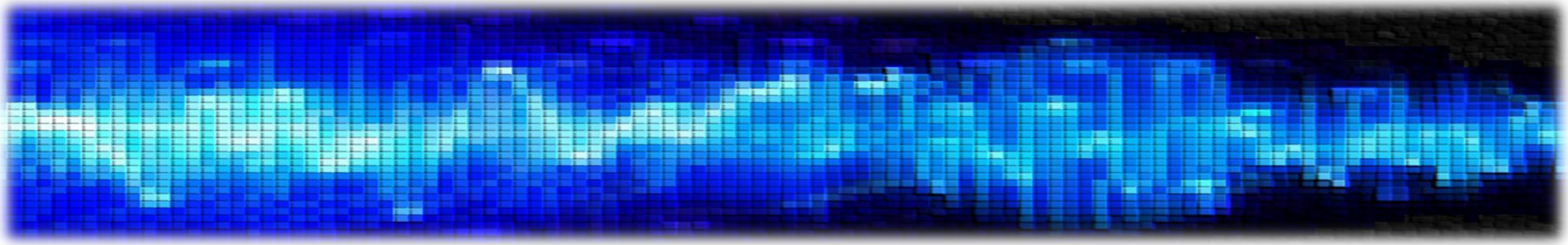
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 25Η



- Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Ο Η/Υ είναι μια μηχανή που αποθηκεύει διακριτές τιμές
- Ιδανικά θα θέλαμε να μπορούμε να επεξεργαστούμε όχι μόνο το πεδίο του χρόνου αλλά και το πεδίο της συχνότητας!
  - Όμως η τελευταία είναι συνεχής μεταβλητή (ω) και μπορούμε μόνο αριθμητικά να την προσεγγίσουμε
    - …όπως κάναμε στα παραδείγματα Octave του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου
- **Ερώτημα**: <u>τι θα συμβεί άραγε αν δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$?</u>
- Ξέρουμε από το θεώρημα της Δειγματοληψίας του Shannon ότι δειγματοληψία στον ένα χώρο (χρόνο) οδηγεί σε περιοδικότητα στον άλλο χώρο (συχνότητα)
- Γνωρίζουμε επίσης από τη θεωρία Fourier συνεχούς χρόνου ότι περιοδικότητα στον ένα χώρο (χρόνο) οδηγεί σε «δειγματοληψία» στον άλλο (διακριτές συχνότητες)
- Αν τώρα δειγματοληπτήσουμε το χώρο της συχνότητας (ο οποίος είναι από τη φύση του περιοδικός!), <u>λογικά</u> θα πρέπει να λάβουμε ένα περιοδικό σήμα στο χώρο του χρόνου (ο οποίος είναι διακριτός)!
- Ας μιλήσουμε για όλα αυτά με περισσότερη λεπτομέρεια ☺

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Δειγματοληπτούμε ομοιόμορφα N φορές μέσα σε μια περίοδο 2π

- Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ακολουθία διακριτών τιμών $X[k]$ του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, δειγματοληπτώντας τον σε συχνότητες $\omega_k = 2\pi k/N$, με $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Λόγω της περιοδικότητας του $X(e^{j\omega})$, και τα δείγματα του, $X[k]$, θα επαναλαμβάνονται κι αυτά ανά N
- Άρα έχουμε ένα **περιοδικό διακριτό** φάσμα $X[k] = X[k+N]$
  - Επιβεβαιώστε το!

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Τέτοια φάσματα αντιστοιχούν σε ***περιοδικά σήματα*** **διακριτού χρόνου**

$$x[n] = x[n + N]$$

- Είναι λογικό, καθώς πήραμε (δειγματοληπτήσαμε σε) πεπερασμένες συχνότητες οι οποίες είναι όλες ακέραια πολλαπλάσια της $2\pi/N$

- Άρα θα υπάρχει κάποιο περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου που θα έχει ως φάσμα την περιοδική ακολουθία τιμών $X[k]$

- Ας βρούμε ποιο είναι αυτό το περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Η περιγραφή περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου μπορεί να περιγραφεί μέσω των Σειρών Fourier Διακριτού Χρόνου
- Θα κάνουμε μια παράκαμψη ☺
- Δεδομένου ότι θέλουμε να ανακατασκευάσουμε το σήμα στο χρόνο μόνο από N δείγματα, το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου θα μετατραπεί ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \rightarrow \hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}\frac{2\pi}{N}$$

- Έτσι, το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί σε αυτές τις N, το πλήθος, συχνότητες γράφεται ως

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Το παραπάνω αποτελεί το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier διακριτού χρόνου (αλλά ας κάνουμε ότι δεν το ξέρουμε ☺)
- Παρατηρήστε ότι $\hat{x}[n] = \hat{x}\,[n+N]$
  - Πράγματι το σήμα μας είναι **περιοδικό στο χρόνο**!
  - Θα το συμβολίζουμε με $x_p[n]$ ($\hat{x}[n] = x_p[n]$)

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Έστω λοιπόν

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

με $k = 0, \ldots, N-1$

- Αντικαθιστώντας το $X[k]$:

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\frac{jk2\pi n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]e^{-\frac{j2\pi kl}{N}}\right)e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi k(n-l)}{N}}\right]$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]d_p[n-l] \longrightarrow x[n] * d_p[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1-a^N}{1-a}$$

