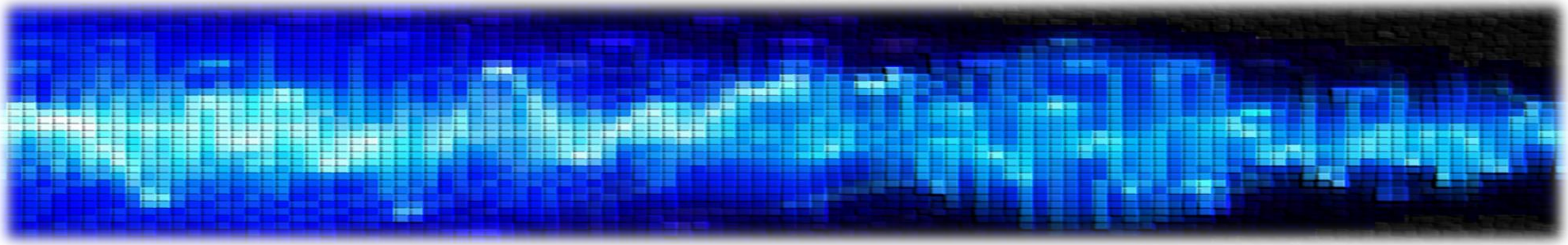
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 3Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

ένα σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου όσο και της εξόδου

  - Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

  - Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1], y[-2]$

  - Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

  ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

  - Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος

  - Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση

  - Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
    - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
    - Ένα σύστημα που **δε** βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?

  - Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
    - Της απόκρισης **μηδενικής εισόδου** $y_{zi}[n]$ (zero input response)
    - Της απόκρισης **μηδενικής κατάστασης** $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

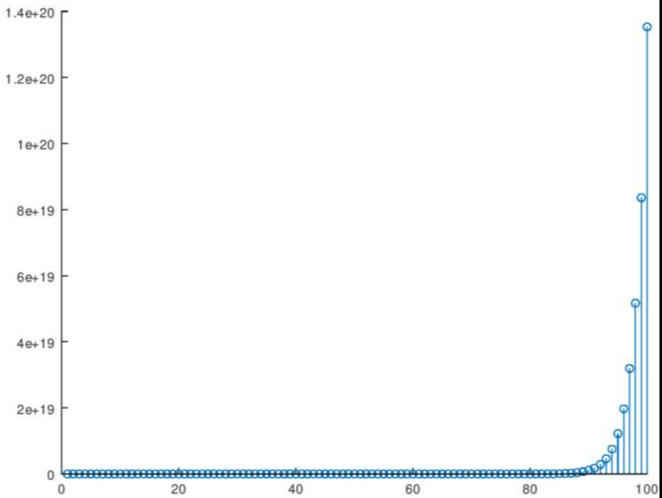
  - Η απόκριση **μηδενικής εισόδου** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία <u>μόνο</u> των αρχικών συνθηκών
    - **Επομένως: αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν**

  - Η απόκριση **μηδενικής κατάστασης** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
    - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$



αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$
$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$
$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$
$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$
$$\dots \dots$$

- Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

- Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου (οι οποίες μάλιστα μεγαλώνουν εκθετικά)!
  - Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά παραγωγής εξόδου άνευ εισόδου ☺

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \;\forall\; n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0$$

  - Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**
  - Μπορεί να δειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \qquad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

  - Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow c\gamma^n \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $\boldsymbol{y_{zi}[n]}$**

  - Δηλ. πρέπει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

  - Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1}\gamma^{-N+1} + \cdots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N}(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0$$

  - Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το θέσουμε ίσο με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

  - Παραγοντοποιώντας

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \ldots (\gamma - \gamma_{\mathrm{N}}) = 0$$

με $\gamma_i, = 1, \ldots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

  - Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \qquad c_2\gamma_2^n, \qquad c_3\gamma_3^n, \qquad \dots, \qquad c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Μπορεί να δειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \cdots + c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i\gamma_i^n, \qquad n \geq 0$$

  - Και τα c_i?

  - Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1$.

$$a_0 \gamma^2 + a_1 \gamma + a_2 = 0 \Rightarrow \gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \begin{cases} \to \gamma_1 = -2 \\ \to \gamma_2 = -3 \end{cases}$$

$$y_{zi}[n] = c_1 \cdot \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n = c_1 (-2)^n + c_2 (-3)^n$$

$$\left.\begin{aligned} y[-2] = 0 &\Rightarrow c_1 (-2)^{-2} + c_2 (-3)^{(-2)} = 0 \\ y[-1] = 1 &\Rightarrow c_1 (-2)^{-1} + c_2 (-3)^{-1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 4 \\ c_2 &= -9 \end{aligned}$$

Άρα $\quad y_{zi}[n] = 4(-2)^n - 9(-3)^n \quad , n \geq 0$

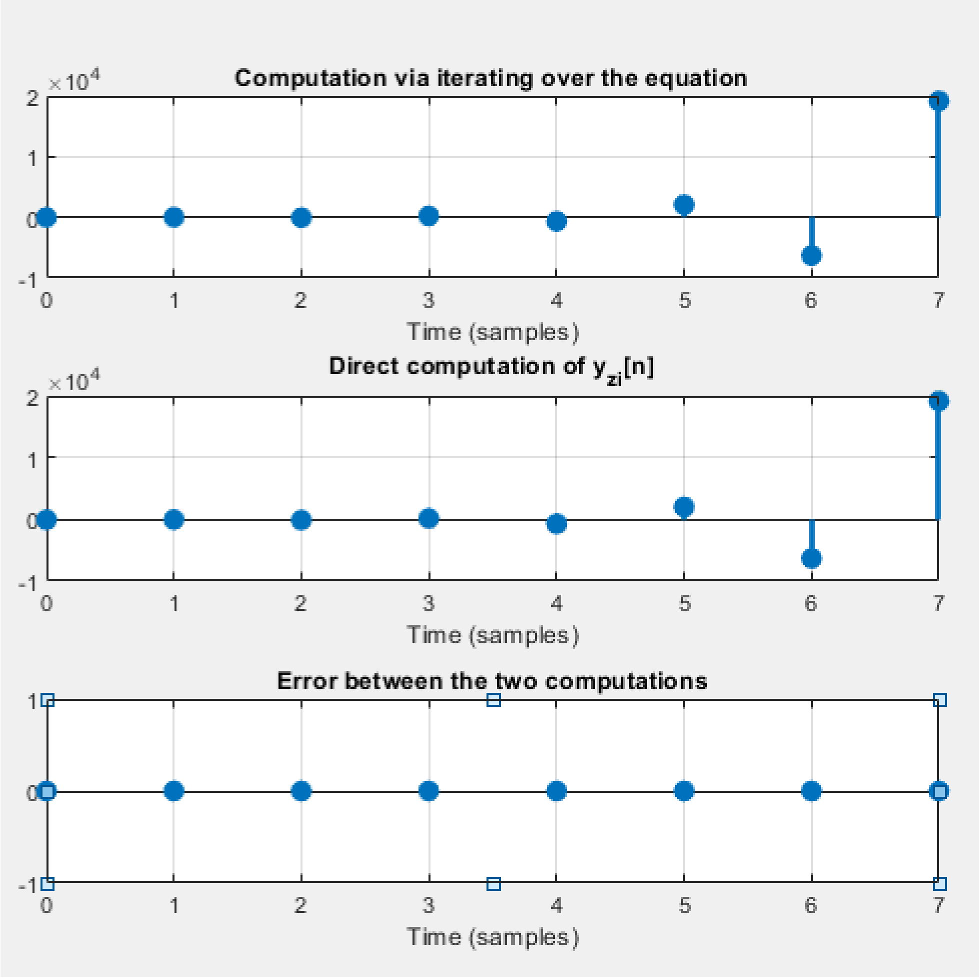
$$y_{zi}[n] = 4(-2)^n u[n] - 9(-3)^n u[n]$$

• Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$

- MATLAB:

