ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/10/2022 Ημερομηνία Παράδοσης: 31/10/2022, 12:00, πρωί

Άσκηση 1.
Γνωρίζετε το ζεύγος

$$a^{|n|}, \ \ |a| < 1 \longleftrightarrow \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \tag{1}$$

Αν

$$x[n] = (0.5)^{|n|} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \tag{2}$$

τότε

(α΄) βρείτε το

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (0.5)^{|n|} \tag{3}$$

(β΄) υπολογίστε το

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \tag{4}$$

(γ΄) υπολογίστε το φάσμα φάσης του $X(e^{j\omega})$

(δ΄) υπολογίστε το

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (0.5)^{|n|} \tag{5}$$

Απ: (α) 3, (β) 2π, (δ) $1/3$

Άσκηση 2.
Ένας τριγωνικός παλμός διακριτού χρόνου γράφεται ως

$$x[n] = \begin{cases} 3+n, & -2 \leq n \leq -1 \\ 3-n, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{6}$$

Βρείτε μια ημιτονοειδή αναπαράσταση για τον Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου του παραπάνω σήματος, δηλ. βρείτε μια έκφραση

$$X(e^{j\omega}) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega) \tag{7}$$

Απ: $A_0 = 3$, $A_k = 2(3-k)$, $k = 1, 2$

Άσκηση 3.

(α΄) Έστω $h[n]$ η κρουστική απόκριση ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & -0.4\pi \le \omega \le 0.4\pi \\ 0, & \text{αλλού στο } (-\pi, \pi] \end{cases} \tag{8}$$

Αν ένα νέο φίλτρο έχει κρουστική απόκριση

$$h_1[n] = (1 + 2(-1)^n)h[n] \tag{9}$$

βρείτε την απόκριση σε συχνότητα για το νέο φίλτρο συναρτήσει της $H(e^{j\omega})$. Τι είδους φίλτρο είναι αυτό το νέο φίλτρο;

(β΄) Θεωρήστε την απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos(\omega)} \tag{10}$$

i. Δεδομένου ότι $H(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$, δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι άρτια συνάρτηση του n.

ii. Είναι αληθές ότι η απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ είναι μηδενική για κάθε συχνότητα ω;

Απ: (α) ζωνοφρακτικό, (β,ii) ναι

Άσκηση 4.

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n]$ και έξοδο $y[n]$. Σας δίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος ως

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi(n-10)/3)}{\pi(n-10)}, & n \neq 10 \\ \dfrac{1}{3}, & n = 10 \end{cases} \tag{11}$$

(α΄) Βρείτε την απόκριση πλάτους και φάσης του συστήματος.

(β΄) Βρείτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο

$$x[n] = \delta[n-1] + \cos(\pi n/5) \tag{12}$$

Απ: (α) $|H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, $\angle H(e^{\omega}) = -10\omega,\ -\pi < \omega \le \pi$, (β) $y[n] = h[n-1] + \cos(\pi n/5)$

Άσκηση 5.

Για τα ακόλουθα ζεύγη εισόδου-εξόδου, βρείτε αν υπάρχει ΓΧΑ σύστημα που να ικανοποιεί κάθε ζεύγος. Αν υπάρχει βρείτε το (ή βρείτε όσες πληροφορίες μπορείτε για αυτό), ειδάλλως εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει. Για τα ΓΧΑ συστήματα που ικανοποιούν τα ζεύγη εισόδου-εξόδου, αναφέρετε αν το εκάστοτε ΓΧΑ σύστημα είναι μοναδικό.

(α΄) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longrightarrow y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

(β΄) $x[n] = e^{j\pi n/3} \longrightarrow y[n] = 2e^{j\pi n/3}$

(γ΄) $x[n] = \dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \longrightarrow y[n] = \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$

(δ') $x[n] = u[n] \longrightarrow y[n] = \delta[n]$

Απ: (α) υπάρχει, μοναδικό (β) υπάρχει, όχι μοναδικό, (γ) δεν υπάρχει, (δ) υπάρχει, μοναδικό

Άσκηση 6.

Βρείτε την εξίσωση διαφορών του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ αν για είσοδο

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{13}$$

λαμβάνουμε έξοδο

$$y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \tag{14}$$

Απ: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{16}y[n-2] = \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$