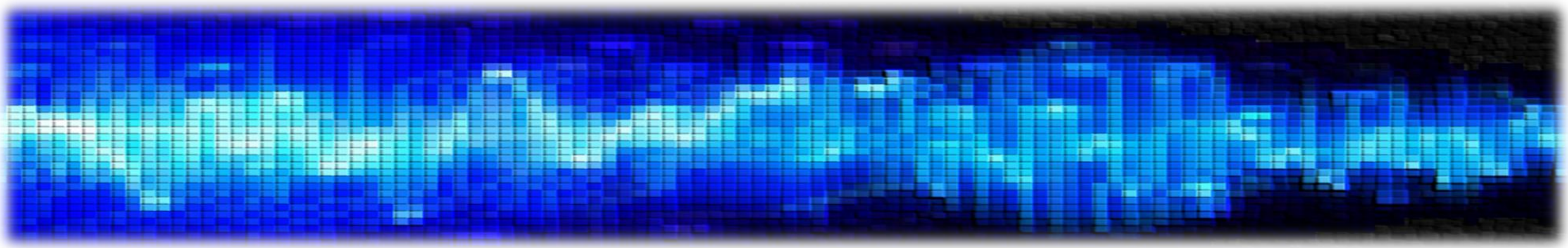
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 8^{Η}



- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

  - Ο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ’ αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους (Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης (Phase Spectrum)

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

  - Αν το σήμα που αναλύεται είναι πραγματικό, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

  - Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x\left(e^{-j\omega}\right)$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

  - Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

  - Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα [0, π] !!!

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη**

  - Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

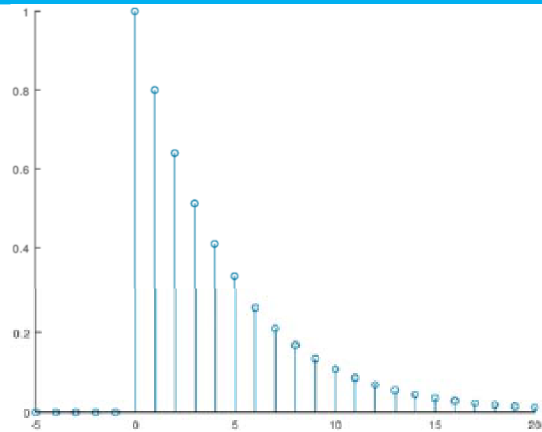
$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

  - Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος

  - Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η *μέση τετραγωνική σύγκλιση*



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n],\ |a| < 1$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a\cdot e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad |a\cdot e^{-j\omega}|<1 \Rightarrow |a|<1$$

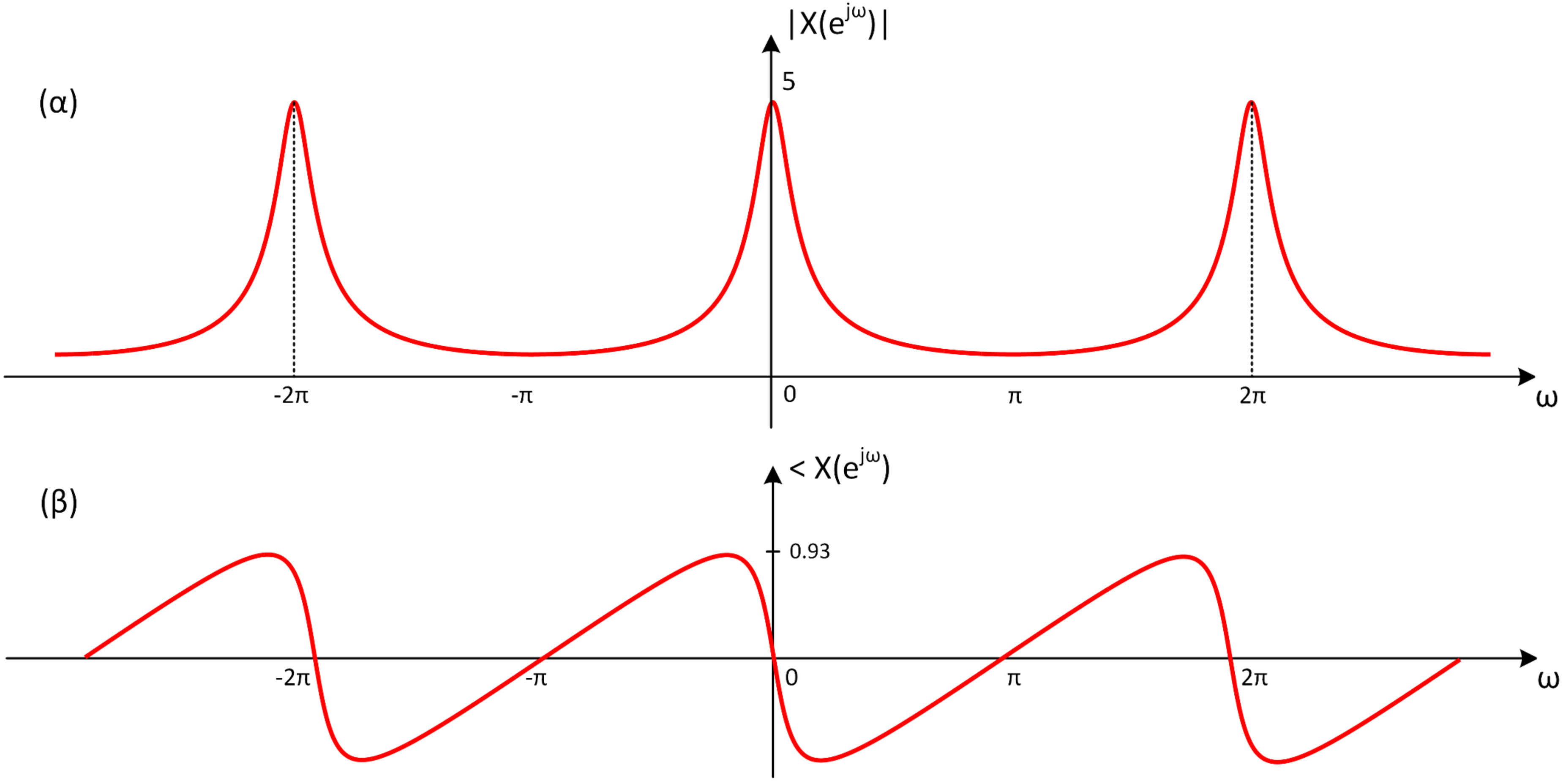
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1-ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{|1-a\cos\omega - ja\sin\omega|} = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + a^2}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-ae^{j\omega}}{|1-ae^{-j\omega}|} = \frac{1-a\cos\omega}{|1-ae^{-j\omega}|} - j\frac{a\sin\omega}{|1-ae^{-j\omega}|} \Rightarrow \measuredangle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{-a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a = 0.8 = \frac{4}{5}$

