

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

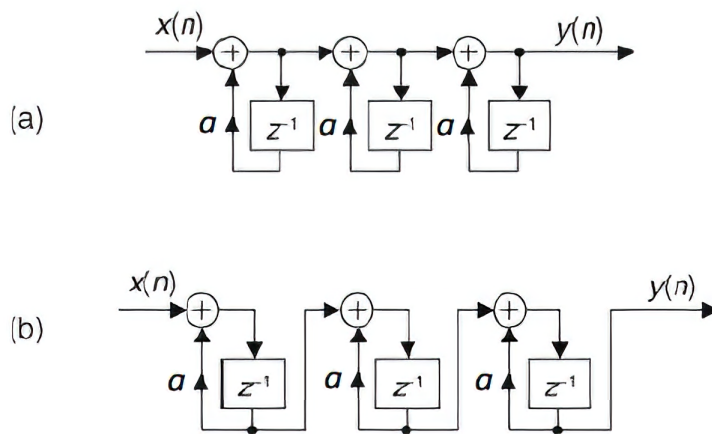
Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 02/12/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/12/2022, 11:59 πρωί

Ασκηση 1.

Σας δίνεται η υλοποίηση ενός συστήματος στο Σχήμα 1(α), με $|a| < 1$ και $a \in \mathbb{R}$. Ένας συνάδελφός σας



Σχήμα 1: Σχήματα Άσκησης 1.

ισχυρίζεται ότι η υλοποίηση του Σχήματος 1(β) είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη, δηλ. ότι

$$H_a(z) = H_b(z) \quad (1)$$

Ένας τρίτος συνάδελφός σας διαφωνεί και αναφέρει ότι η απόκριση σε συχνότητα των δυο υλοποιήσεων είναι ίδια, δηλ. ότι

$$H_a(e^{j\omega}) = H_b(e^{j\omega}) \quad (2)$$

Μετά από μελέτη, ισχυρίζεστε ότι τα δυο συστήματα έχουν μόνο την ίδια απόκριση πλάτους, δηλ.

$$|H_a(e^{j\omega})| = |H_b(e^{j\omega})| \quad (3)$$

Ποιός έχει δίκιο;

Ασκηση 2.

Δείξτε ότι για ένα 2ης τάξης FIR φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = 1 + Bz^{-1} + z^{-2} \quad (4)$$

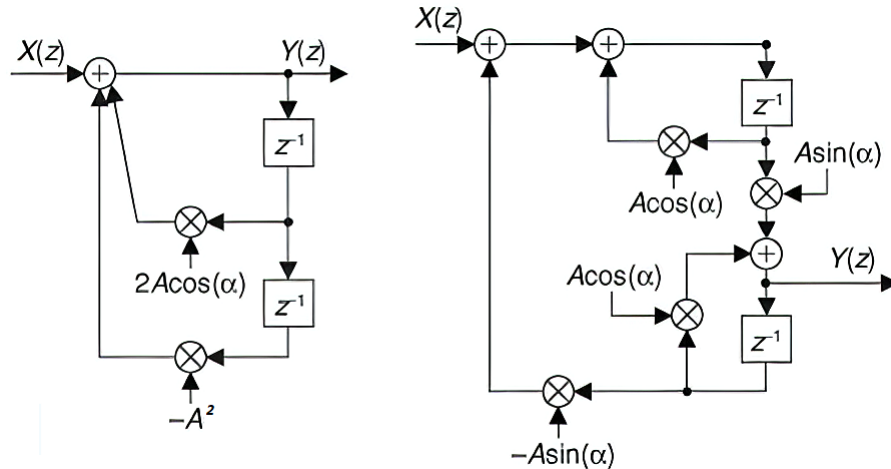
ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^2 z_i = -B \quad (5)$$

με $z_i, i = 1, 2$ τα μηδενικά του συστήματος.

Ασκηση 3.

