ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/10/2022 Ημερομηνία Παράδοσης: 31/10/2022, 12:00, πρωί

Άσκηση 1.

(α΄) Είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(0.5)^{|n|} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = X(e^{j0}) = \frac{1-0.25}{0.25} = 3 \tag{1}$$

(β΄) Είναι

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 2\pi x[n]\Big|_{n=0} = 2\pi x[0] = 2\pi(0.5)^0 = 2\pi \tag{2}$$

(γ΄) Το $\angle X(e^{j\omega})$ είναι παντού μηδέν γιατί $X(e^{j\omega}) > 0$, $\forall\omega$.

(δ΄) Είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n(0.5)^{|n|} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(e^{j\pi})^n(0.5)^{|n|} = X(e^{j(\omega-\pi)})\Big|_{\omega=0} = \frac{0.75}{1-\cos(\omega-\pi)+0.25}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{3} \tag{3}$$

Άσκηση 2.
Είναι

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_n x[n]e^{-j\omega n} && (4)\\
&= 1\cdot e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} && (5)\\
&= 2\cos(2\omega) + 4\cos(\omega) + 3 && (6)\\
&= 3 + 4\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) && (7)\\
&= 3 + \sum_{k=1}^{2} 2(3-k)\cos(k\omega) && (8)
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Αφού

$$h_1[n] = (1+2(-1)^n)h[n] = h[n] + 2(-1)^n h[n] = h[n] + 2(e^{j\pi})^n h[n] \tag{9}$$

τότε από ιδιότητες

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + 2H(e^{j(\omega-\pi)}) \tag{10}$$

που σημαίνει ότι έχουμε το αρχικό μας φίλτρο και μια έκδοσή του γύρω από το $\omega=\pi$, με διπλάσιο πλάτος. Άρα

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0.4\pi \\ 2, & 0.6\pi < |\omega| < 1.4\pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11}$$

που είναι ένα ζωνοφρακτικό φίλτρο (φράσσει τις συχνότητες $0.4\pi < |\omega| < 0.6\pi$).

(β') i. Από το $H(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$ κι από ιδιότητες έχουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) \longleftrightarrow h[n] \tag{12}$$

$$H(e^{-j\omega}) \longleftrightarrow h[-n] \tag{13}$$

και άρα $h[n] = h[-n]$.

ii. Ναι, είναι αληθές, αφού $H(e^{j\omega}) \in \mathrm{R}_+$.

Άσκηση 4.

Ξέρουμε ότι

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ \dfrac{1}{3}, & n = 0 \end{cases} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{14}$$

και άρα

(α') έχουμε

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi(n-10)/3)}{\pi(n-10)}, & n \neq 10 \\ \dfrac{1}{3}, & n = 10 \end{cases} \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j10\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{15}$$

Άρα

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \ |\omega| < \pi/3 \tag{16}$$

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = -10\omega \tag{17}$$

(β') Για είσοδο

$$x[n] = \delta[n-1] + \cos(\pi n/5) \tag{18}$$

η έξοδος θα είναι

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] * (\delta[n-1] + \cos(\pi n/5)) = h[n-1] + |H(e^{j\pi/5})| \cos\left(\frac{\pi n}{5} + \angle H(e^{j\pi/5})\right) \tag{19}$$

Όμως $|H(e^{j\pi/5})| = 1$ και $\angle H(e^{j\pi/5}) = 0$, άρα

$$y[n] = h[n-1] + \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) \tag{20}$$

Άσκηση 5.

(α') $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longrightarrow y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$: είναι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{21}$$

και

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \tag{22}$$

οπότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{23}$$

που υπάρχει και είναι μοναδικό.

(β΄) $x[n] = e^{j\pi n/3} \longrightarrow y[n] = 2e^{j\pi n/3}$: έχουμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης ότι κάθε σύστημα με $H(e^{j\pi/3}) = 2$ ικανοποιεί το παραπάνω ζεύγος εισόδου-εξόδου, που υπάρχει αλλά δεν είναι μοναδικό.

(γ΄) $x[n] = \dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \longrightarrow y[n] = \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$: δεν υπάρχει ΓΧΑ σύστημα τέτοιο ώστε να βγάζει διαφορετικές (περισσότερες) μη μηδενικού πλάτους συχνότητες απ΄ όσες υπάρχουν στην είσοδό του.

(δ΄) $x[n] = u[n] \longrightarrow y[n] = \delta[n]$: ξέρουμε ότι $u[n] - u[n-1] = \delta[n]$, αρα υπάρχει το σύστημα $y[n] = x[n] - x[n-1]$ και είναι μοναδικό.

Άσκηση 6.
Είναι

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{24}$$

και

$$y[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \tag{25}$$

Άρα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{16}e^{-j2\omega}} \tag{26}$$

και

$$Y(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{16}e^{-j2\omega}) = X(e^{j\omega})(\frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\omega}) \tag{27}$$

Γυρίζοντας στο πεδίο του χρόνου

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{16}y[n-2] = \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2] \tag{28}$$