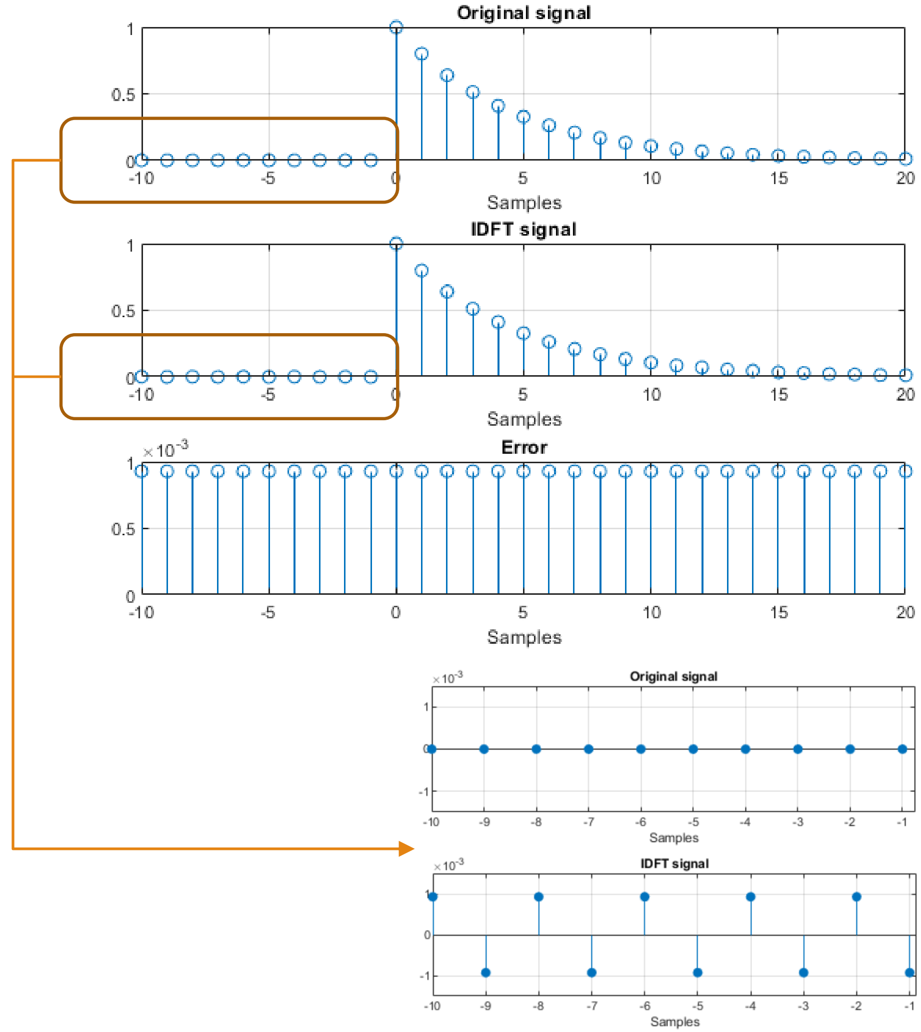


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

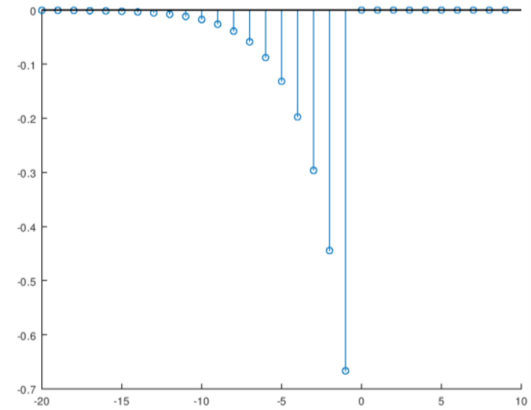
Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8;
n = [-10:-1 0 1:20];
x = [zeros(1,10) alpha.^n(11:31)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1],\ |a| > 1$.



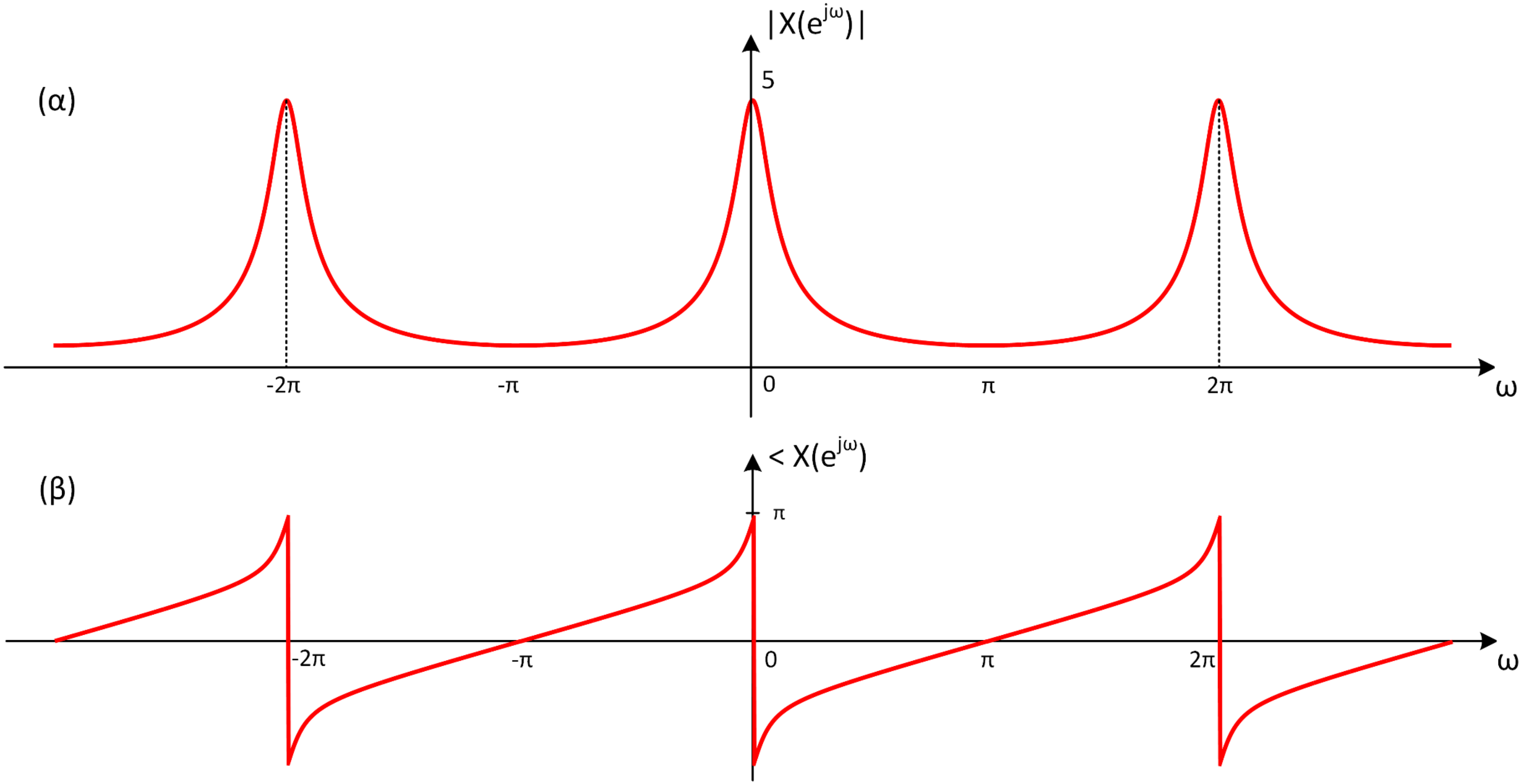
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] \cdot e^{-j\omega n} =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a e^{-j\omega})^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (a e^{-j\omega})^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} e^{j\omega})^n = -\frac{a^{-1}e^{j\omega}}{1-a^{-1}e^{j\omega}} =$$

$$= -\frac{\cancel{a^{-1}e^{j\omega}}}{\cancel{a^{-1}e^{j\omega}}(ae^{-j\omega}-1)} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}},\quad |a|>1$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a = \frac{6}{5}$