2 από αυτά θα «καταναλωθούν» στις αρχικές συνθήκες, άρα θα παράξω 8 δείγματα

```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω?
N = 10;

% Αρχικοποίηση
y = zeros(1,N);

% Αρχικές συνθήκες y[-2] = 0, y[-1] = 1
y(1) = 0;
y(2) = 1;

% Μετράω από n=3 θεωρώντας ότ το y(3) είναι το y[0]
for n=3:N
y(n) = -5*y(n-1) - 6*y(n-2);
end

% Προβολή
figure; subplot(311);
stem(0:N-3, y(3:end));
title('Computation via iterating over the equation');
xlabel('Time (samples)');

n = 0:7;
yzi = 4*(-2).^n - 9*(-3).^n;
subplot(312); stem(n, yzi);
title('Direct computation of y_{zi}[n]');
xlabel('Time (samples)');

error = yzi - y(3:end);
subplot(313); stem(n, error);
title('Error between the two computations');
xlabel('Time (samples)');
```



- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0.$

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -\frac{1}{4} \\ \gamma_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y_{zi}[n] = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} y[-2]=1 \Rightarrow c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{(-2)} + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{(-2)} = 1 \\ y[-1]=0 \Rightarrow c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{(-1)} + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{(-1)} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $\boldsymbol{y_{zi}[n]}$**

  - Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (πολλαπλότητας ≥ 2), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

Αν

$$(\gamma - \gamma_1)^r (\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \dots (\gamma - \gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i n^{i-1} \gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{N} c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \qquad n \geq 0$$

• Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$

- Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος

- Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
  - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία

- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
  - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα

- Ποιο είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
  - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
    - Έχει "νόημα": η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
    - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{S_{\text{ΓΧΑ}}} \longrightarrow y[n] = h[n]$$

  - Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

  - Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα

  - Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα "θεωρήσουμε" ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$

  - Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

  - Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

  - Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1$$

$$a_0 h[0] + a_1 \cdot 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] = 1 \;\Leftrightarrow\; h[0] = \frac{1}{a_0}$$

  - Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!

  - Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \qquad n > 0$$

  - Ξέρουμε ότι

$$h[n] = c\gamma^n, \qquad n \geq 0$$

  - Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0\gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

  - Οπότε

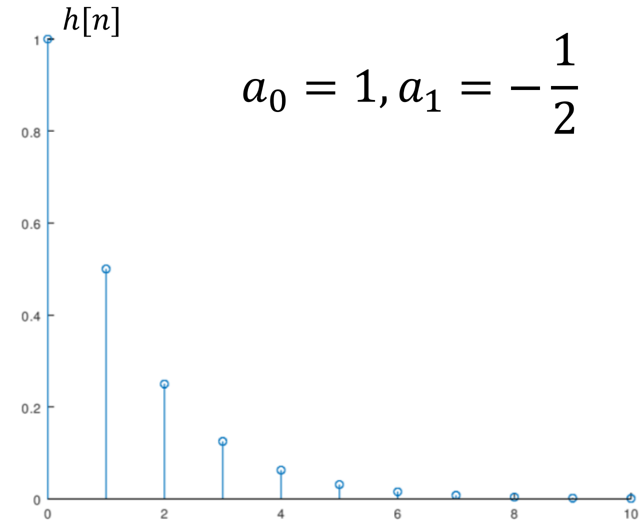
$$h[n] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

  - Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^0 = c = \frac{1}{a_0}$$

  - Άρα

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$



$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Θα μπορούσαμε να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών, ανεξαρτήτως τάξης

  - Όμως σίγουρα κάτι τέτοιο είναι αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό
    - Υπάρχει κάποια ευκολότερη μέθοδος;

  - Με άλλα λόγια, αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  τότε τι κάνουμε για να βρούμε την κρουστική απόκριση εύκολα και γρήγορα?

  - Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απάντηση

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$S_b\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$$

  με κρουστική απόκριση $h_b[n]$

  - Τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n]$$

  θα είναι $h_0[n] = b_0 h_b[n]$

  - Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_{0^-}\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n-l]$$

  θα είναι $h_{0^-}[n] = b_0 h_b[n-l]$

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Ακολουθώντας την ίδια λογική, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  θα είναι

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_b[n-l]$$

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (ομογένεια) μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, ενώ η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το δεύτερο στο τρίτο

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (αθροιστικότητα) μας επέτρεψε ξανά να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα

  - Και οι δυο ιδιότητες (ΓΧΑ) μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενικότερη απάντηση που βλέπετε παραπάνω

