ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.
Το (α) σύστημα είναι μια πρωτοβάθμια υλοποίηση σε σειρά. Άρα εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$H_a(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^3} \tag{1}$$

Για το δεύτερο σύστημα θέτοντας ενδιάμεσες μεταβλητές στις εξόδους κάθε αθροιστή, έχουμε

$$g[n] = x[n] + g[n-1] \tag{2}$$
$$w[n] = g[n-1] + w[n-1] \tag{3}$$
$$y[n] = w[n-1] + y[n-1] \tag{4}$$

και μεταφέροντας στο χώρο του Ζ και λύνοντας, έχουμε

$$G(z) = X(z) + z^{-1}G(z) \tag{5}$$
$$W(z) = z^{-1}G(z)z^{-1}W(z) \tag{6}$$
$$Y(z) = z^{-1}W(z) + z^{-1}Y(z) \tag{7}$$

και

$$H_b(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - az^{-1})^3} \tag{8}$$

Άρα σίγουρα τα δυο συστήματα δεν είναι ισοδύναμα. Οι αποκρίσεις σε συχνότητα είναι

$$H_a(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^3} \text{ και } H_b(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^3} \tag{9}$$

και δεν είναι ίδιες. Όμως

$$|H_a(e^{j\omega})| = \frac{1}{|(1 - ae^{-j\omega})^3|} \text{ και } |H_b(e^{j\omega})| = \frac{|e^{-j2\omega}|}{|(1 - ae^{-j\omega})^3|} = \frac{1}{|(1 - ae^{-j\omega})^3|} \tag{10}$$

και πράγματι έχουν τις ίδιες αποκρίσεις πλάτους. Άρα εσείς έχετε δίκιο. :)

Ασκηση 2.
Γράφουμε

$$H(z) = \frac{z^2 + Bz + 1}{z^2} \tag{11}$$

και άρα υπάρχουν δυο μηδενικά στο σύστημα. Για ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο της μορφής

$$az^2 + bz + c \tag{12}$$

και τις δυο ρίζες του, z_1, z_2, ξέρουμε από τις σχέσεις του Vieta ότι ισχύει

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \tag{13}$$
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \tag{14}$$

Για το δοθέν πολυώνυμο

$$z_1 z_2 = 1 \tag{15}$$
$$z_1 + z_2 = -B \tag{16}$$

και άρα πράγματι το άθροισμα των θέσεων των δυο μηδενικών του φίλτρου ισούται με $-B$.

Ασκηση 3.
Η αριστερή υλοποίηση είναι μια Direct Form υλοποίηση και εύκολα διαπιστώνουμε ότι αφορά την εξίσωση

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - (2A\cos(a)z^{-1} - A^2 z^{-2})} \tag{17}$$

Στη δεξιά υλοποίηση, βάζοντας ενδιάμεσες μεταβλητές στην έξοδο των αθροιστών, έχουμε

$$w[n] = x[n] - A\sin(a)y[n-1] \tag{18}$$
$$f[n] = w[n] + A\cos(a)f[n-1] \tag{19}$$
$$y[n] = A\sin(a)f[n-1] + A\cos(a)y[n-1] \tag{20}$$

και

$$W(z) = X(z) - z^{-1}A\sin(a)Y(z) \tag{21}$$
$$F(z) = W(z) + z^{-1}A\cos(a)F(z) \Longleftrightarrow F(z) = \frac{W(z)}{1 - A\cos(a)z^{-1}} \tag{22}$$
$$Y(z) = z^{-1}A\cos(a)F(z) + z^{-1}A\cos(a)Y(z) \Longleftrightarrow (1 - A\cos(a)z^{-1})Y(z) = \frac{W(z)(z^{-1}A\sin(a))}{1 - A\cos(a)z^{-1}} \tag{23}$$

και λύνοντας

$$Y(z)\left(\frac{(1 - A\cos(a)z^{-1})^2 + (z^{-1}A\sin(a))^2}{1 - A\cos(a)z^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}A\sin(a)}{1 - A\cos(a)z^{-1}}X(z) \tag{24}$$

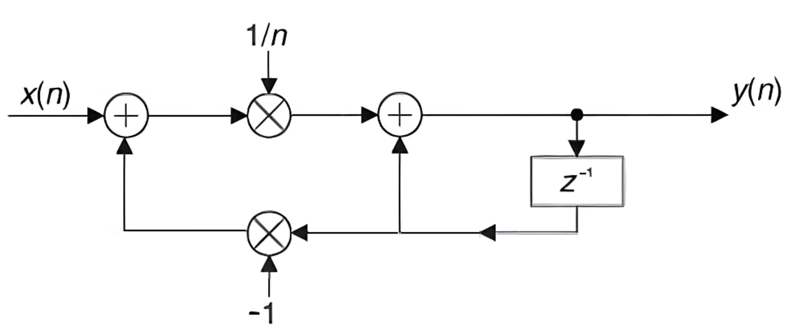
οπότε

$$H_2(z) = \frac{z^{-1}A\sin(a)}{(1 - A\cos(a)z^{-1})^2 + (z^{-1}A\sin(a))^2} = \frac{z^{-1}A\sin(a)}{1 - 2A\cos(a)z^{-1} + A^2 z^{-2}} \tag{25}$$

Πράγματι τα δυο φίλτρα έχουν τις ίδιες θέσεις πόλων αφού έχουν τους ίδιους παρονομαστές.