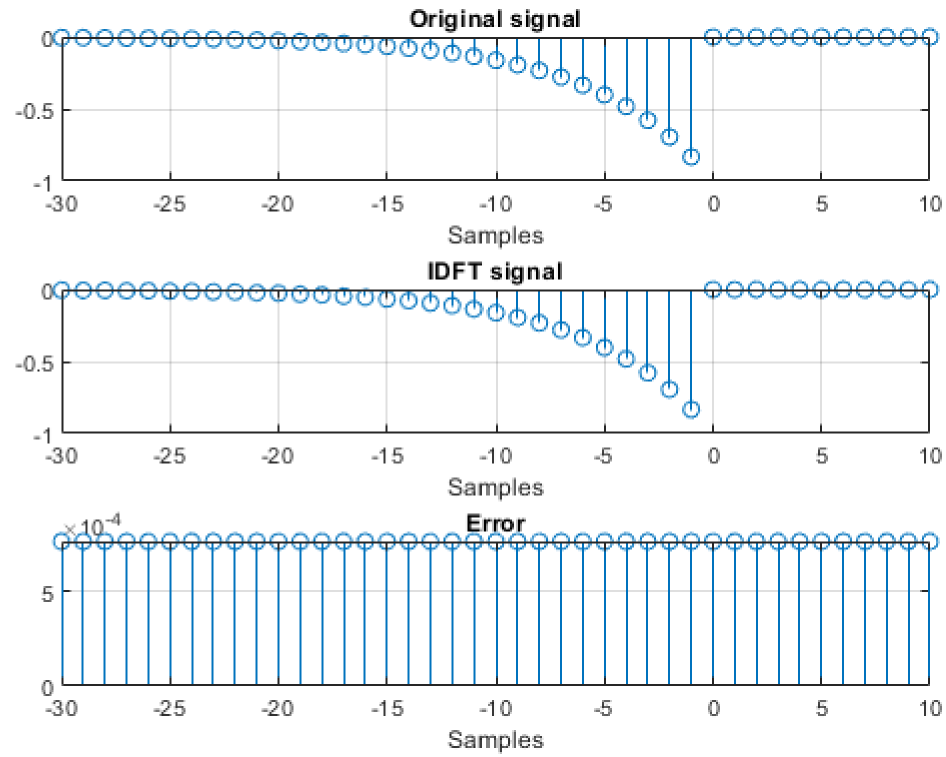


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

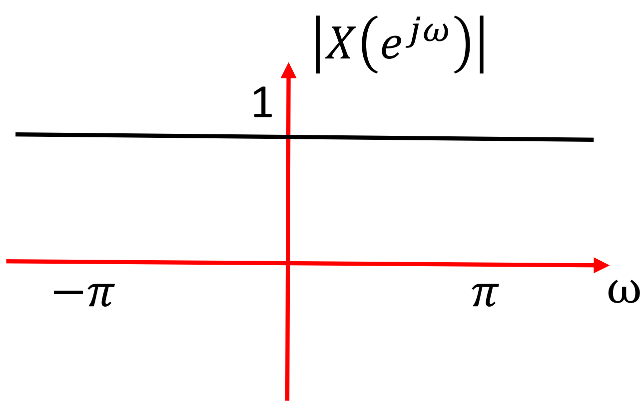
```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5;
n = [-30:-1 0 1:10];
x = [-alpha.^n(1:30) zeros(1,11)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```

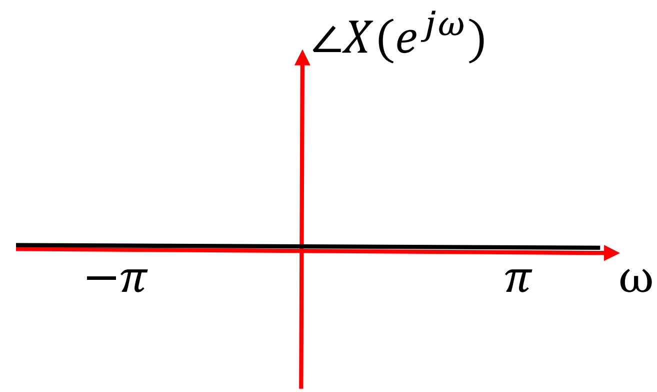


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1 \quad \forall \omega$$

$$\delta[n] \xrightarrow{F} 1$$



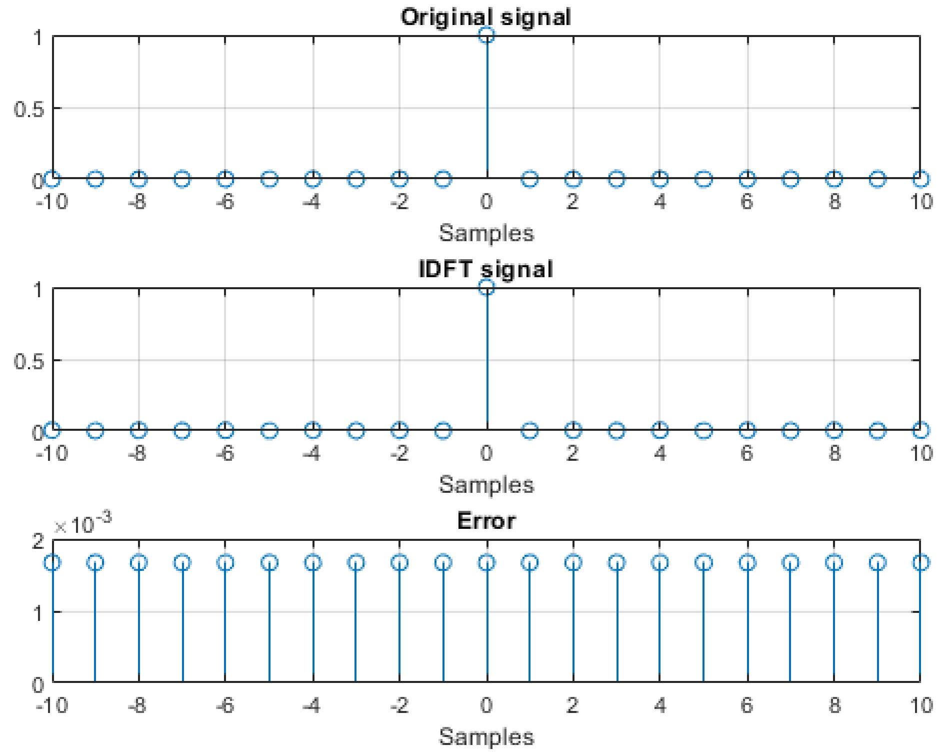


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

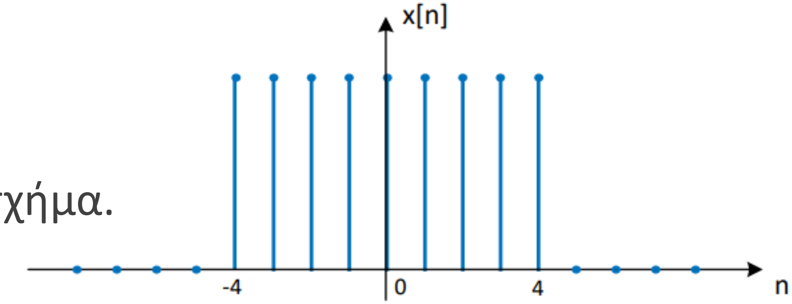
Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,10) 1 zeros(1,10)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = 1 για κάθε ω
X = ones(size(w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

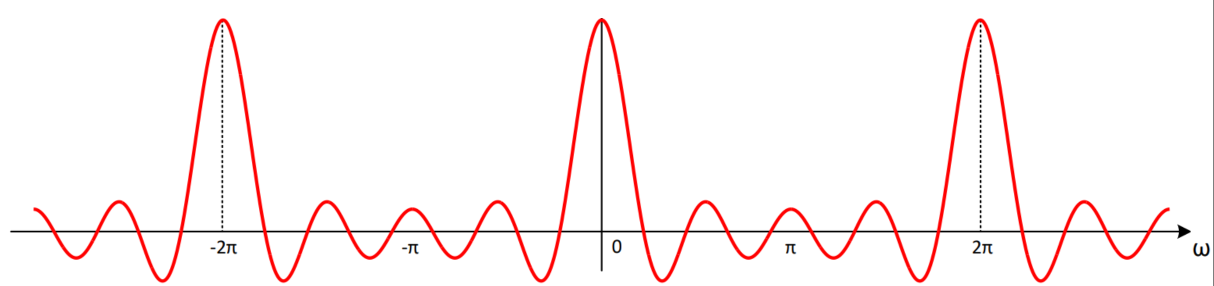