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

$$h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n]$$

$\underline{n=0}$ $\quad h[0] + \frac{5}{6}\cancel{h[-1]}^{0} + \frac{1}{6}\cancel{h[-2]}^{0} = 1 \Rightarrow h[0] = 1$

$\underline{n=1}$ $\quad h[1] + \frac{5}{6}h[0] + \frac{1}{6}h[-1] = 0 \Rightarrow h[1] = -\frac{5}{6}$

Χ.π. $\quad \gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -\frac{1}{3}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2}$

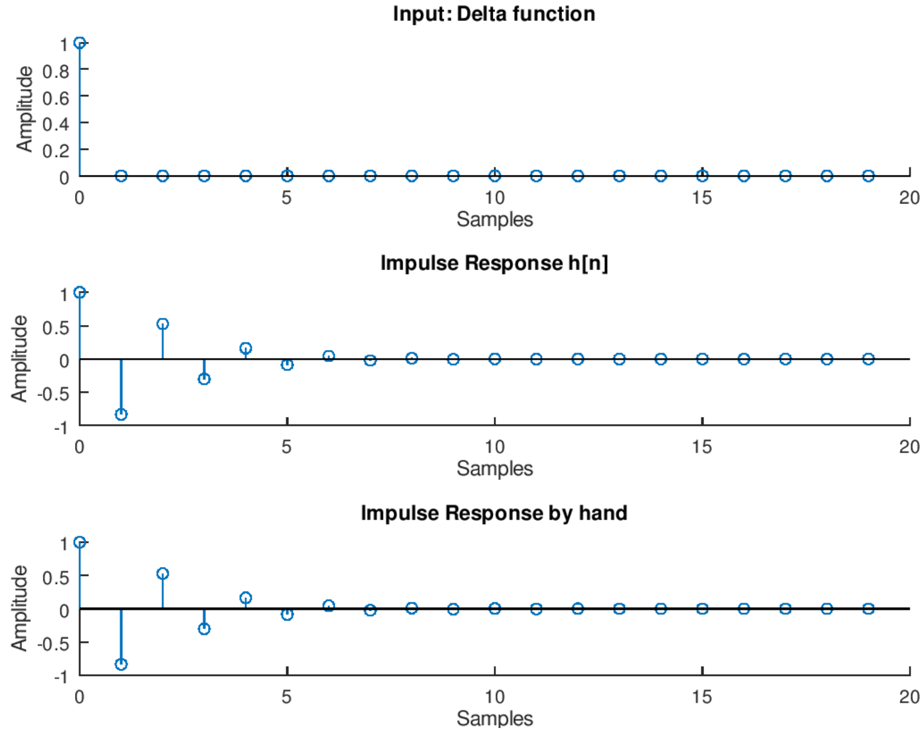
Άρα $\quad h[n] = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$\left.\begin{aligned} h[0] &= c_1 + c_2 = 1 \\ h[1] &= -\frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{2} = -\frac{5}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = -2, \quad c_2 = 3$$

$\Rightarrow h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \; n \geq 0$

$h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - MATLAB:




```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω;
N = 20;

% Αρχικοποίηση
h = zeros(1, N);

% "Ψευδοαρχικές" συνθήκες
h(1) = 1;
h(2) = -5/6;

% Είσοδος: συνάρτηση Δέλτα
x = [1, zeros(1,N-1)];

% Μετράω από n=3
for n=3:N
  h(n) = -5/6*h(n-1) - 1/6*h(n-2); % το x[n] δε χρειάζεται εδώ (είναι πάντα 0)
end

% Γραφήματα
figure; subplot(311);
stem(0:N-1, x); title('Input: Delta function');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

subplot(312); stem(0:N-1, h); title('Impulse Response h[n]');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

n = 0:N-1;
h_hand = -2*(-1/3).^n + 3*(-1/2).^n;
subplot(313); stem(n, h_hand); title('Impulse Response by hand');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');
```

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Παρατηρήσεις:

1. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=2x[n]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n]=2h[n]=2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n]$$

2. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n]+\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=4x[n]-2x[n-2]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n]=4h[n]-2h[n-2]$$

$$=4\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n]-2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}+3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]u[n-2]$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