ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.

I. Έχουμε

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t - \phi) \tag{1}$$

και θέτοντας $t := n/(2f_0)$ παίρνουμε

$$x[n] = \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0} - \phi\right) = \cos\left(\pi n - \phi\right) \tag{2}$$

Για $\phi = 0$ παίρνουμε

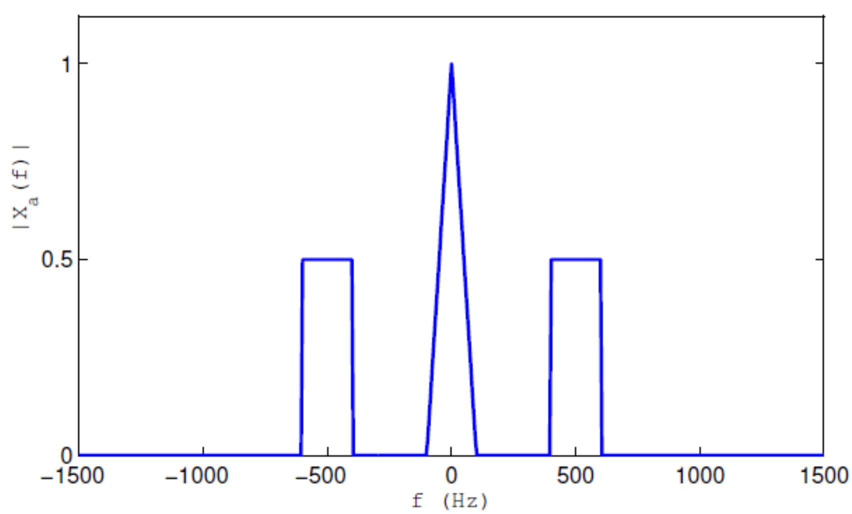
$$x[n] = \cos(\pi n) = (-1)^n \tag{3}$$

ενώ για $\phi = \pi/2$

$$x[n] = \cos(\pi n - \pi/2) = \sin(\pi n) = 0 \tag{4}$$

Άρα παρατηρούμε ότι πράγματι πρέπει να ισχύει ότι $f_s > 2f_{max}$ κι όχι $f_s \geq 2f_{max}$.

II. Έχουμε το Σχήμα 1.



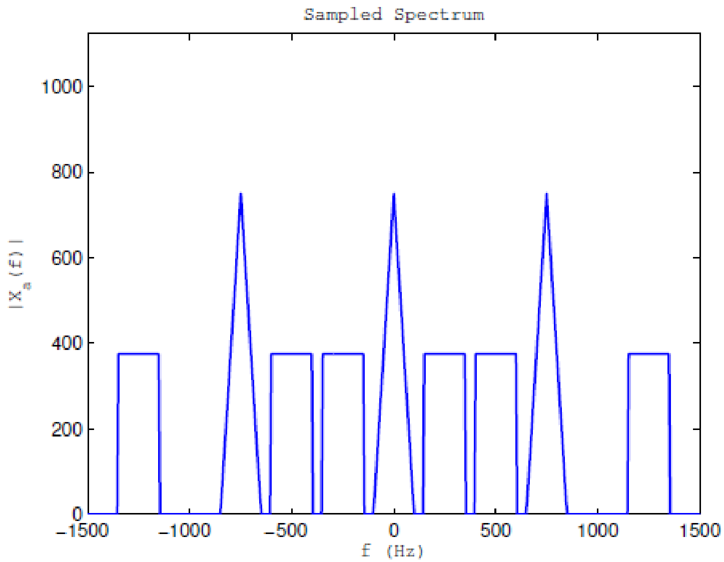
Σχήμα 1: *Φάσμα Άσκησης 1.II*

(α΄) Παρατηρούμε ότι $f_{max} = 550$ Hz, αφού η διάρκεια των παλμών είναι 100 Hz.

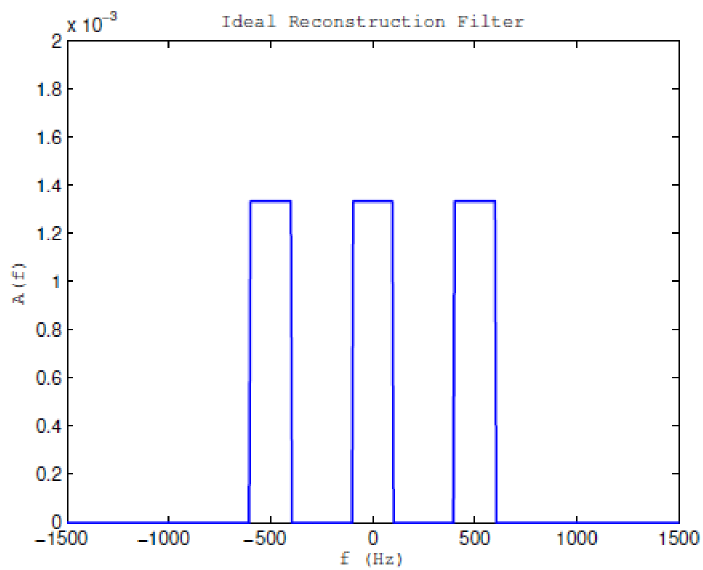
(β΄) Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος για δυο περιόδους εκατέρωθεν του μηδενός θα είναι

(γ΄) Το αρχικό σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί αν χρησιμοποιήσουμε το φίλτρο του Σχήματος 3.

(δ΄) Από το σχήμα του προ-προηγούμενου ερωτήματος, παρατηρούμε ότι $600 < f_s < 900$ Hz καθώς για αυτές τις τιμές δεν υπάρχουν επικαλύψεις μεταξύ του κεντρικού φάσματος και των αντιγράφων του.



Σχήμα 2: *Φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος Άσκησης 1.II*



Σχήμα 3: *Φίλτρο Άσκησης 1.II*

ΑΣΚΗΣΗ 2.
Από τη συνδεσιμότητα των συστημάτων παρατηρούμε ότι

$$h_{tot}[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) * h_4[n] \tag{5}$$

και άρα

$$h_{tot}[n] = \delta[n-2] * (a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1]) * \delta[n+2] \tag{6}$$

Όμως

$$a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1] = a^{|n|} \tag{7}$$

κι έτσι

$$h_{tot}[n] = \delta[n-2] * a^{|n|} * \delta[n+2] = a^{|n-2|} * \delta[n+2] = a^{|n-2+2|} = a^{|n|} \tag{8}$$

επειδή $x[n-n_1] * \delta[n-n_2] = x[n-n_1-n_2]$.

ΑΣΚΗΣΗ 3.

(α') $y[n] = 6nx[n+2]$:

- Γραμμικό: (θα εξετάσουμε ομογένεια και αθροιστικότητα μαζί) έστω η είσοδος $ax_1[n] + bx_2[n]$, τότε η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} 6n(ax_1[n+2] + bx_2[n+2]) &= 6nax_1[n+2] + 6nbx_2[n+2] && (9)\\ &= a(6nx_1[n+2]) + b(6nx_2[n+2]) && (10)\\ &= ay_1[n] + by_2[n] && (11) \end{aligned}$$

  άρα είναι γραμμικό.

- Ευσταθές: αν για την είσοδο ισχύει $|x[n]| < B_x$, με $B_x > 0$, τότε

$$|y[n]| = |6nx[n+2]| = 6|n||x[n+2]| < 6|n|B_x \to +\infty \tag{12}$$

  όταν $n \to \infty$. Άρα δεν είναι ευσταθές.

- Αιτιατό: δεν είναι αιτιατό γιατί για να υπολογίσουμε την τρέχουσα τιμή της εξόδου χρειαζόμαστε μελλοντική τιμή της εισόδου ($y[0] : x[2]$).
- Χρονικά αμετάβλητο: αν καθυστερήσουμε την είσοδο

$$x[n-n_0] \longrightarrow y_d[n] = 6nx[n-n_0+2] \tag{13}$$

  ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο

$$y[n-n_0] = 6(n-n_0)x[n-n_0+2] \neq y_d[n] \tag{14}$$

  Άρα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Δυναμικό: το σύστημα είναι δυναμικό γιατί απαιτείται μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου ($y[0] : x[2]$).

(β') $y[n] = \cos((n-2)x^2[n])$:

- Γραμμικό: (θα εξετάσουμε ομογένεια και αθροιστικότητα μαζί) έστω η είσοδος $ax_1[n] + bx_2[n]$, τότε η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} \cos((n-2)(ax_1[n] + bx_2[n])^2) &= \cos((n-2)(a^2x_1^2[n] + 2abx_1[n]x_2[n] + b^2x_2^2[n])) && (15)\\ &\neq a\cos((n-2)x_1^2[n]) + b\cos((n-2)x_2^2[n]) && (16) \end{aligned}$$

  άρα δεν είναι γραμμικό.

- Ευσταθές: αν για την είσοδο ισχύει $|x[n]| < B_x$, με $B_x > 0$, τότε

$$|y[n]| = |\cos((n-2)x^2[n])| \leq 1 \tag{17}$$

  για κάθε n. Άρα είναι ευσταθές.

- Αιτιατό: είναι αιτιατό γιατί για να υπολογίσουμε την τρέχουσα τιμή της εξόδου χρειαζόμαστε την τρέχουσα τιμή της εισόδου.
- Χρονικά αμετάβλητο: αν καθυστερήσουμε την είσοδο

$$x[n-n_0] \longrightarrow y_d[n] = \cos((n-2)x^2[n-n_0]) \tag{18}$$

  ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο

$$y[n-n_0] = \cos((n-n_0-2)x^2[n-n_0]) \neq y_d[n] \tag{19}$$

  Άρα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου.

(γ') $y[n] = e^{-x[n-1]}$:

- Γραμμικό: (θα εξετάσουμε ομογένεια και αθροιστικότητα μαζί) έστω η είσοδος $ax_1[n] + bx_2[n]$, τότε η έξοδος θα είναι

$$e^{-(ax_1[n-1]+bx_2[n-1])} = e^{-ax_1[n-1]}e^{-bx_2[n-1]} \neq ae^{-x_1[n-1]} + be^{-x_2[n-1]} \tag{20}$$

  άρα δεν είναι γραμμικό.

- Ευσταθές: αν για την είσοδο ισχύει $|x[n]| < B_x$, με $B_x > 0$, τότε

$$|y[n]| = |e^{-x[n-1]}| < e^{B_x} \tag{21}$$

  για κάθε n. Άρα είναι ευσταθές.

- Αιτιατό: είναι αιτιατό γιατί για να υπολογίσουμε την τρέχουσα τιμή της εξόδου χρειαζόμαστε παρελθοντική τιμή της εισόδου.

- Χρονικά αμετάβλητο: αν καθυστερήσουμε την είσοδο

$$x[n-n_0] \longrightarrow y_d[n] = e^{-x[n-n_0-1]} \tag{22}$$

  ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο

$$y[n-n_0] = e^{-x[n-n_0-1]} = y_d[n] \tag{23}$$

  Άρα είναι χρονικά αμετάβλητο.

- Δυναμικό: το σύστημα είναι δυναμικό γιατί απαιτείται μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου ($y[0]$: $x[-1]$).

ΑΣΚΗΣΗ 4.

(α') Έχουμε

$$\begin{aligned} x[n] * y[n] &= (2\delta[n] - \delta[n-1] + 4\delta[n-3]) * (5\delta[n] + 3\delta[n-1] - 7\delta[n-2] + 6\delta[n-3]) && (24)\\ &= 10\delta[n] + \delta[n-1] - 17\delta[n-2] + 39\delta[n-3] + 6\delta[n-4] - 28\delta[n-5] + 24\delta[n-6] && (25)\end{aligned}$$

με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της ιδιότητας $\delta[n-n_1] * \delta[n-n_2] = \delta[n-n_1-n_2]$.

(β') Έχουμε

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3] \tag{26}$$

$$y[n] = (-1)^{-n}u[-n+1] \tag{27}$$

Είναι

$$\begin{aligned} c_{xy}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k-3](-1)^{-k}u[-k+1] && (28)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} u[n-k-3]u[-k+1] && (29)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} u[n-k-3]u[-k+1] && (30)\end{aligned}$$

Όμως $u[n-k-3] = 1,\ k \leq n-3$ και $u[-k+1] = 1,\ k \leq 1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $n-3<1$: τότε

$$c_{xy_1}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{n-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=3-n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k} \tag{31}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{3-n}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-n} \tag{32}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{3} (-2)^n = -\frac{2}{3}\frac{1}{8}(-1)^n \tag{33}$$

$$= -\frac{1}{12}(-1)^n \tag{34}$$

δηλ.

$$c_{xy_1}[n] = -\frac{1}{12}(-1)^n u[-n+3] \tag{35}$$

- $n-3 \geq 1$: τότε

$$c_{xy_2}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k} \tag{36}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = (-2)\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{37}$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{38}$$

δηλ.

$$c_{xy_2}[n] = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-4] \tag{39}$$

Άρα τελικά

$$c_{xy}[n] = -\frac{1}{12}(-1)^n u[-n+3] - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-4] \tag{40}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.

Το σύστημα

$$y[n] + \frac{5}{12}y[n-1] + \frac{1}{24}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n-1], \ \ y[-2]=0, y[-1]=1 \tag{41}$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\gamma^2 + \frac{5}{12}\gamma + \frac{1}{24}$ και χαρακτηριστικές ρίζες $\gamma_1 = -\frac{1}{4}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{6}$. ’ρα η απόκριση μηδενικής εισόδου για το σύστημα αυτό θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \ \ n \geq 0 \tag{42}$$

Αφού $y[-2]=0$ και $y[-1]=1$, θα έχουμε

$$y_{zi}[-1] = -4c_1 - 6c_2 = 1 \tag{43}$$

$$y_{zi}[-2] = 16c_1 + 36c_2 = 0 \tag{44}$$

Λύνοντας το σύστημα

$$c_1 = -\frac{3}{4} \tag{45}$$

$$c_2 = \frac{1}{3} \tag{46}$$

'ρα

$$y_{zi}[n] = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)^n u[n] \tag{47}$$

Θεωρούμε το σύστημα

$$y[n] + \frac{5}{12}y[n-1] + \frac{1}{24}y[n-2] = x[n] \tag{48}$$

με ίδια χαρακτηριστική εξίσωση και ίδιες χαρακτηριστικές ρίζες με πριν. Η κρουστική του απόκριση θα είναι

$$h_o[n] = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \ \ n \geq 0 \tag{49}$$

Για $n = 0$, $n = 1$ και $x[n] = \delta[n]$, έχουμε

$$h_o[0] + \frac{5}{12}h_o[-1] + \frac{1}{24}h_o[-2] = \delta[0] = 1 \Longleftrightarrow h_o[0] = 1 \tag{50}$$

$$h_o[1] + \frac{5}{12}h_o[0] + \frac{1}{24}h_o[-1] = \delta[1] = 0 \Longleftrightarrow h_o[1] = -\frac{5}{12} \tag{51}$$

και άρα

$$c_1 + c_2 = 1 \tag{52}$$

$$-\frac{c_1}{4} - \frac{c_2}{6} = -\frac{5}{12} \tag{53}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$c_1 = 3, \ \ c_2 = -2 \tag{54}$$

κι έτσι

$$h_o[n] = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 2\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \ \ n \geq 0 \tag{55}$$

Αρα το σύστημα

$$y[n] + \frac{5}{12}y[n-1] + \frac{1}{24}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n-1], \ \ y[-2] = 0, y[-1] = 1 \tag{56}$$

θα έχει κρουστική απόκριση

$$h[n] = \frac{1}{2}h_o[n-1] = \left[\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right]u[n-1] \tag{57}$$

Τέλος, το σύστημα είναι ευσταθές γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι απολύτως μικρότερες της μονάδας:

$$|\gamma_i| < 1, \ \ \forall i \tag{58}$$