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega(-4)} - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{e^{j4\omega} - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\cancel{e^{-j\omega/2}}}{\cancel{e^{-j\omega/2}}}\, \frac{e^{j\frac{9\omega}{2}} - e^{-j\frac{9\omega}{2}}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{\cancel{2j}\,\sin(9\omega/2)}{\cancel{2j}\,\sin(\omega/2)} =$$

$$= \frac{\sin(9\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Μ.Σ. $\frac{9\omega_k}{2} = \pm k\pi \Rightarrow \omega_k = \pm \frac{2\pi}{9} \cdot k$

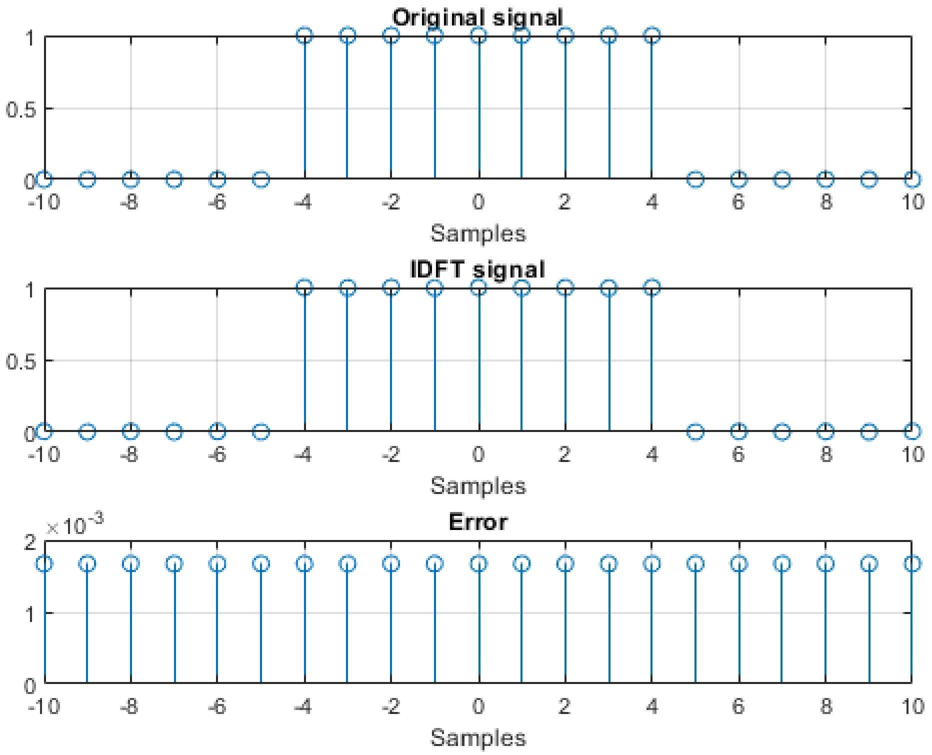


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

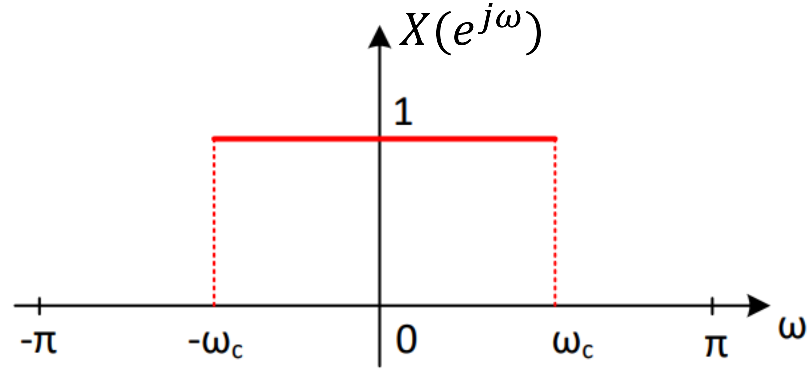
Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,6) ones(1,9) zeros(1,6)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = sin(9ω/2)/sin(ω/2)
% για κάθε ω
X = sin(9*w/2)./sin(w/2);

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



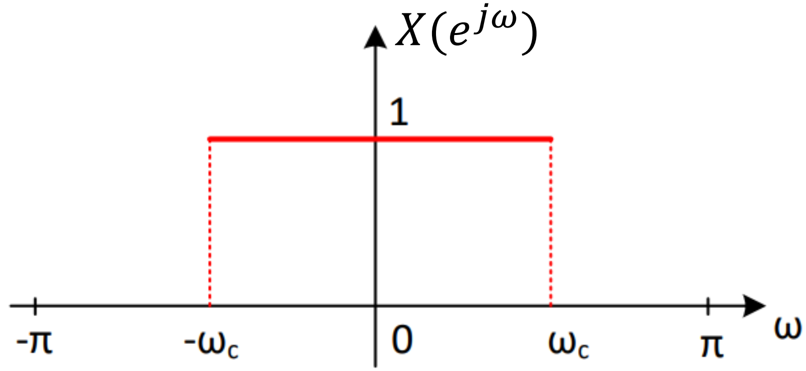
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



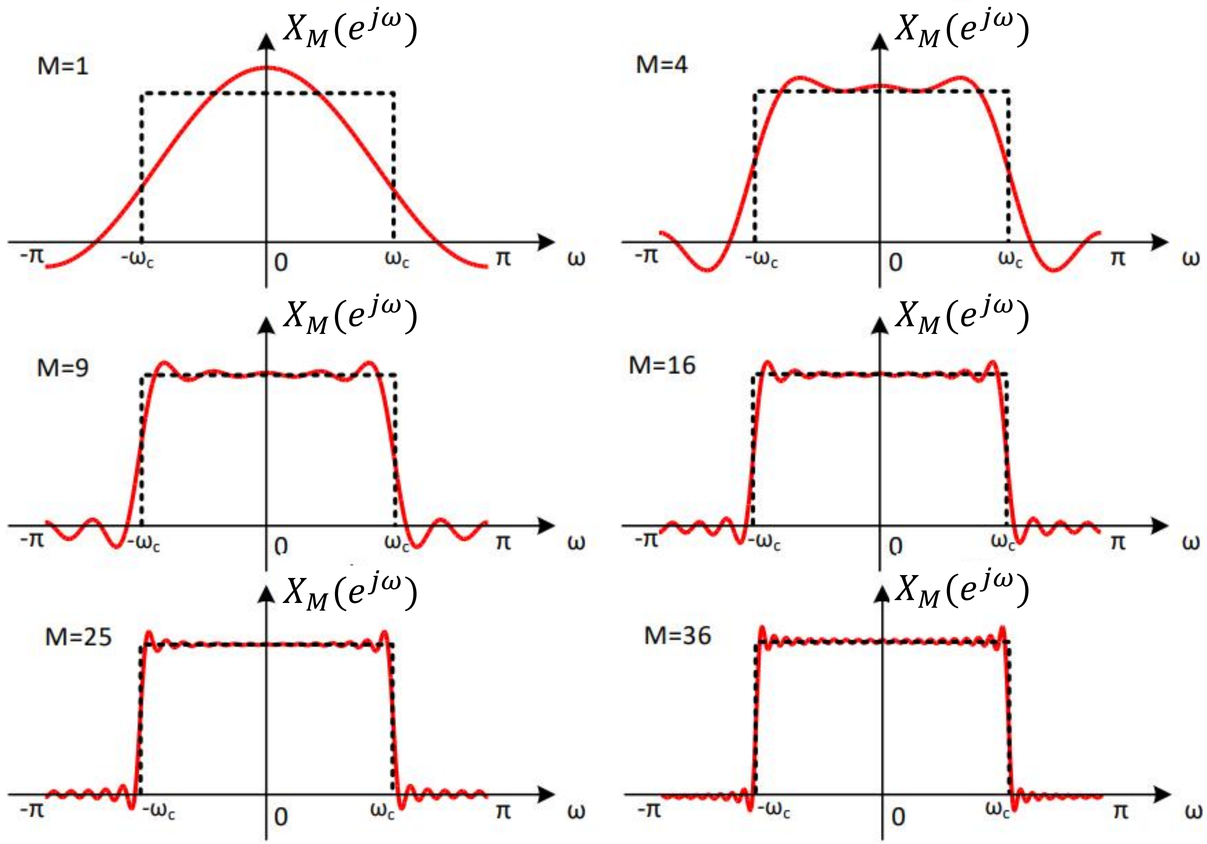
