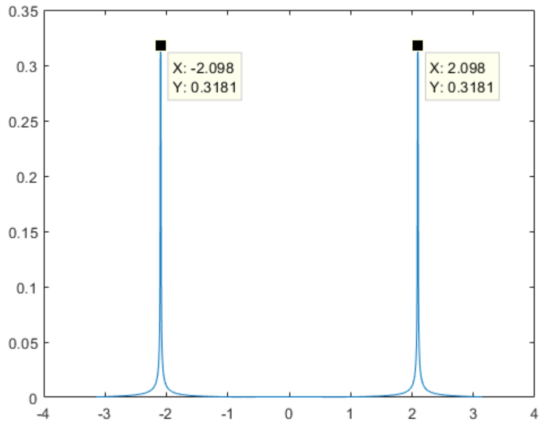
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

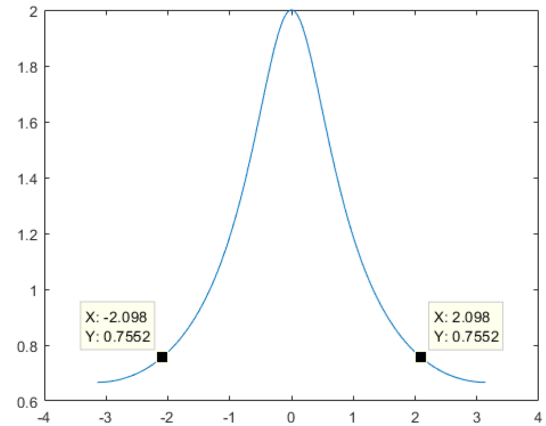
1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

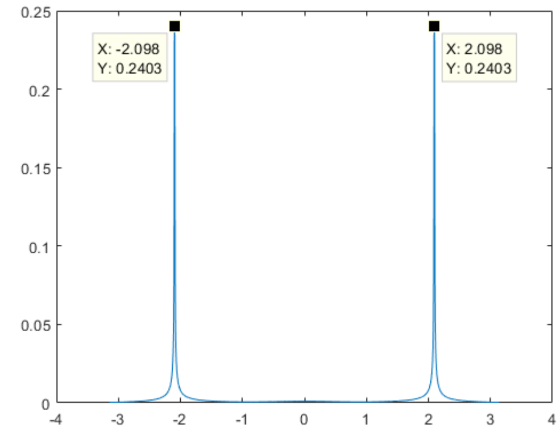
Είσοδος



Σύστημα

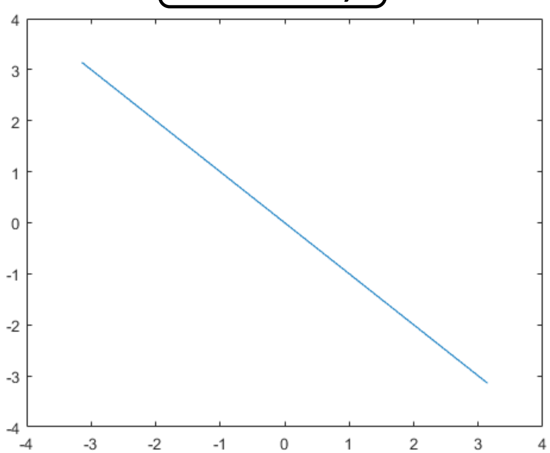


Έξοδος

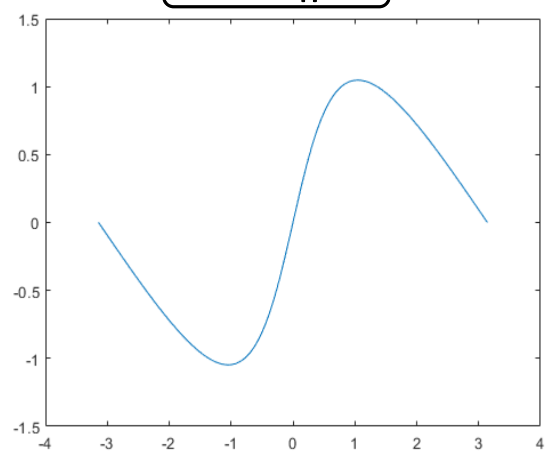


- Κατά φάση

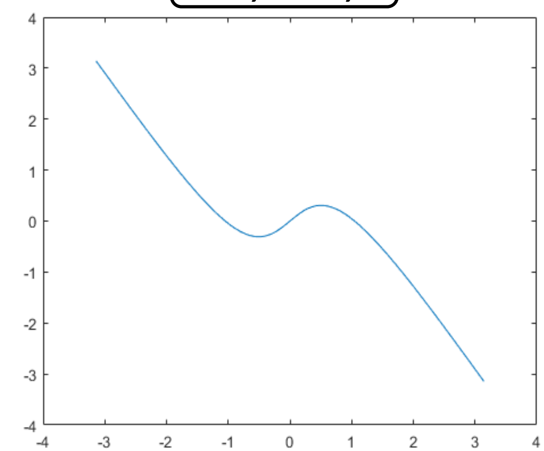
Είσοδος



Σύστημα



Έξοδος



Συνεχίζεται... ☺