ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.
Η σχέση

$$\sum_n y[n] = 7 \tag{1}$$

σημαίνει ότι

$$\sum_n y[n]z^{-n}\Big|_{z=1} = Y(z)\Big|_{z=1} = Y(1) = 7 \tag{2}$$

Όμοια για το $w[n]$,

$$\sum_n w[n]z^{-n}\Big|_{z=1} = W(z)\Big|_{z=1} = W(1) \tag{3}$$

Όμως

$$w[n] = x[n] * y[n] \longleftrightarrow W(z) = X(z)Y(z) \tag{4}$$

και άρα

$$W(1) = X(1)Y(1) = 7X(1) \tag{5}$$

Για το $X(1)$ έχουμε

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] \longleftrightarrow X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-3} \tag{6}$$

οπότε

$$X(1) = 1 + 2 + 3 = 6 \tag{7}$$

Άρα τελικά

$$W(1) = X(1)Y(1) = 7 \cdot 6 = 42 \tag{8}$$

Ασκηση 2.
Τα πολυώνυμα του αριθμητή και παρονομαστή είναι ίδιου βαθμού, άρα πρέπει να διαιρέσουμε τα πολυώνυμ πριν αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα. Διαιρώντας

$$X(z) = -2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \tag{9}$$

Τότε

$$X(z) = 2 + G(z) \tag{10}$$

με

$$G(z) = \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \tag{11}$$

το οποίο και αναπτύσσυμε σε μερικά κλάσματα.

$$G(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{12}$$

με

$$A = G(z)(1 - z^{-1})\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{-1 + 5z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=1} = 8 \tag{13}$$

$$B = G(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{-1 + 5z^{-1}}{1 - z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=2} = -9 \tag{14}$$

’ρα

$$X(z) = 2 + \frac{8}{1 - z^{-1}} - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{15}$$

Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $z = 1$, $z = 1/2$, οπότε τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι

- $|z| > 1$
- $|z| < \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} < |z| < 1$

Από πίνακες και ζεύγη γνωστών μετασχ. Z θα έχουμε

- $x[n] = 2\delta[n] + 8u[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
- $x[n] = 2\delta[n] - 8u[-n-1] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$
- $x[n] = 2\delta[n] + 8u[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$

Ασκηση 3.
Η παράλληλη σύνδεση ισοδυναμεί με άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων ή των συναρτήσεων μεταφοράς, άρα

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \longleftrightarrow h[n] = 3\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] - 2(2)^n u[-n-1] \tag{16}$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega 0}d\omega = 2\pi h[n]\Big]_{n=0} = 2\pi h[0] \tag{17}$$

και άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = 2\pi 3 = 6\pi \tag{18}$$

Ασκηση 4.

(α΄) Είναι

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] \tag{19}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}) = X(z) \tag{20}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2} \tag{21}$$

Άρα

$$H_2(z) = H_1(-z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}(-z)^{-1})^2} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})^2} \tag{22}$$

Το $H_1(z)$ έχει διπλό πόλο στη θέση $z = \frac{1}{2}$, και δυο μηδενικά στο $z = 0$, ενώ το $H_2(z)$ έχει διπλό πόλο στο $z = -\frac{1}{2}$ και δυο μηδενικά στο $z = 0$.

(β΄) Από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών καθενός συστήματος βλέπουμε ότι το $H_1(z)$ έχει πόλους στον θετικό πραγματικό άξονα, άρα θα είναι βαθυπερατό, ενώ το $H_2(z)$ έχει πόλους στον αρνητικό πραγματικό άξονα, άρα είναι υψιπερατό.

Ασκηση 5.

(α΄) Μπορούμε να γράψουμε

$$h[n] = (n-2)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n-2] = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 (n-2)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2] \tag{23}$$

Από γνωστά ζεύγη

$$nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z) \tag{24}$$

και την ιδιότητα

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z) \tag{25}$$

για $x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, έχουμε

$$H(z) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 z^{-2}(-z)\frac{d}{dz}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = -\frac{1}{27}\frac{z^{-3}}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} \tag{26}$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$H(z) = -\frac{1}{27}\frac{1}{z(z+1/3)^2} \tag{27}$$

και αναγνωρίζουμε ότι υπάρχουν τρεις πόλοι, $z=0$, $z=-\frac{1}{3}$ (διπλός πόλος), και τρια μηδενικά, όλα στο $z=\infty$. Άρα $|z| > \frac{1}{3}$.

(β΄) Ναι, μπορούμε να βρούμε το μετασχ. Fourier από το μετασχ. Z αφού το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Είναι

$$H(e^{j\omega}) = -\frac{1}{27}\frac{e^{-j3\omega}}{\left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^2} \tag{28}$$