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j n}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\pi n \cdot \cancel{2j}} \cdot \cancel{2j}\, \sin(\omega_c n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

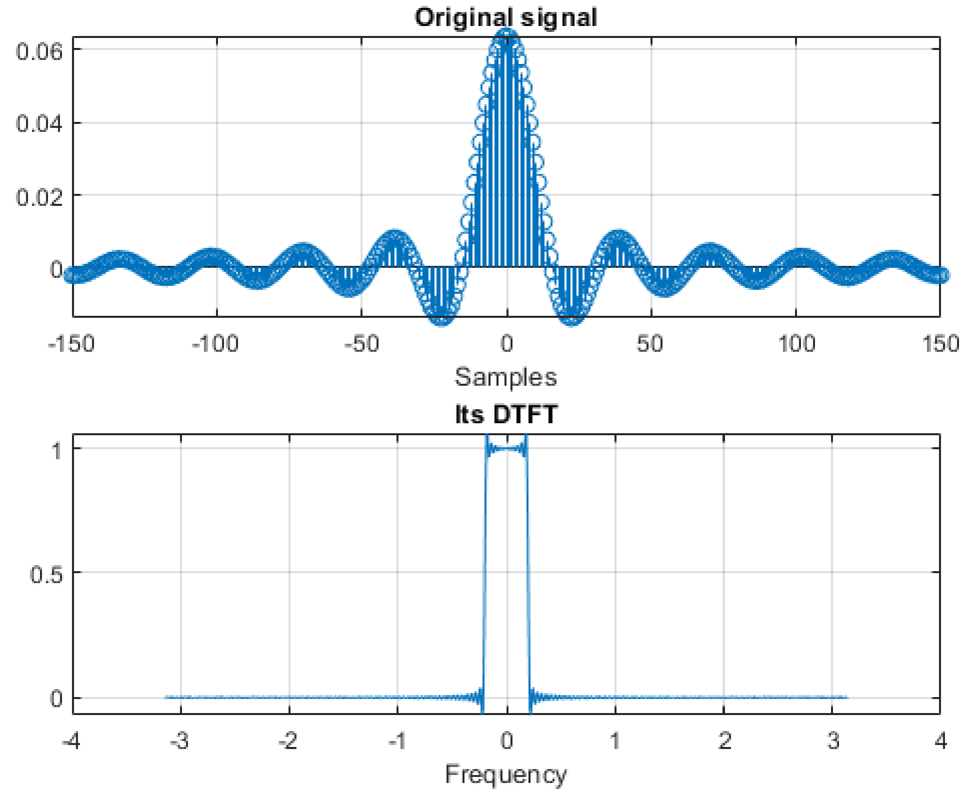


Έστω ότι παίρνω $2M + 1$ δείγματα του σήματος $x[n]$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-150:150];
wc = 0.2;
x = sin(wc*n)./(pi*n);
% Ρύθμιση απροσδιοριστίας
x(151) = wc/pi;

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);

% Σύνθεση του X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = zeros(size(w));

for i = 1:length(n)
    X_syn = X_syn + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X_syn);
title('Its DTFT'); xlabel('Frequency'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Ως τώρα, τα σήματα που εξετάσαμε ήταν σήματα ενέργειας
  - Ο μετασχ. Fourier συγκλίνει για αυτά τα σήματα
  - Όμως ενδιαφέρον έχουν και τα σήματα ισχύος
  - Γι’αυτά, ο μετασχ. Fourier δε συγκλίνει