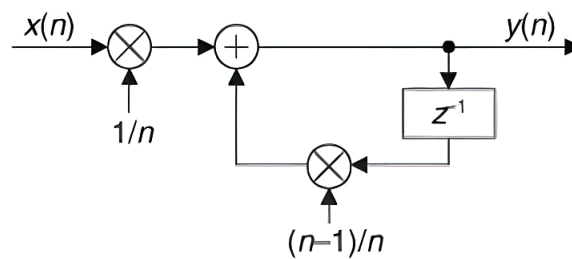
Δείξτε ότι οι θέσεις των πόλων των δυο υλοποιήσεων στο Σχήμα 2 είναι ίδιες.



Σχήμα 2: Σχήματα Άσκησης 3.

Ασκηση 4.

Το αναδρομικό φίλτρο του Σχήματος 3 υπολογίζει το μέσο όρο N σημείων της εισόδου του. Το μόνο πρόβλημα είναι ότι όσο αυξάνει το n , δηλ. ο χρόνος, απαιτείται ο σε πραγματικό χρόνο υπολογισμός των τιμών $1/n$ και $(n-1)/n$ για κάθε νέο δείγμα της εισόδου στο σύστημα. Σας καλούν να λύσετε το πρόβλημα.

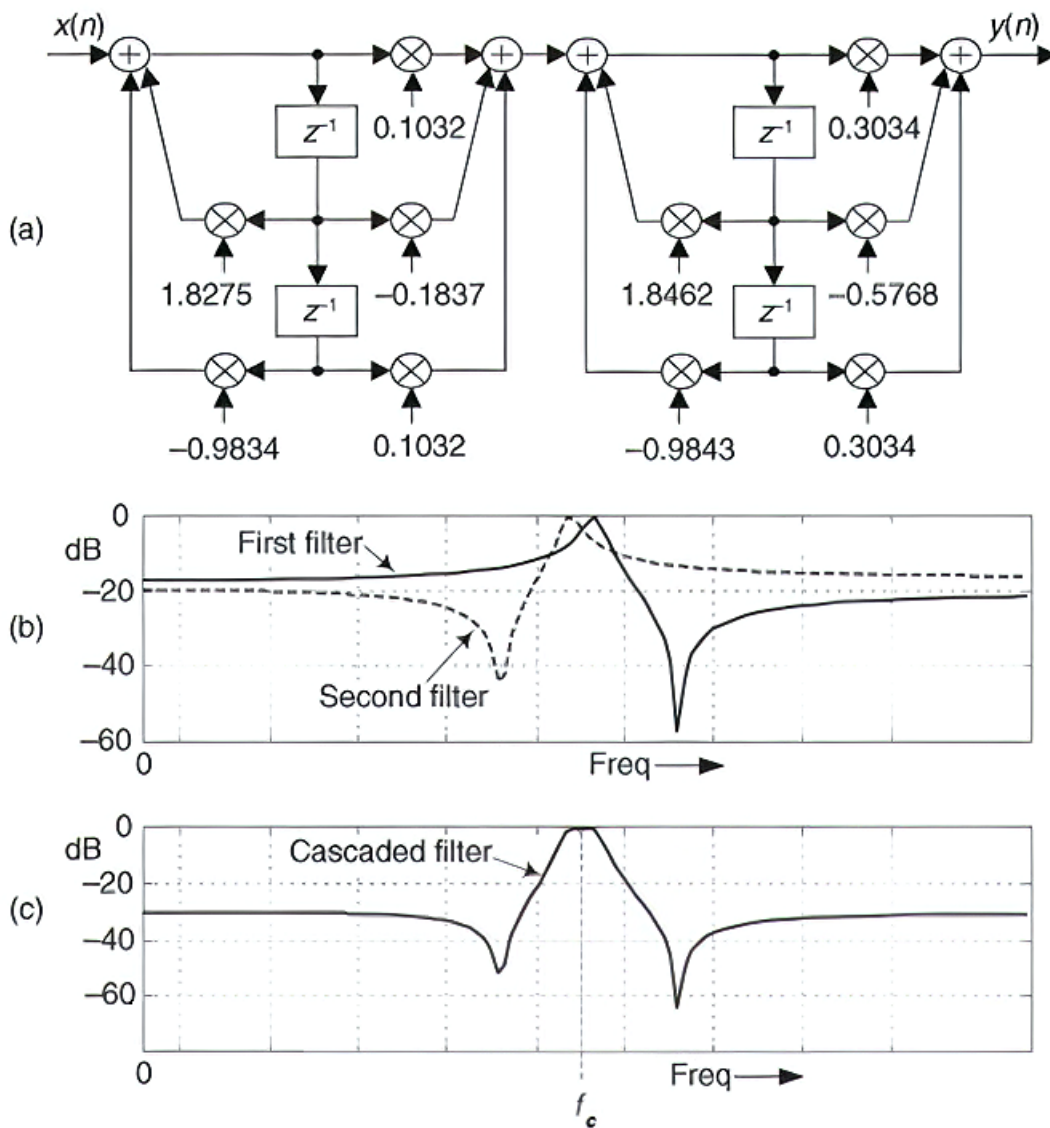


Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 4.

- (α) Σχεδιάστε νέο ή τροποποιήστε το παραπάνω διάγραμμα ώστε να μειώσετε τους πολλαπλασιασμούς που απαιτούνται. Πράξεις με ± 1 δε μετρούν.
- (β) Παρατηρείτε επίσης ότι ο αναδρομικός βρόχος έχει προβλήματα ευστάθειας: το σύστημα υλοποιεί έναν πόλο στη θέση $(n-1)/n$, ο οποίος πλησιάζει πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο όσο μεγαλώνει το n , και αν υπάρξουν σφάλματα υπολογισμών λόγω πεπερασμένης ακρίβειας, τότε μπορεί ο πόλος να περάσει πάνω ή έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Η λύση σας πως αντιμετωπίζει αυτό το πρόβλημα;

Ασκηση 5.

Μια γνωστή εταιρία - ονόματα δε λέμε - περιγράφει στην ιστοσελίδα της ένα πολυεπίπεδο ζωνοπερατό φίλτρο το οποίο ανιχνεύει τη θεμελιώδη συχνότητα των μουσικών οργάνων. Συγκεκριμένα, είναι ένα φίλτρο δύο επιπέδων σε Direct Form II, με κάθε επίπεδο να περιγράφεται από ένα 2ας τάξης IIR φίλτρο, όπως στο Σχήμα 4(α). Οι



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 5.

