

**ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος**  
**Χειμερινό Εξάμηνο 2022**  
**Διδάσκων: Γ. Στυλιανού**

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/10/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 13/10/2022, 12:00:00

**ΑΣΚΗΣΗ 1.**

I. Σε πολλά συγγράμματα θα δείτε ότι για το θεώρημα του Shannon αναφέρεται η σχέση

$$f_s \geq 2f_{max} \quad (1)$$

αντί της

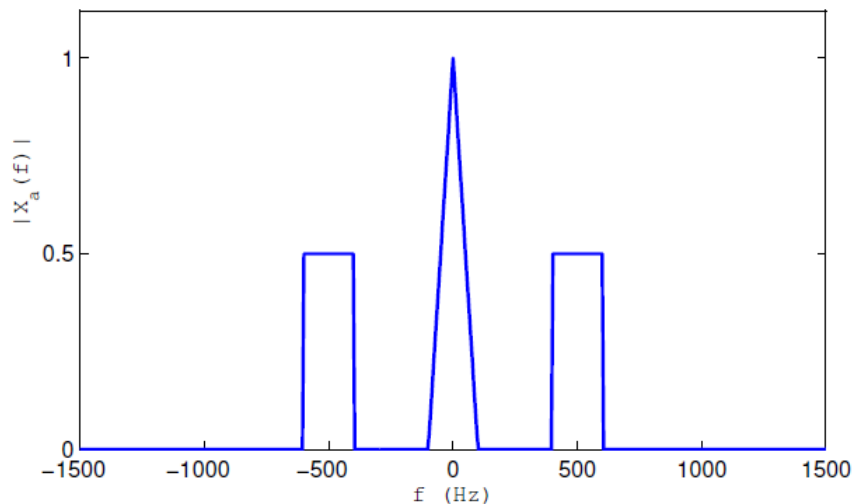
$$f_s > 2f_{max} \quad (2)$$

που είδαμε στο μάθημα. Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t - \phi) \quad (3)$$

το οποίο δειγματοληπτείται με ρυθμό  $f_s = 2f_0$ . Ελέγξτε τι συμβαίνει στις περιπτώσεις  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi/2$  και εξηγήστε τι παρατηρείτε και ποιά είναι η σωστότερη συνθήκη για το θεώρημα του Shannon.

II. Υπάρχουν όμως κάποιες ειδικές περιπτώσεις που μπορεί κανείς να ανακατασκευάσει το σήμα συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του ακόμα κι αν δεν ισχύει το θεώρημα του Shannon! Δείτε το φάσμα ενός σήματος συνεχούς χρόνου  $x_a(t)$  στο Σχήμα 1. Βλέπετε ότι το φάσμα έχει “κενά” :-)



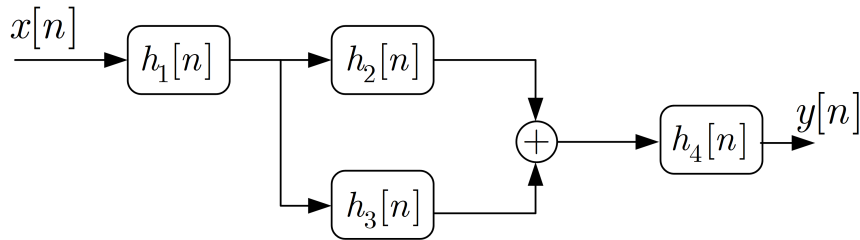
Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1-II.

- (α) Ποιά είναι η μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος; Υποθέστε ότι οι τετραγωνικοί παλμοί έχουν εύρος 100 Hz.
- (β) Υποθέστε ότι η συχνότητα δειγματοληψίας που επιλέγουμε είναι  $f_s = 750$  Hz και ότι η δειγματοληψία είναι ιδανική. Σχεδιάστε το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.

- (γ) Δείξτε ότι το σήμα συνεχούς χρόνου  $x_a(t)$  μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματά του,  $x[n]$ , “εφευρίσκοντας” ένα ιδανικό φίλτρο ανακατασκευής, του οποίου να σχεδιάσετε το φάσμα.
- (δ) Η συχνότητα  $f_s = 750$  Hz δεν είναι μοναδική. Ποιό είναι το εύρος συχνοτήτων δειγματοληψίας ( $< 2f_s$ ) που μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει για να επιτύχει την ανακατασκευή του σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματά του;

**ΑΣΚΗΣΗ 2.**

Σας δίνεται το ΓΧΑ σύστημα του Σχήματος 2. Αν γνωρίζετε ότι τα υποσυστήματα δίνονται ως



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 2.

$$h_1[n] = \delta[n - 2] \quad (4)$$

$$h_2[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \quad (5)$$

$$h_3[n] = a^{-n} u[-n - 1], \quad |a| < 1 \quad (6)$$

$$h_4[n] = \delta[n + 2] \quad (7)$$

τότε δείξτε ότι η συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h_{tot}[n] = a^{|n|} \quad (8)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3.**

Για τις παρακάτω εξισώσεις, δείξτε αν το σύστημα που περιγράφουν είναι (α) γραμμικό, (β) ευσταθές, (γ) αιτιατό, (δ) χρονικά αμετάβλητο, και (ε) δυναμικό.

(α)  $y[n] = 6nx[n + 2]$

(β)  $y[n] = \cos((n - 2)x^2[n])$

(γ)  $y[n] = e^{-x[n-1]}$

	Γραμμικό	Ευσταθές	Αιτιατό	Χ.Α.	Δυναμικό
Απ: (α)	✓	✗	✗	✗	✓
(β)	✗	✓	✓	✗	✗
(γ)	✗	✓	✓	✓	✓

**ΑΣΚΗΣΗ 4.**

Βρείτε τη συνέλιξη των παρακάτω σημάτων:

(α)

$$x[n] = 2\delta[n] - \delta[n - 1] + 4\delta[n - 3] \quad (9)$$

$$y[n] = 5\delta[n] + 3\delta[n - 1] - 7\delta[n - 2] + 6\delta[n - 3] \quad (10)$$

(β)

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3] \quad (11)$$

$$y[n] = (-4)^{-n} u[-n+1] \quad (12)$$

Απ: (α)  $c[n] = 10\delta[n] + \delta[n-1] - 17\delta[n-2] + 39\delta[n-3] + 6\delta[n-4] - 28\delta[n-5] + 24\delta[n-6]$ , (β)  
 $c[n] = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-4] - \frac{8}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[-n+3]$

**ΑΣΚΗΣΗ 5.**

Για την παρακάτω εξίσωση διαφορών που περιγράφει ένα σύστημα, με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες

$$y[n] + \frac{5}{12}y[n-1] + \frac{1}{24}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n-1], \quad y[-2] = 0, y[-1] = 1 \quad (13)$$

βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου ( $y_{zi}[n]$ ) και την κρουστική απόκριση  $h[n]$ . Σχολιάστε την ευστάθειά του.

Απ:  $y_{zi}[n] = -\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{6}\right)^n u[n]$ ,  $h[n] = \left(\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) u[n-1]$