  - Μπορούμε όμως να ορίσουμε με κάποιο τρόπο το μετασχ. Fourier τους?
    - …ίσως με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων?

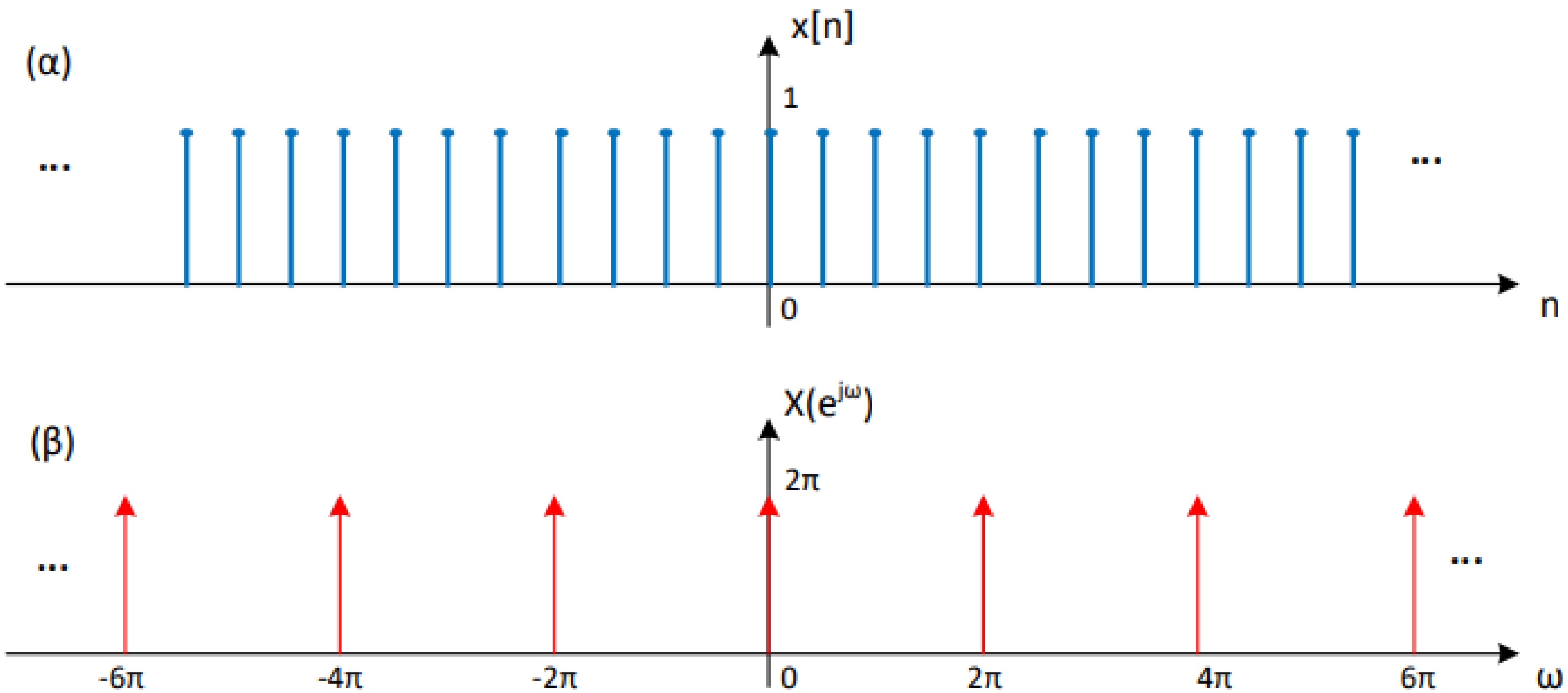
$$\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο IDTFT του σήματος $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega), \quad \omega \in (-\pi, \pi]$.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\,\delta(\omega)\cdot e^{j\omega n}\, d\omega =$$

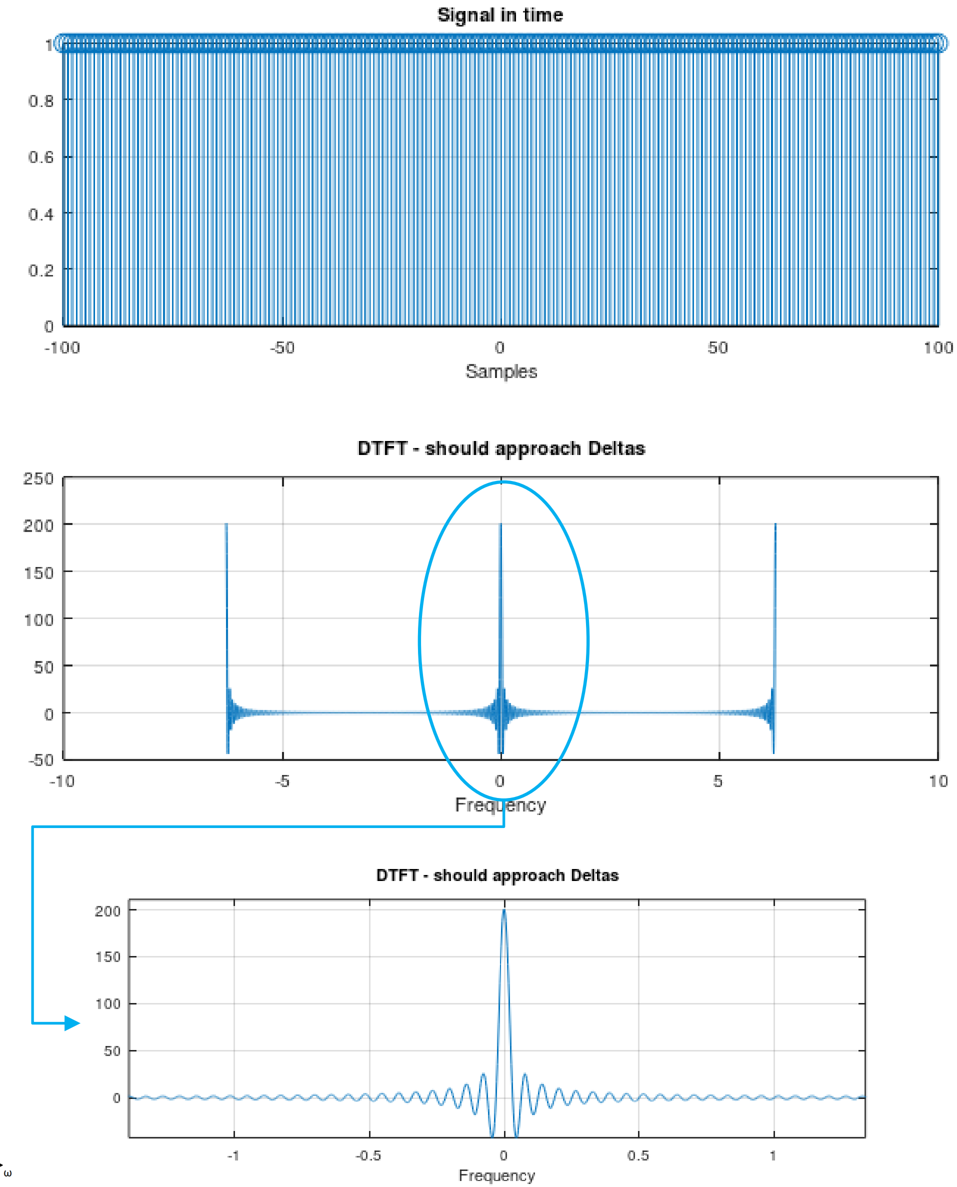
$$= e^{j0n} = 1$$

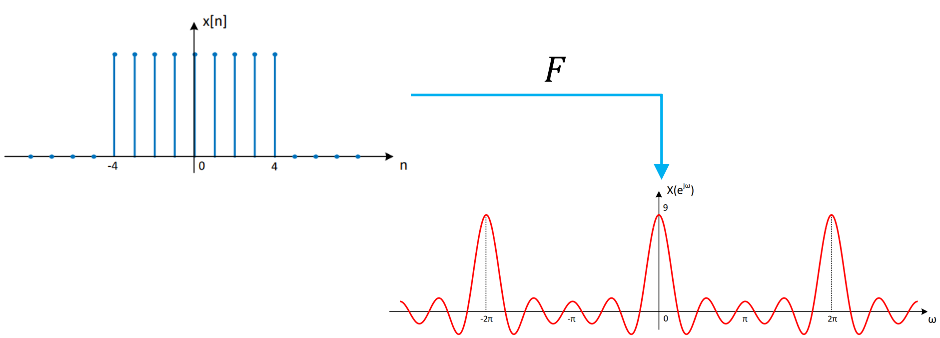
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = -100:100;
x = ones(size(n));

% DTFT
w = linspace(-2*pi, 2*pi, 5000);
X = zeros(size(w));

for i=1:length(n)
  X = X + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% Απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Signal in time');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X);
title('DTFT - should approach Deltas'); grid;
xlabel('Frequency');
```