αποκρίσεις πλάτους καθενός από τα δυο ζωνοπερατά φίλτρα αλλά και του συνδυασμού τους (σύνδεση σε σειρά) φαίνονται στο Σχήμα 4(b,c).

(α) Αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 8000$ Hz, ποιά μουσική νότα ανιχνεύει το φίλτρο; Με άλλα λόγια, ποιά μουσική νότα είναι πιο κοντά στο κέντρο f_c των συχνοτήτων που περνούν από το ζωνοπερατό φίλτρο; Εξηγήστε. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συναρτήσεις `roots`, `angle` του MATLAB για να βοηθηθείτε στις απαντήσεις σας. Επίσης σας δίνεται ένας πίνακας από νότες και τις συχνότητές τους στον Πίνακα 5.

(β) Είναι τα δυο επιμέρους ζωνοπερατά φίλτρα ευσταθή; Εξηγήστε.

Άσκηση 6.

Έστω το σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 6z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.2z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}, \quad |z| > 0.8 \quad (6)$$

| Musical note | Frequency (Hz) | Musical note | Frequency (Hz) |
|--------------|--------------------|--------------|-------------------|
| C4 | 261.626 (Middle C) | G#4 | 415.305 |
| C#4 | 277.183 | A4 | 440.0 (Concert A) |
| D4 | 293.665 | A#4 | 466.164 |
| D#4 | 311.127 | B4 | 493.883 |
| E4 | 329.628 | C5 | 523.251 |
| F4 | 349.228 | C#5 | 554.365 |
| F#4 | 369.994 | D5 | 587.330 |
| G4 | 391.995 | D#5 | 622.254 |

Σχήμα 5: Πίνακας με νότες.

Βρείτε τρία ακόμα ευσταθή και αιτιατά συστήματα $G_i(z)$, $i = 1, 2, 3$ τέτοια ώστε

$$|G_i(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Ποιό από αυτά έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα;