Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Απόκριση σε Συχνότητα (ή Συχνοτική Απόκριση)

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος – Επανάληψη…**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  - Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος – Επανάληψη…

- Η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{j\omega}\right) + jH_I\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{H}(e^{j\omega})}$$

με

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{H_I\left(e^{j\omega}\right)}{H_R\left(e^{j\omega}\right)}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα – Επανάληψη…**

$f(x) = f(-x)$ → άρτια συνάρτηση
$f(x) = -f(-x)$ → περιττή συνάρτηση

- Αν η κρουστική απόκριση είναι **πραγματική** συνάρτηση του n, τότε

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)\right| = \left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}}\right)\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi_H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right) = -\boldsymbol{\varphi_H}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}})$$

- Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

- **Απόκριση σε Συχνότητα – Επανάληψη…**

  - Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}$, $A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)}$$

  - Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει **πραγματική** κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} \left|H\left(e^{j\omega_k}\right)\right| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

Απόκριση σε Συχνότητα

- Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος
- Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π!
- Πράγματι

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}e^{j2\pi}\right) = H(e^{j\omega})$$

- Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
  - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της
- Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
  - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συντελεστές $h[n]$
  - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π-περιοδικά στη συχνότητα
- Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

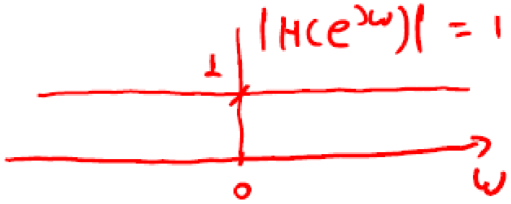
- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \Rightarrow y[n] = x[n-n_d] = e^{j\omega_0 (n-n_d)} = \underbrace{e^{-j\omega_0 n_d}}_{H(e^{j\omega_0})} e^{j\omega_0 n}$$

$$\forall \omega : \quad H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad \forall \omega$$

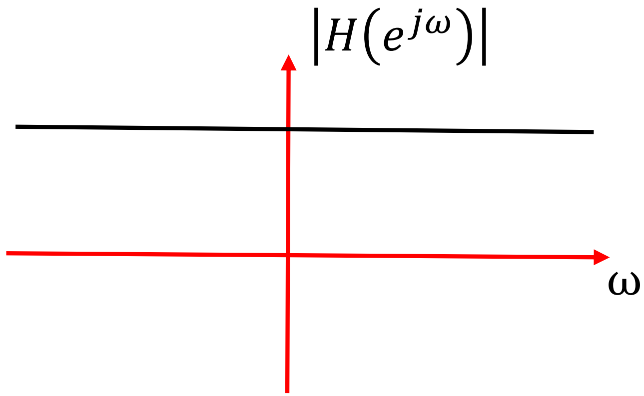
$$\varphi_H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$$

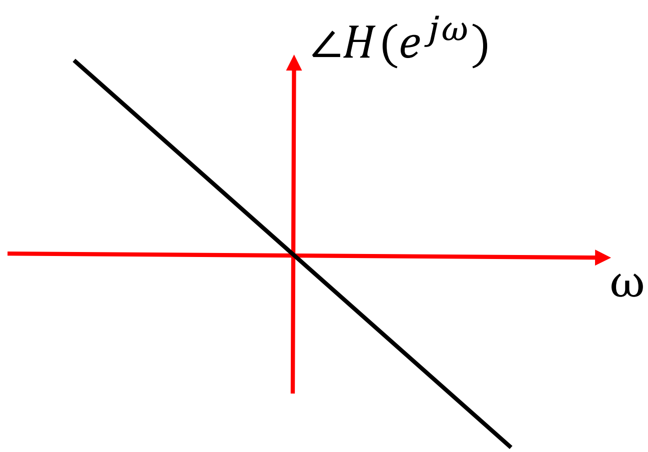


Έστω: $x[n] = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8}\right) \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow y[n] = |H(e^{j\pi/3})| \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} - \underbrace{\frac{\pi}{3} \cdot 3}_{\varphi_H(e^{j\pi/3})}\right) \Rightarrow y[n] = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{8}\right)$

$n_d = 3$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:





- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

*Hint: $1 + e^{a+b} = e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{-\frac{a+b}{2}} + e^{\frac{a+b}{2}}\right)$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1+M_2+1} \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{M_1+M_2+1} \cdot \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{M_1+M_2+1} \cdot \frac{e^{j\omega\left(\frac{M_1-M_2-1}{2}\right)}}{e^{-j\omega/2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{e^{j\omega\left(\frac{M_1+M_2+1}{2}\right)} - e^{-j\omega\left(\frac{M_1+M_2+1}{2}\right)}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{1}{M_1+M_2+1} e^{j\omega\left(\frac{M_1-M_2}{2}\right)} \cdot$$

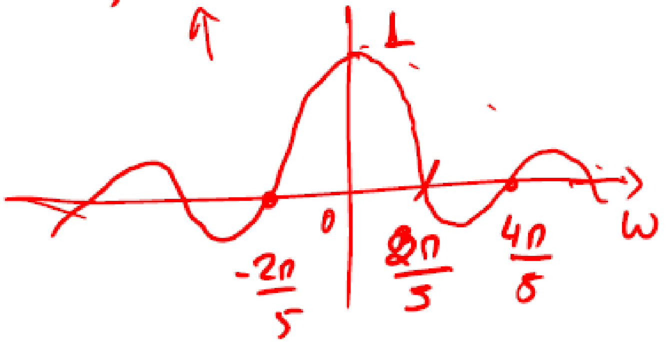
$$\cdot \frac{\cancel{2j} \sin(\omega(M_1+M_2+1)/2)}{\cancel{2j} \sin(\omega/2)} \Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1+M_2+1} \cdot e^{j\omega\left(\frac{M_1-M_2}{2}\right)} \frac{\sin(\omega(M_1+M_2+1)/2)}{\sin(\omega/2)}}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$M_1 = 2$
$M_2 = 2$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1+M_2+1} \cdot e^{j\omega\left(\frac{M_1-M_2}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_1+M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5} \cdot \left|\frac{\sin\left(5\frac{\omega}{2}\right)}{\sin(\omega/2)}\right|$$



$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \varphi_H(e^{j\omega}) = \pm\pi$$

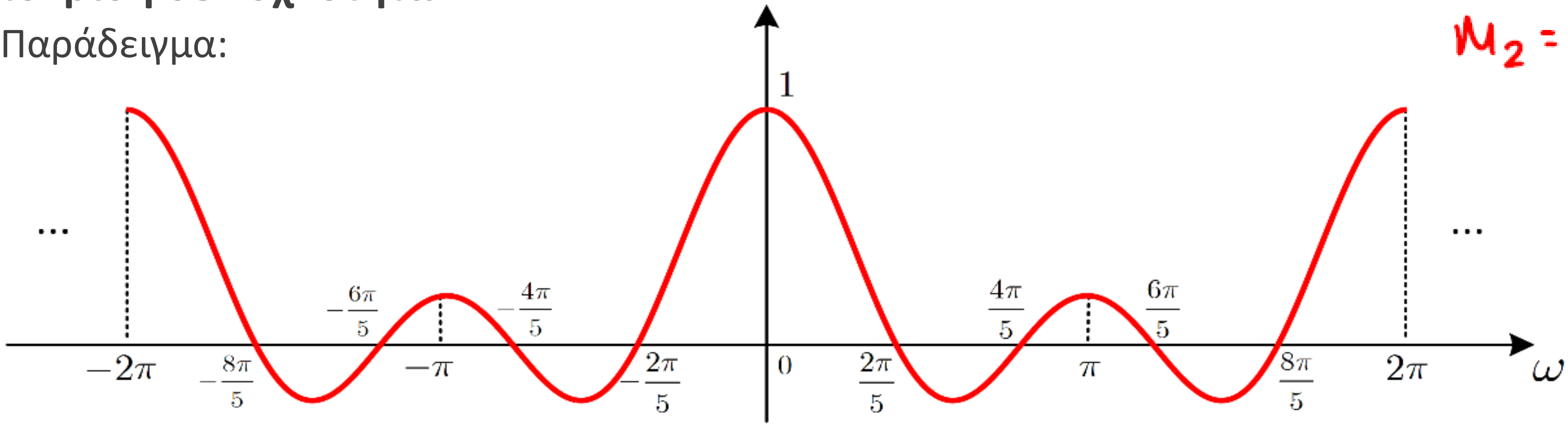
$$H(e^{j0}) = \frac{1}{5} \cdot \lim_{\omega\to 0} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} = \frac{1}{5} \lim_{\omega\to 0} \frac{5/2\ \cos(5\omega/2)}{1/2\ \cos(\omega/2)} = \frac{1}{5}\, 5 = 1$$