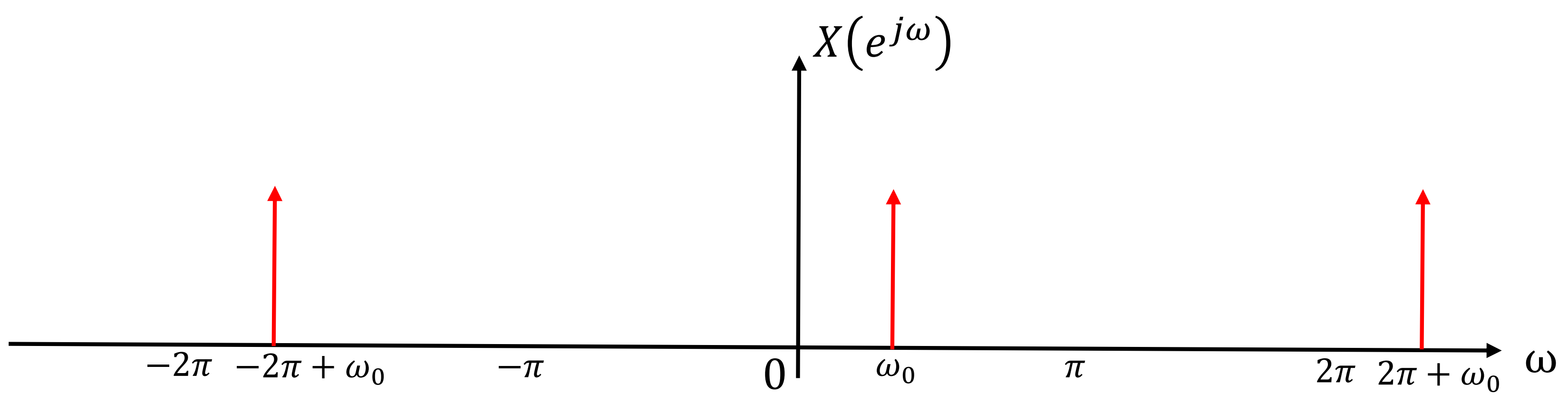


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \ \forall n, \ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

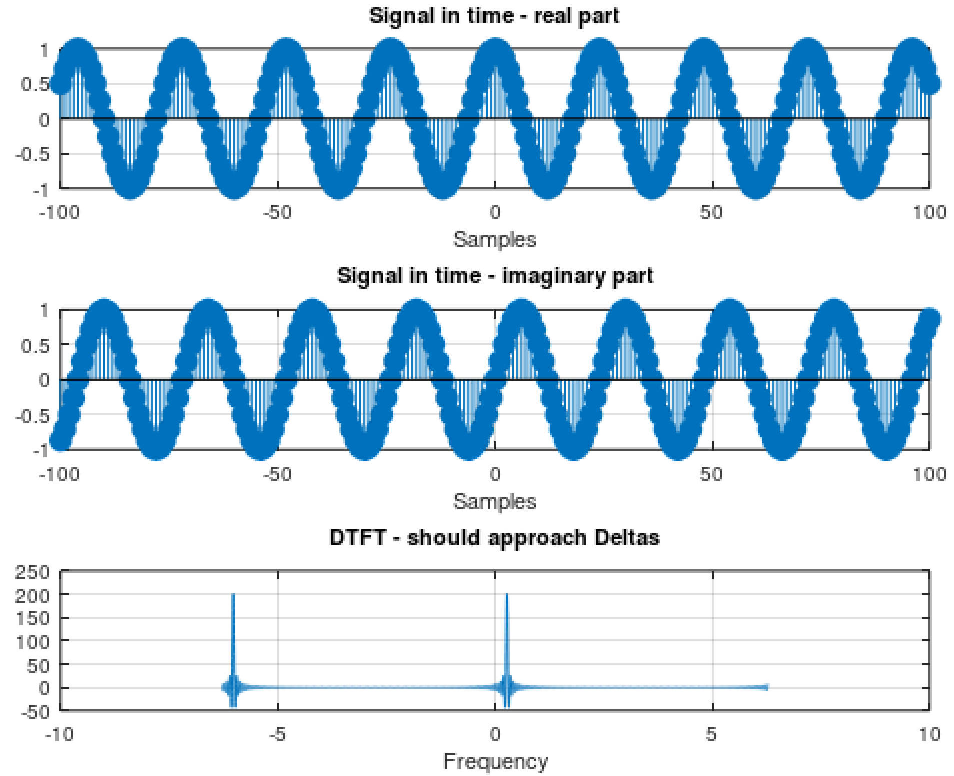
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\,\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega n}\,d\omega =$$

$$= e^{j\omega_0 n}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = -100:100;
w0 = pi/12;
x = exp(j*w0*n);

% DTFT
w = linspace(-2*pi, 2*pi, 5000);
X = zeros(size(w));

for i=1:length(n)
  X = X + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% Απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,real(x),'filled');
title('Signal in time - real part');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n,imag(x),'filled');
title('Signal in time - imaginary part');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); plot(w, X);
title('DTFT - should approach Deltas'); grid;
xlabel('Frequency');
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$, $\forall\, n,\ \omega_0, \phi \in (-\pi, \pi]$.

$$x[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \Rightarrow F\{e^{j\omega_0 n}\} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

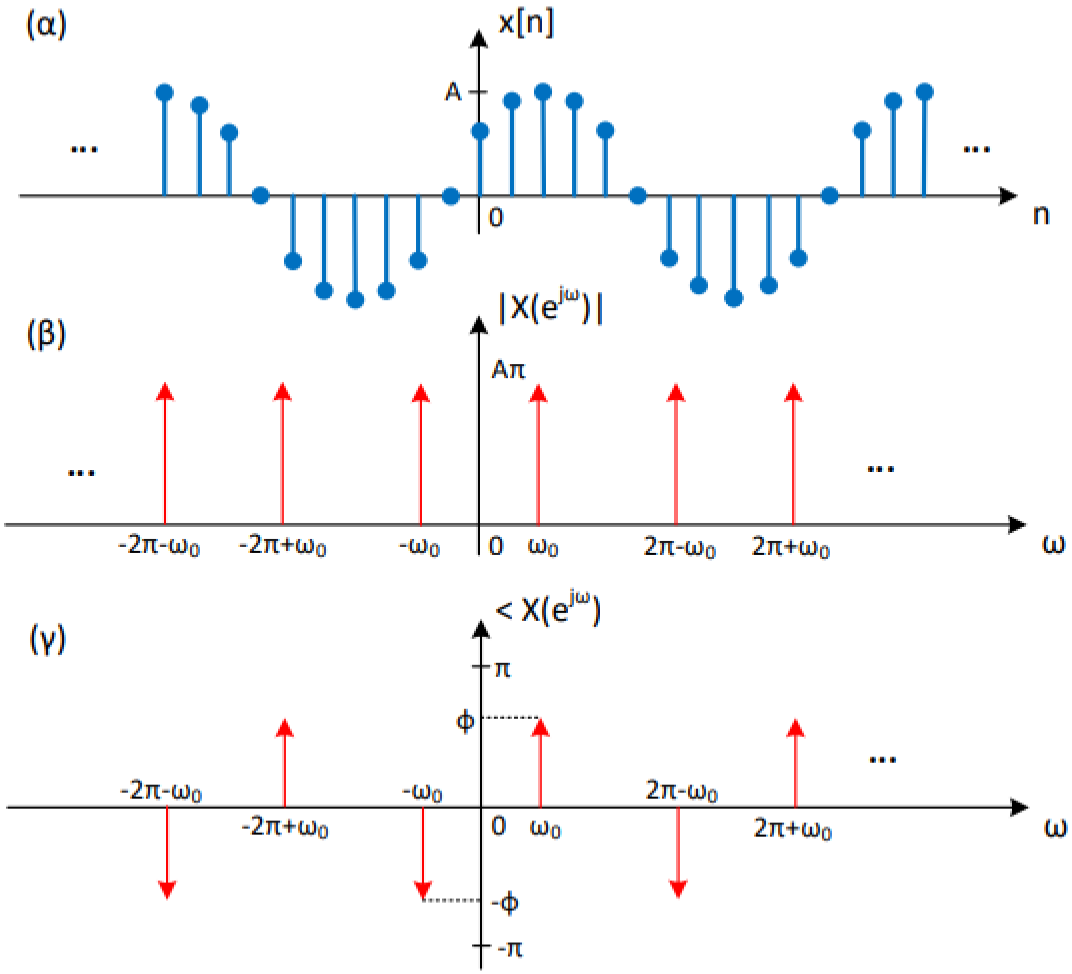
Άρα

$$F\{x[n]\} = F\left\{\frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 n}\right\} + F\left\{\frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega_0 n}\right\} =$$

$$= \frac{A}{\cancel{2}} e^{j\varphi} \cdot \cancel{2}\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \frac{A}{\cancel{2}} e^{-j\varphi} \cdot \cancel{2}\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\Rightarrow F\{A\cos(\omega_0 n + \varphi)\} = A \cdot e^{j\varphi} \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + A \cdot e^{-j\varphi} \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

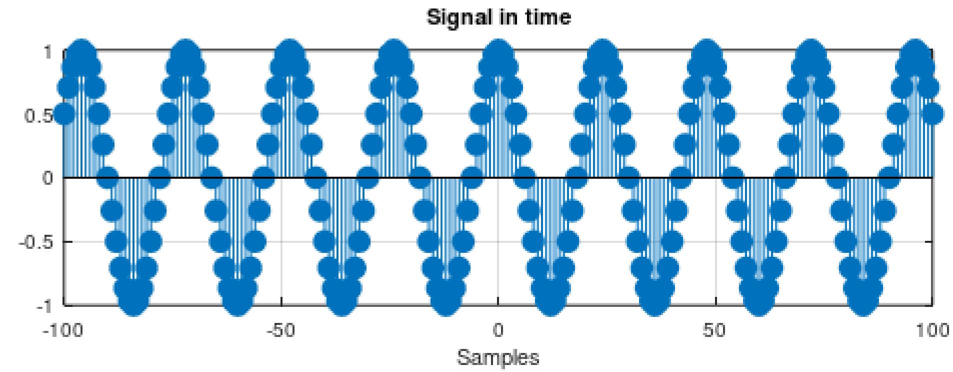
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

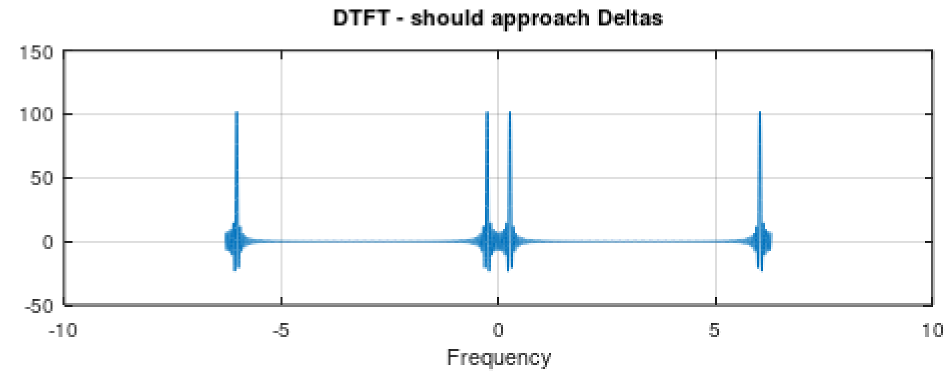


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = -100:100;
w0 = pi/12;
x = cos(w0*n);

% DTFT
w = linspace(-2*pi, 2*pi, 5000);
X = zeros(size(w));

for i=1:length(n)
  X = X + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% Απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x,'filled');
title('Signal in time');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X);
title('DTFT - should approach Deltas'); grid;
xlabel('Frequency');
```



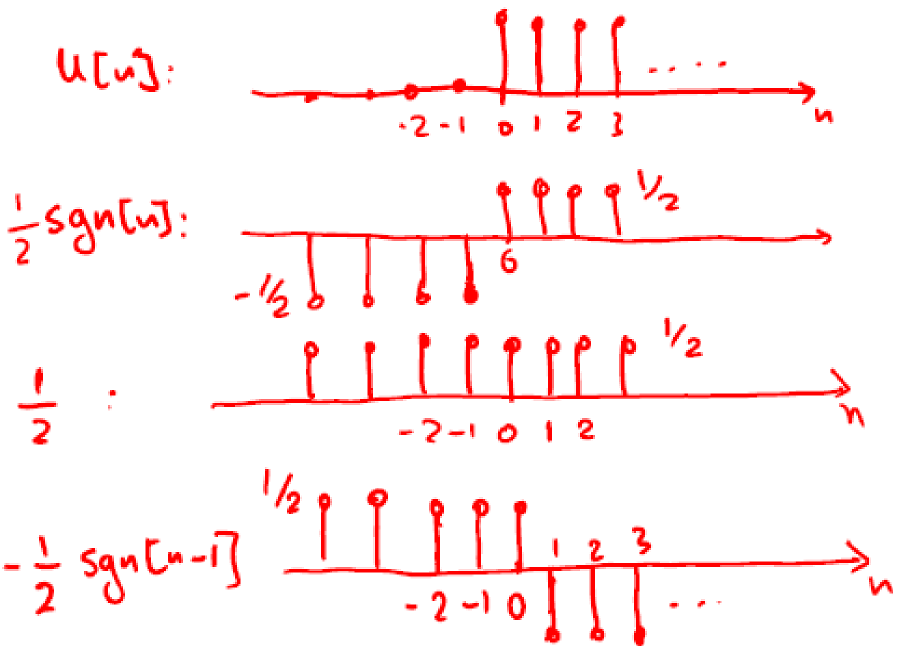


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.

$1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$

$c \xrightarrow{F} c \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega)$

$\delta[n] \xrightarrow{F} 1 \quad \forall \omega$



$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow F\{u[n]\} = F\{\tfrac{1}{2}\} + F\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\} =$

$= \pi\delta(\omega) + \underbrace{F\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\}}_{S(e^{j\omega})}$

$\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n] - \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n-1] = \delta[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow F\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n]\} - F\{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}[n-1]\} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} S(e^{j\omega}) = 1 \Rightarrow S(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$

Άρα $F\{u[n]\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Οι σχέσεις ισχύουν για $-\infty < \omega < +\infty$

Για να πάρετε τις σχέσεις που αποδείξαμε ($-\pi < \omega < \pi$), θέστε $k = 0$ και βγάλτε τα αθροίσματα (όπου υπάρχουν)

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n\sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \lvert r\rvert<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c \\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\le\pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0\le n\le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

Συνεχίζεται... ☺