Ασκηση 4.

(α') Μια πιθανή λύση φαίνεται στο Σχήμα 1. Παρατηρήστε ότι έχουμε έναν πολλαπλασιασμό με $1/n$ και εναν



Σχήμα 1: *Λύση Άσκησης 4.*

με -1, άρα έχουμε μόνο έναν πολλαπλασιασμό.

(β') Στο νέο σύστημα δεν παρουσιάζει το προβλημα του προηγούμενου καθώς απαλείψαμε τον όρο $(n-1)/n$.

Ασκηση 5.

(α') Τα peaks που βλέπουμε στο κάθε φίλτρο ανταποκρίνονται στους πόλους του. Το πρώτο φίλτρο έχει παρονομαστή

$$Q(z) = 1 - 1.8275z^{-1} + 0.9834z^{-2} \tag{26}$$

και έχει ρίζες (με τη βοήθεια του MATLAB/Octave)

$$z_1 = 0.9917e^{j0.3991} \tag{27}$$

$$z_2 = 0.9917e^{-j0.3991} \tag{28}$$

που είναι συζυγείς, όπως πρέπει σε ένα πραγματικό φίλτρο. Οι γωνίες των πόλων ανταποκρίνονται στις συχνότητες που το φίλτρο παρουσιάζει μέγιστα. Αφού $f_s = 8$ kHz, τότε

$$\omega_i = \frac{2\pi f_i}{f_s} \Longleftrightarrow f_i = \frac{\omega_i f_s}{2\pi} = \pm\frac{0.3991 \cdot 8000}{2\pi} = \pm 508.15 \text{ Hz} \tag{29}$$

Άρα το πρώτο φίλτρο έχει μέγιστο στη συχνότητα $f_0 = 508.15$ Hz. Το δεύτερο φίλτρο έχει παρονομαστή

$$Q(z) = 1 - 1.8462z^{-1} + 0.9843z^{-2} \tag{30}$$

και έχει ρίζες (με τη βοήθεια του MATLAB/Octave)

$$z_1 = 0.9921e^{j0.3752} \tag{31}$$

$$z_2 = 0.9921e^{-j0.3752} \tag{32}$$

που είναι συζυγείς, όπως πρέπει σε ένα πραγματικό φίλτρο. Οι γωνίες των πόλων ανταποκρίνονται στις συχνότητες που το φίλτρο παρουσιάζει μέγιστα. Αφού $f_s = 8$ kHz, τότε

$$\omega_i = \frac{2\pi f_i}{f_s} \Longleftrightarrow f_i = \frac{\omega_i f_s}{2\pi} = \pm\frac{0.3752 \cdot 8000}{2\pi} = \pm 477.72 \text{ Hz} \tag{33}$$

Άρα το δεύτερο φίλτρο έχει μέγιστο στη συχνότητα $f_0 = 477.72$ Hz.

Όταν τα δυο φίλτρα τοποθετούνται σε σειρά, τότε οι συναρτήσεις μεταφοράς, και άρα και τα φάσματα πλάτους και φάσης, πολλαπλασιάζονται. Οπότε το συνολικό φίλτρο έχει πόλους και μηδενικά το σύνολο των πόλων και μηδενικών των επιμέρους φίλτρων. Όπως φαίνεται στο Σχήμα b,c, το εύρος ανιχνεύσιμων συχνοτήτων που τα δυο φίλτρα δημιουργούν είναι το $[477.72, 508.15]$ Hz. Η κεντρική συχνότητα f_c είναι

$$f_c = \frac{508.15 + 477.72}{2} = 492.94 \text{ Hz} \tag{34}$$

Η συχνότητα αυτή είναι πάρα πολύ κοντά στη συχνότητα $B4 = 493.883$ Hz.

(β') Τα φίλτρα είναι ευσταθή γιατί οι πόλοι τους βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου.

Ασκηση 6.

Σε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα μπορούμε να αλλάξουμε κάθε μηδενικό εντός ή εκτός μοναδιαίου κύκλου της μορφής $1 - az^{-1}$ σε $z^{-1} - a^*$ εντός ή εκτός του κύκλου, χωρίς να αλλάξει η απόκριση πλάτους του. Άρα τα τρια συστήματα είναι

$$G_1(z) = \frac{(z^{-1}-6)(1-0.5z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \; |z| > 0.8 \tag{35}$$

$$G_2(z) = \frac{(1-6z^{-1})(z^{-1}-0.5)}{(1-0.2z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \; |z| > 0.8 \tag{36}$$

$$G_3(z) = \frac{(z^{-1}-6)(z^{-1}-0.5)}{(1-0.2z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \; |z| > 0.8 \tag{37}$$

Όλα είναι ευσταθή και αιτιατά. Αυτό που έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα είναι το σύστημα ελάχιστης φάσης, αυτό δηλ. που έχει πόλους και μηδενικά εντός μοναδιαιου κύκλου. Αυτό είναι το $G_1(z)$.