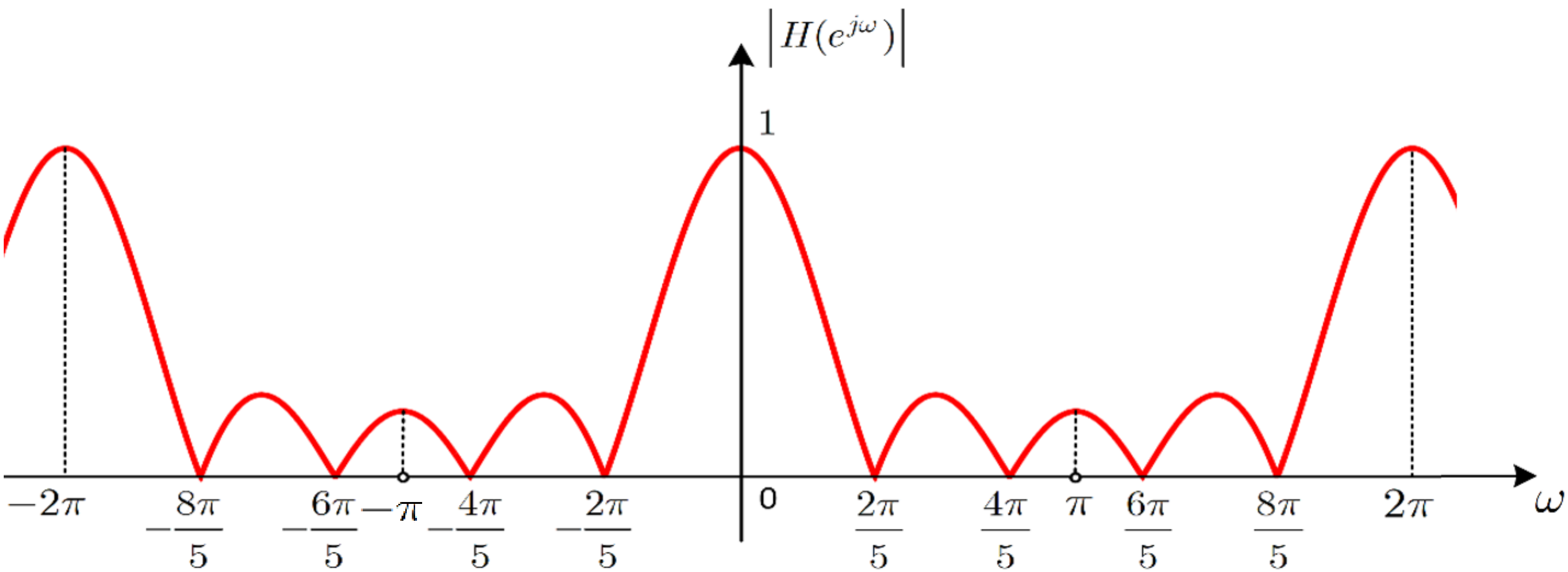
$$\sin(5\omega/2) = 0 \Rightarrow \frac{5\omega}{2} = k\pi \Rightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{5} \cdot k$$

$M_1 = 0$

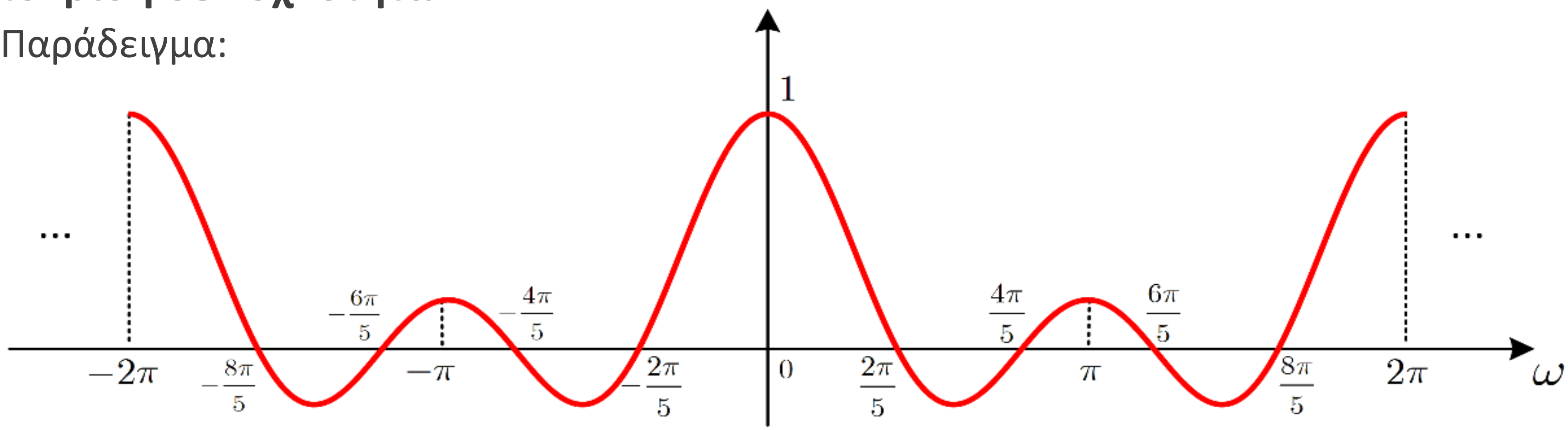
$M_2 = 4$

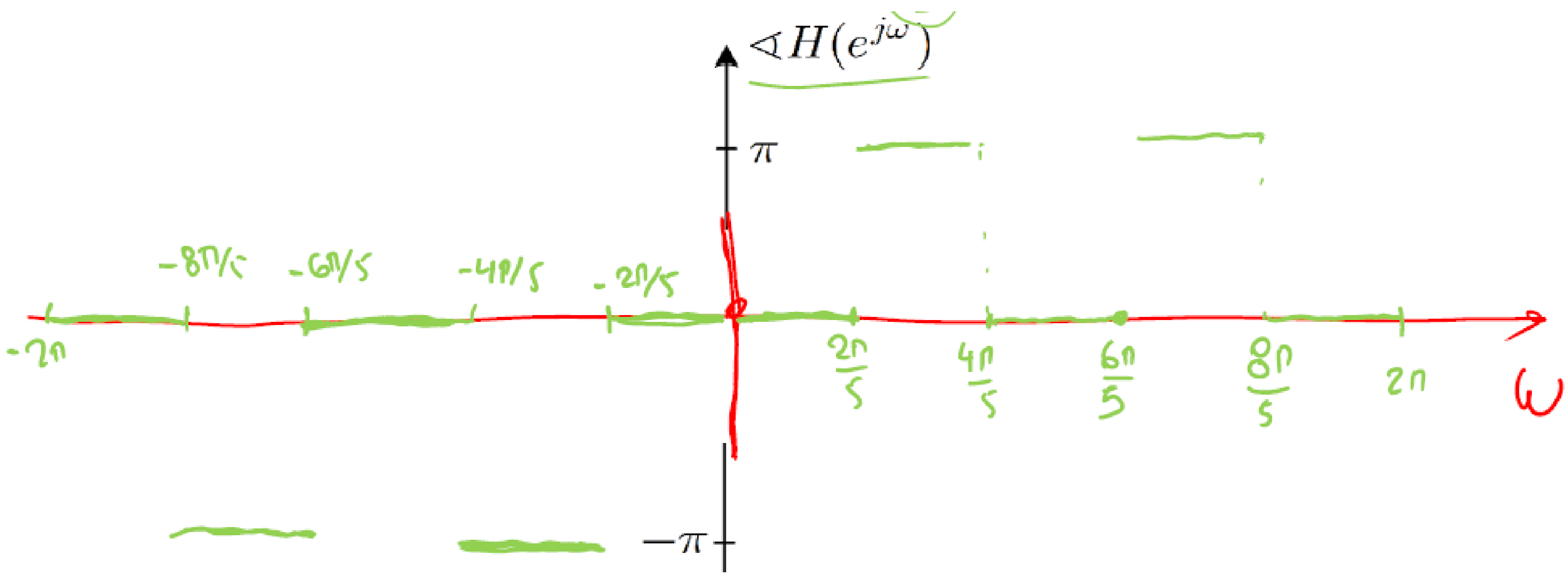
- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



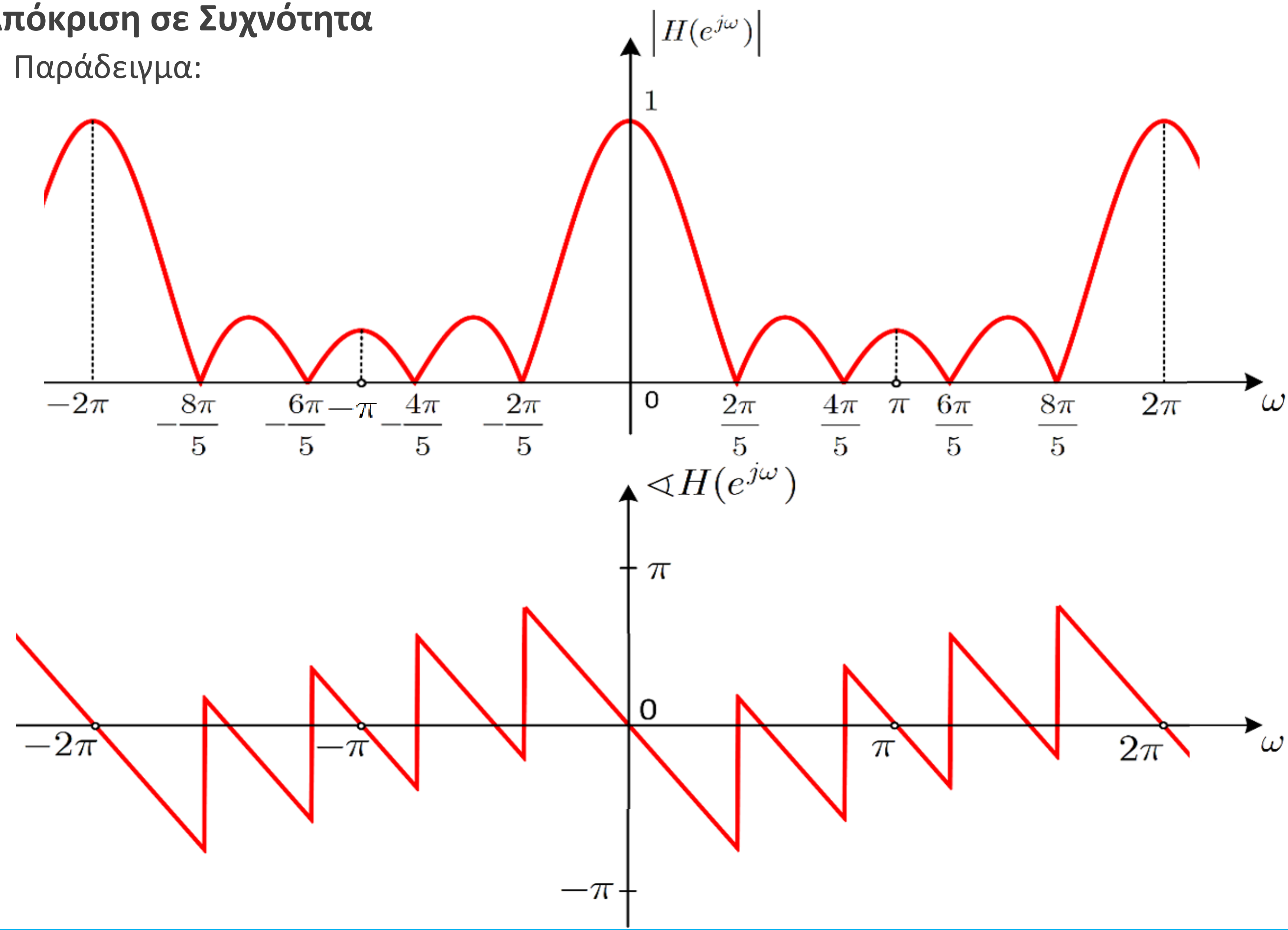


- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:





- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



Συνεχίζεται... ☺