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$d_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi kn}{N}} = \begin{cases} 1, & n = lN \\ 0, & n \neq lN \end{cases}$$

- Το παραπάνω σήμα γράφεται με χρήση συναρτήσεων Δέλτα, ως

$$d_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta[n-lN]$$

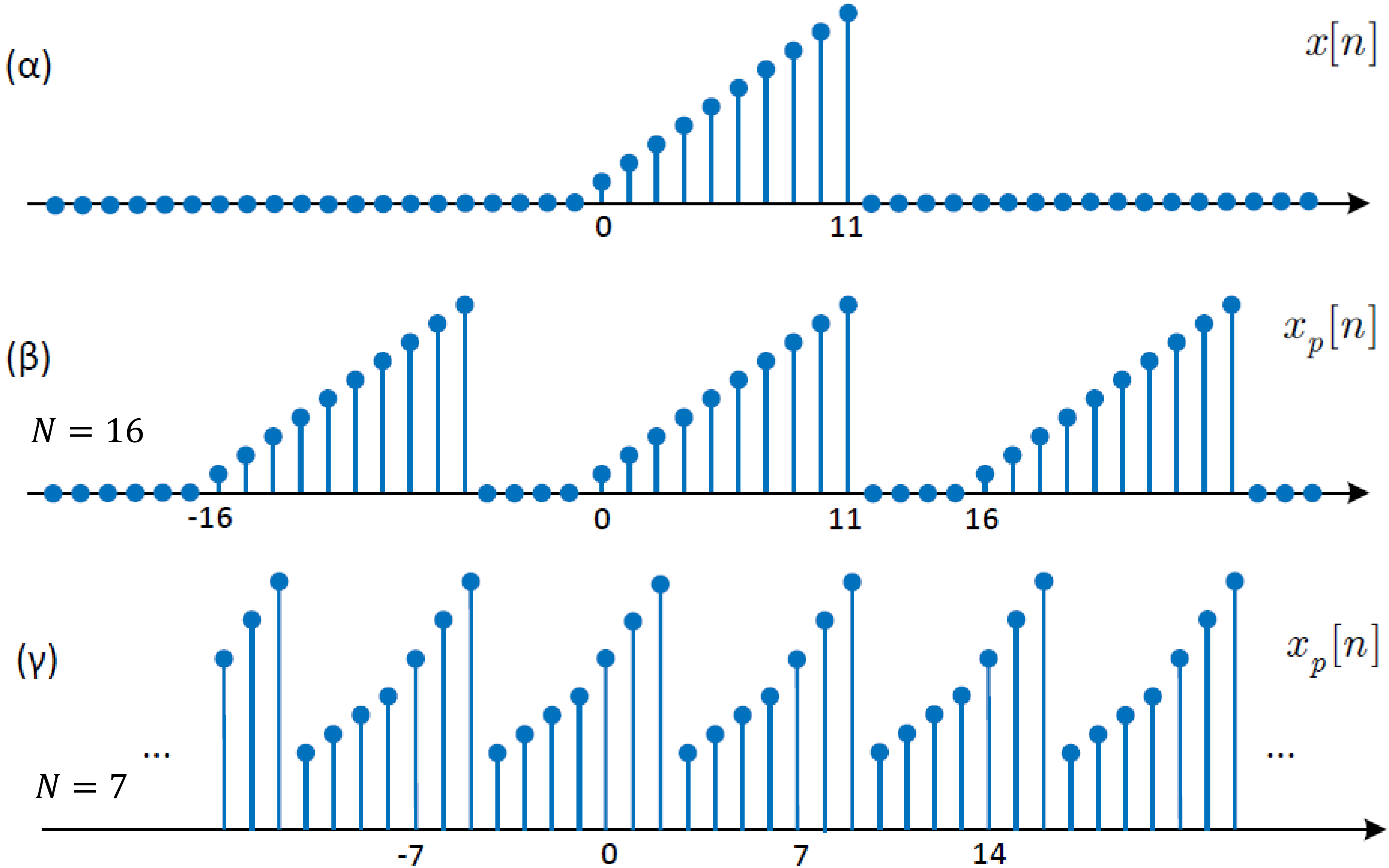
- Άρα το περιοδικό σήμα γράφεται ως

$$x_p[n] = x[n] * d_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n-lN]$$

- Ξεκάθαρα ☺ βλέπουμε ότι το περιοδικό σήμα μας είναι μια επανάληψη του απεριοδικού σήματος $x[n]$ (του οποίου το μετασχ. Fourier δειγματοληπτήσαμε σε N σημεία) ανά N δείγματα, με N να αποτελεί την περίοδο του περιοδικού σήματος **αλλά και** την περίοδο δειγματοληψίας του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου!! ☺

- Μπορείτε να φανταστείτε τι συμβαίνει για διάφορες τιμές του N?
  - Δηλ. ποιο περιοδικό σήμα στο χρόνο συνθέτουμε για διάφορες τιμές του N?

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**



- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Καταλαβαίνετε ότι μια «κακή» επιλογή του N μπορεί να οδηγήσει σε **time-aliasing**
  - … που είναι το ακριβώς αντίστοιχο του frequency aliasing που γνωρίζετε από το θεώρημα της δειγματοληψίας
    - Επικάλυψη των γειτονικών επαναλήψεων του $x[n]$

- Μπορούμε να αποφύγουμε το time-aliasing μόνο στην περίπτωση που το σήμα $x[n]$ έχει πεπερασμένη διάρκεια

- Αν το σήμα έχει διάρκεια N_L τότε αρκεί να επιλέξουμε N τέτοιο ώστε

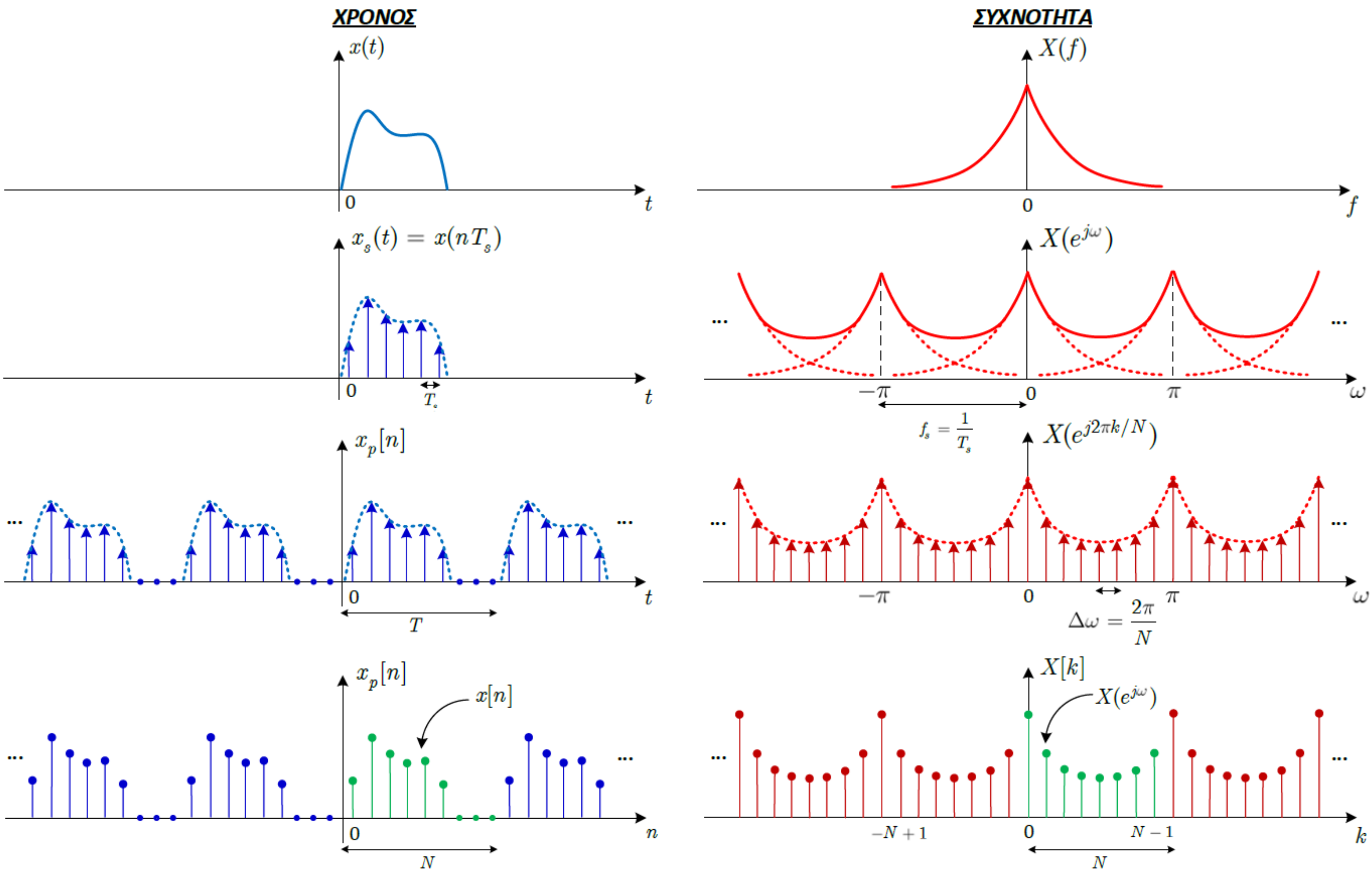
$$N \geq N_L$$

- Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος δειγματοληψίας του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο αυτό αν θέλουμε να μπορούμε να συσχετίσουμε το απεριοδικό σήμα $x[n]$ με τους συντελεστές $X[k]$

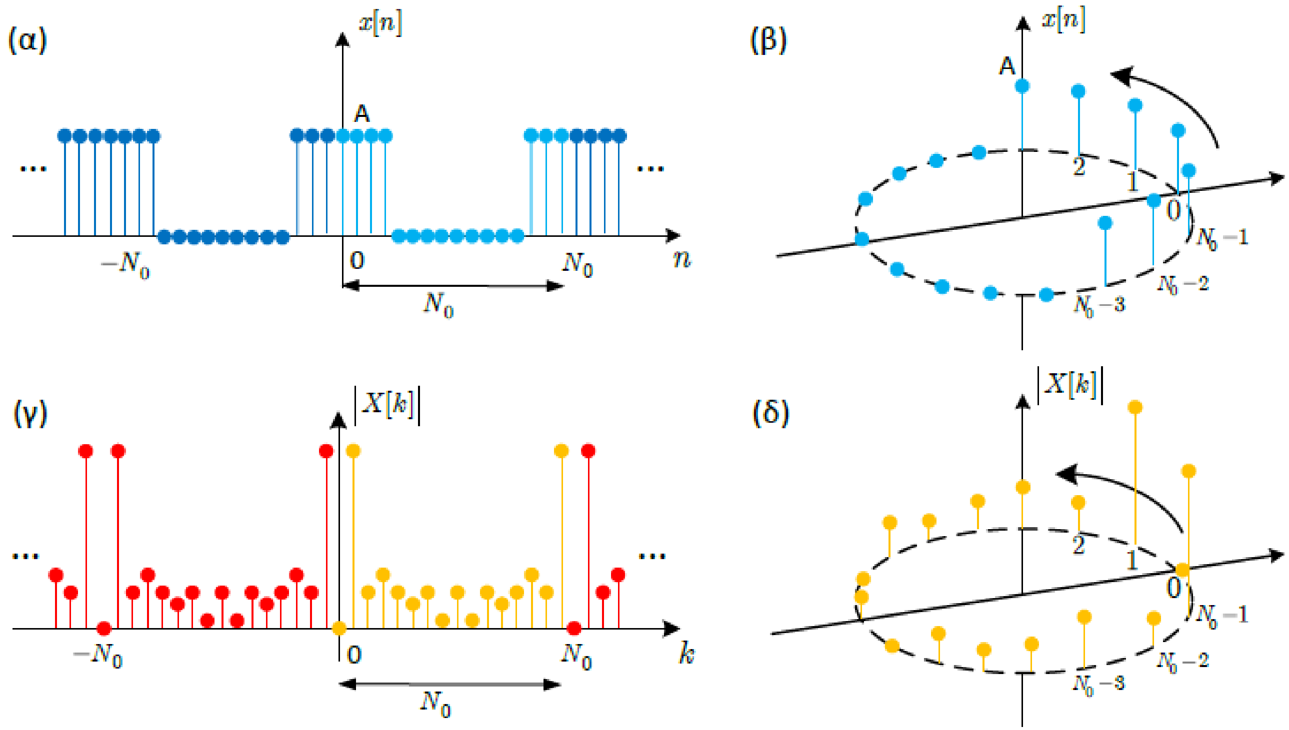
- Πως το συσχετίζουμε? Απομονώνοντας μια περίοδο από το περιοδικό σήμα $x_p[n]$
  - Η διάρκεια της θα είναι N

- Ας συνοψίσουμε…

• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**



- **Διακριτός Μετασχ. Fourier**:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- **Αντίστρ. Διακριτός Μετασχ. Fourier:**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Είναι εμφανές ότι μπορούμε να πάρουμε το Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ από τα δείγματα $X[k]$ του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier
  - Η διαδικασία μοιάζει πολύ με την ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου από τα δείγματα του (θεώρημα δειγματοληψίας)

- Η αποκοπή μιας περιόδου από το περιοδικό σήμα $x_p[n]$ το οποίο έχει τους συντελεστές Fourier $X[k]$ ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του με ένα τετραγωνικό παράθυρο διάρκειας N:

$$x[n] = x_p[n]w[n]$$

με

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

- Ο μετασχ. Fourier του γινομένου ισοδυναμεί με συνέλιξη των μετασχ. Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left[X_p(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})\right]$$

- Γνωρίζουμε ότι

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j\omega(N-1)}{2}}$$

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left[X_p(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})\right]$$

με

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j\omega(N-1)}{2}}$$

- Ποιος είναι ο μετασχ. Fourier $X_p(e^{j\omega})$ του περιοδικού σήματος $x_p[n]$?
- Έχουμε ήδη εκφράσει το περιοδικό σήμα σε ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier διακριτού χρόνου, οπότε:

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \leftrightarrow X_p(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

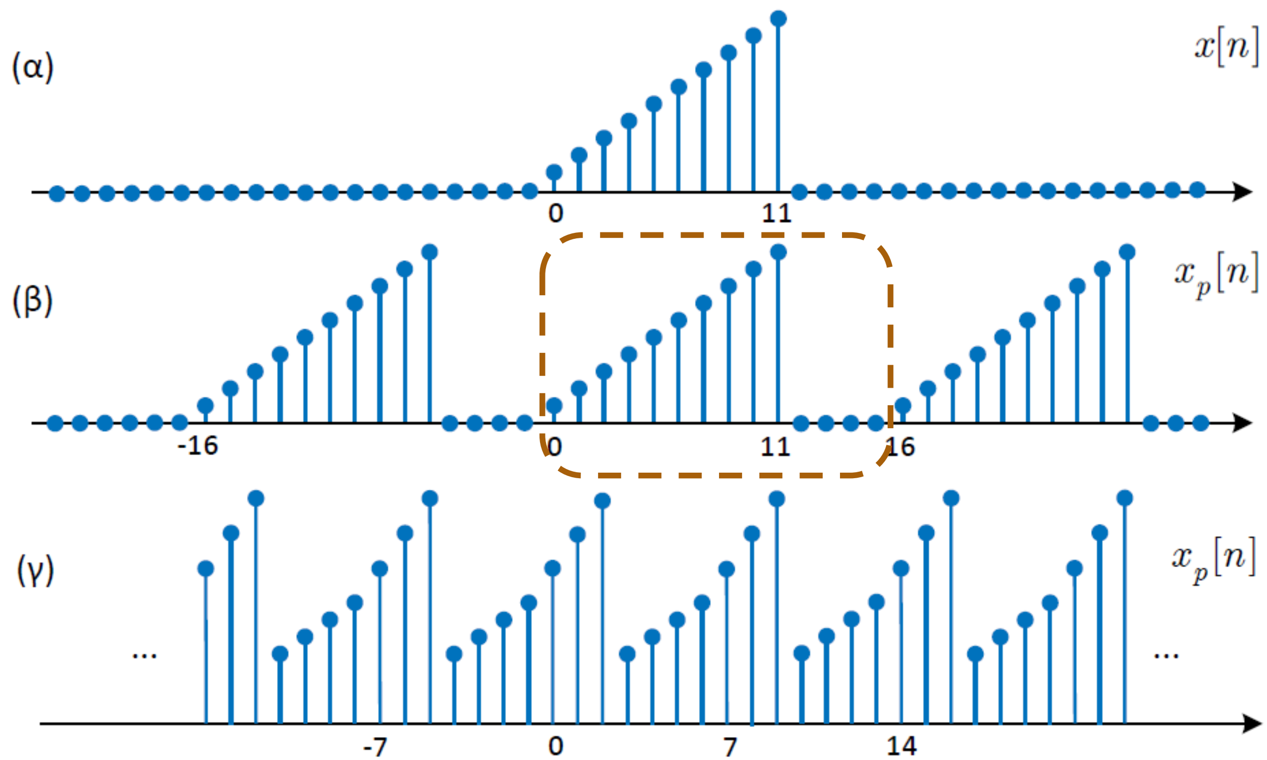
- Συνολικά:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{\sin\left(\frac{\omega N - 2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega N - 2\pi k}{2N}\right)} e^{-\frac{j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)(N-1)}{2}}$$

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Δεδομένου ότι τηρούμε τον περιορισμό για $N \geq N_L$, ίσως σκεφτείτε ότι για αρκετά μεγάλη επιλογή του N, τα δείγματα του Διακριτού Μετασχ. Fourier θα είναι τόσο κοντά μεταξύ τους που θα μπορούμε να έχουμε μια καλή προσέγγιση του φάσματος του Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου

- Αυτό είναι προφανώς σωστή σκέψη! Αλλά σε ποιο σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο Διακριτός Μετασχ. Fourier με τα «παραπανίσια» δείγματα?



- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**
- Εύκολα μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι για $N > N_L$, έχουμε το περίφημο **zero-padding** στο πεδίο του χρόνου
  - Εμφανίζονται μηδενικά μετά το τέλος του σήματος. Πόσα όμως?
  - Όσα και τα «παραπανίσια» δείγματα (σε σχέση με τη διάρκεια του απεριοδικού σήματος) που πήραμε κατά τη δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας
- Το zero-padding στο χρόνο προσφέρει απλώς ένα Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier που είναι πιο «ευπαρουσίαστος» (πλησιάζει περισσότερο σαν γραφική παράσταση στο Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου)
- Το zero-padding **ΔΕΝ** προσθέτει καμιά επιπλέον πληροφορία για το σήμα
  - Άλλωστε απλώς βάζουμε μηδενικά στο τέλος του…
- Είναι κοινό λάθος να θεωρείται πως το zero-padding «*βελτιώνει την ανάλυση του Διακριτού Μετασχ. Fourier*»
- Ανάλυση σημαίνει διακριτική ικανότητα, κάτι που δε συμβαίνει με το zero-padding
- Ο λόγος αυτής της παρανόησης οφείλεται εν πολλοίς σε παραδείγματα όπως το παρακάτω

- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Έστω ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου του σήματος

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \leftrightarrow W\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-\frac{j3\omega}{2}}$$

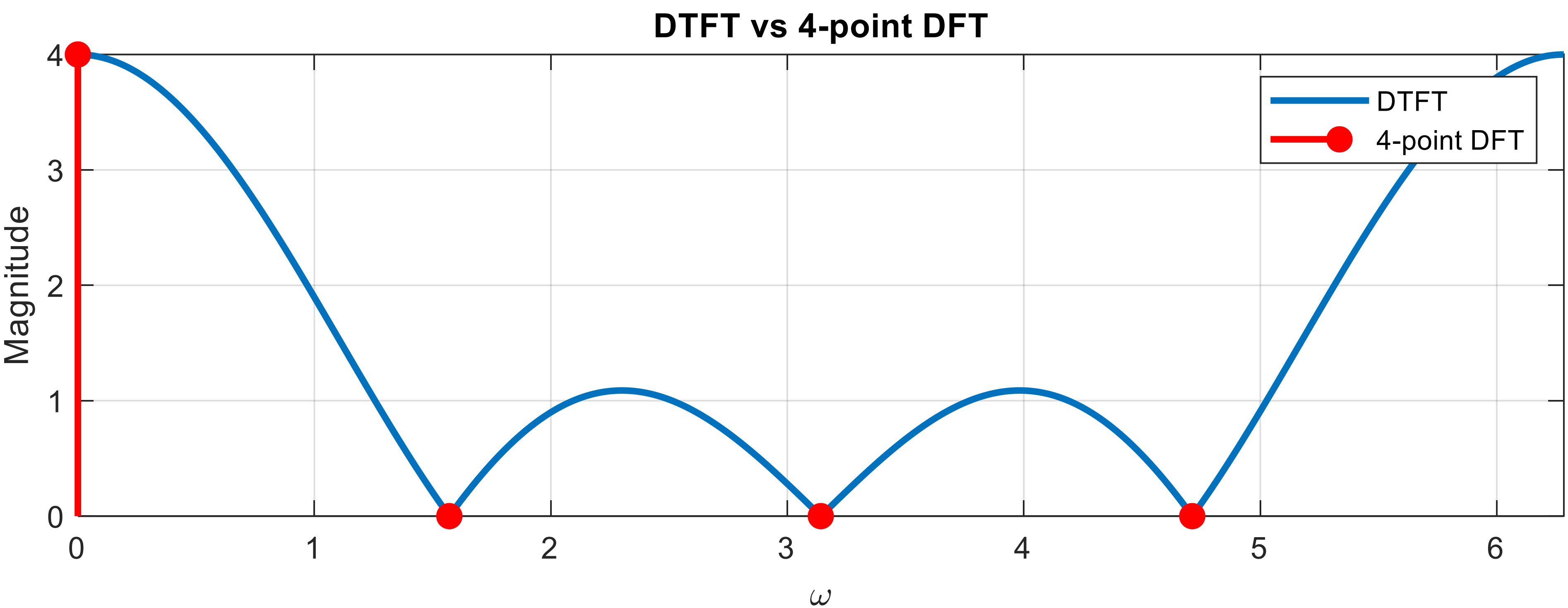
- Ας υπολογίσουμε το Διακριτό Μετασχ. Fourier για διάφορες τιμές του N και ας συγκρίνουμε με το φάσμα (πλάτους και φάσης) του $W\left(e^{j\omega}\right)$

- Ενδεικτικός κώδικας:

```
x = ones(1,4);
% N-point FFTs
X1 = fft(x, 4);
X2 = fft(x, 8);
X3 = fft(x, 64);
k1 = (0:3)*2*pi/4;
k2 = (0:7)*2*pi/8;
k3 = (0:63)*2*pi/64;
% DTFT
w = linspace(0, 2*pi, 1200);
DTFT = (sin(2*w)./sin(w/2)).*exp(-1i*3*w/2);
% Magnitudes
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k1, abs(X1),'r');
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k2, abs(X2),'r');
figure; plot(w, abs(DTFT)); hold on; stem(k3, abs(X3),'r');
% Phases
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k1, angle(X1),'r');
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k2, angle(X2),'r');
figure; plot(w, angle(DTFT)); hold on; stem(k3, angle(X3),'r');
```

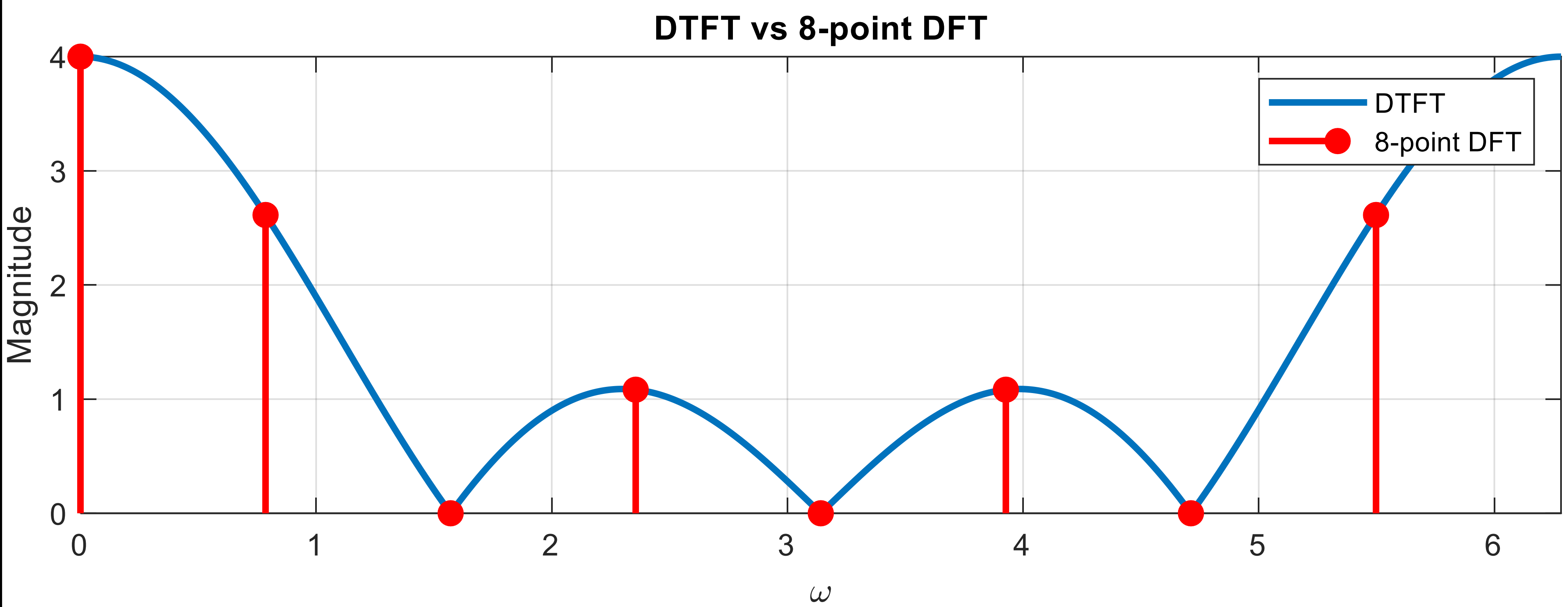
• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα πλάτους



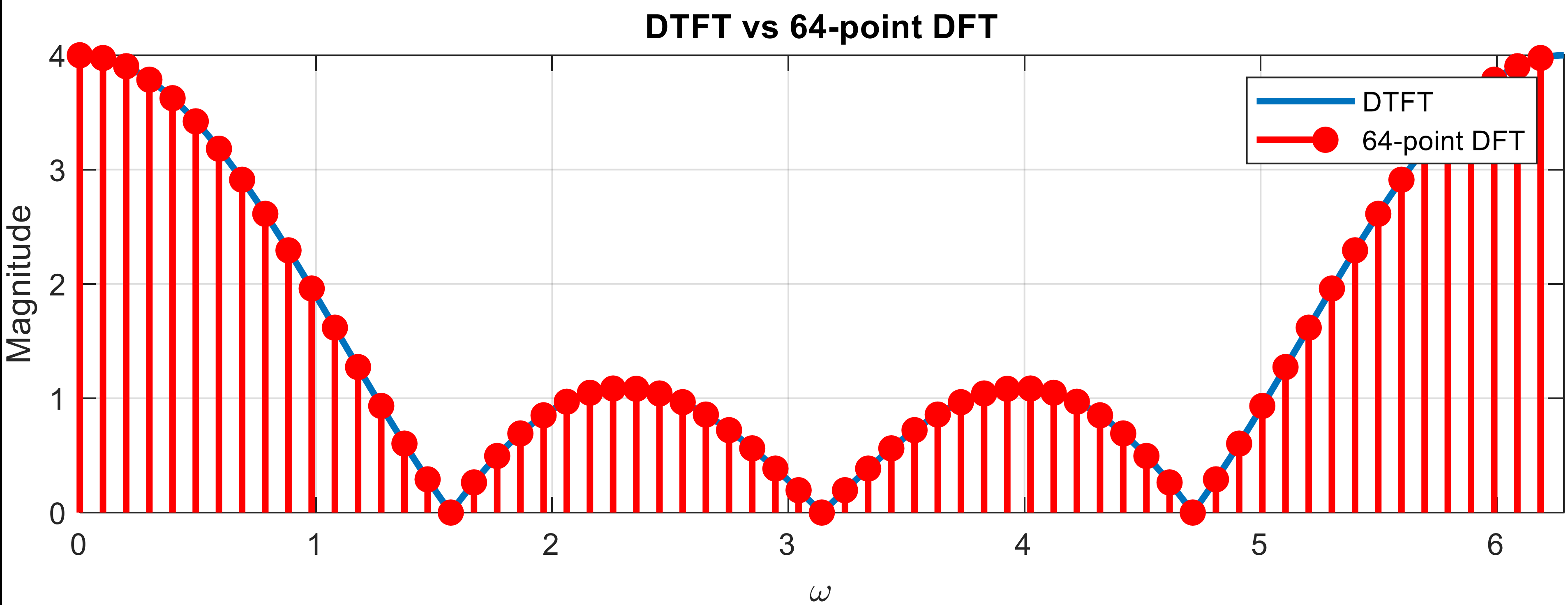
- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Φάσμα πλάτους



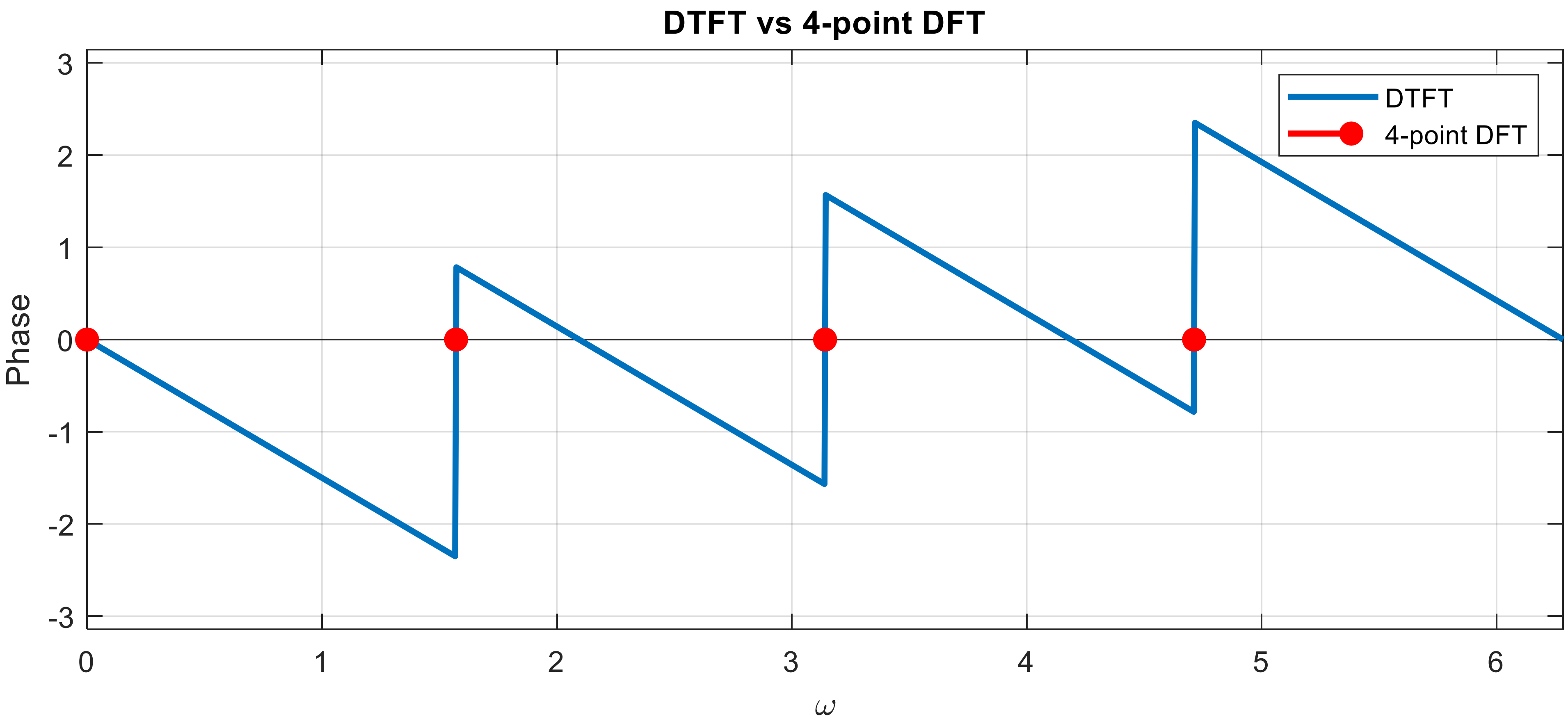
• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα πλάτους



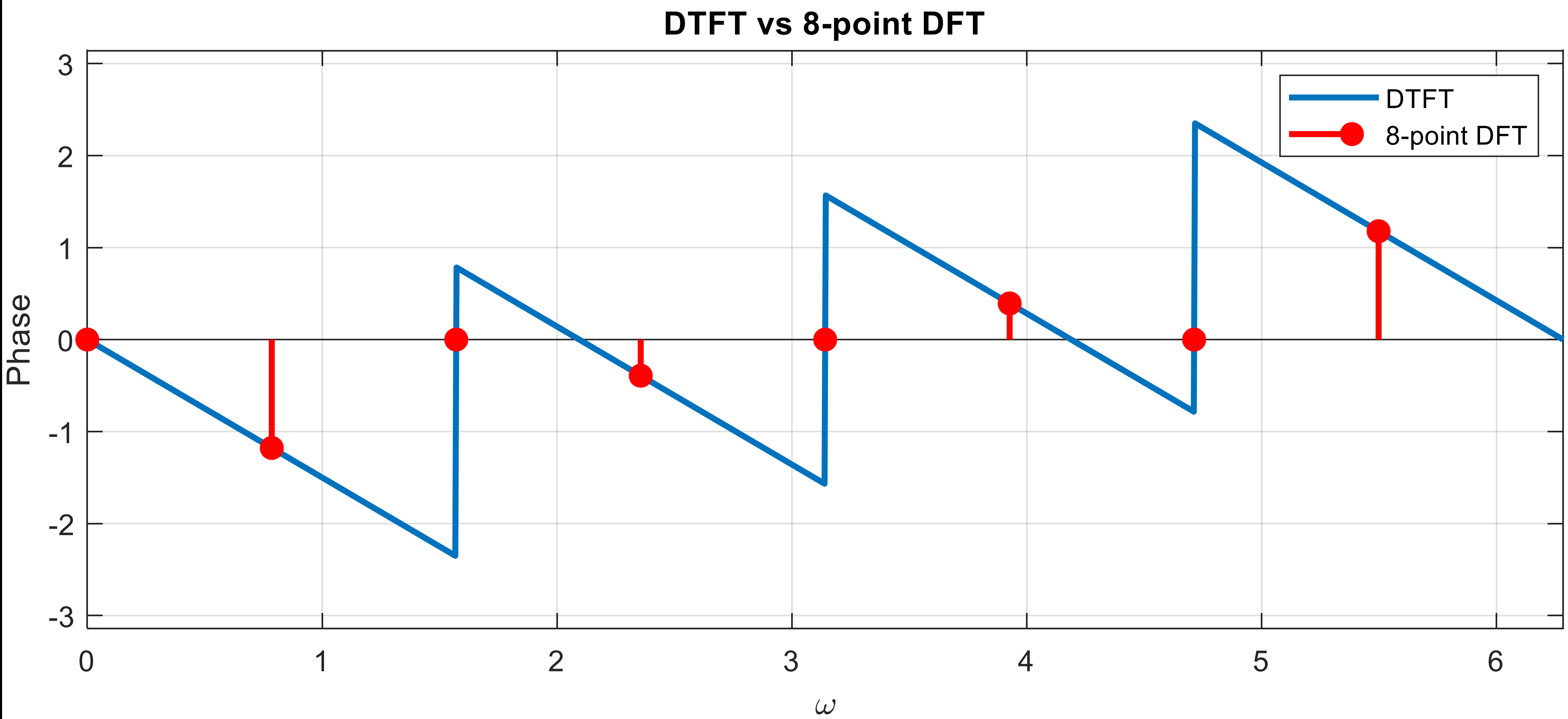
• Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα φάσης



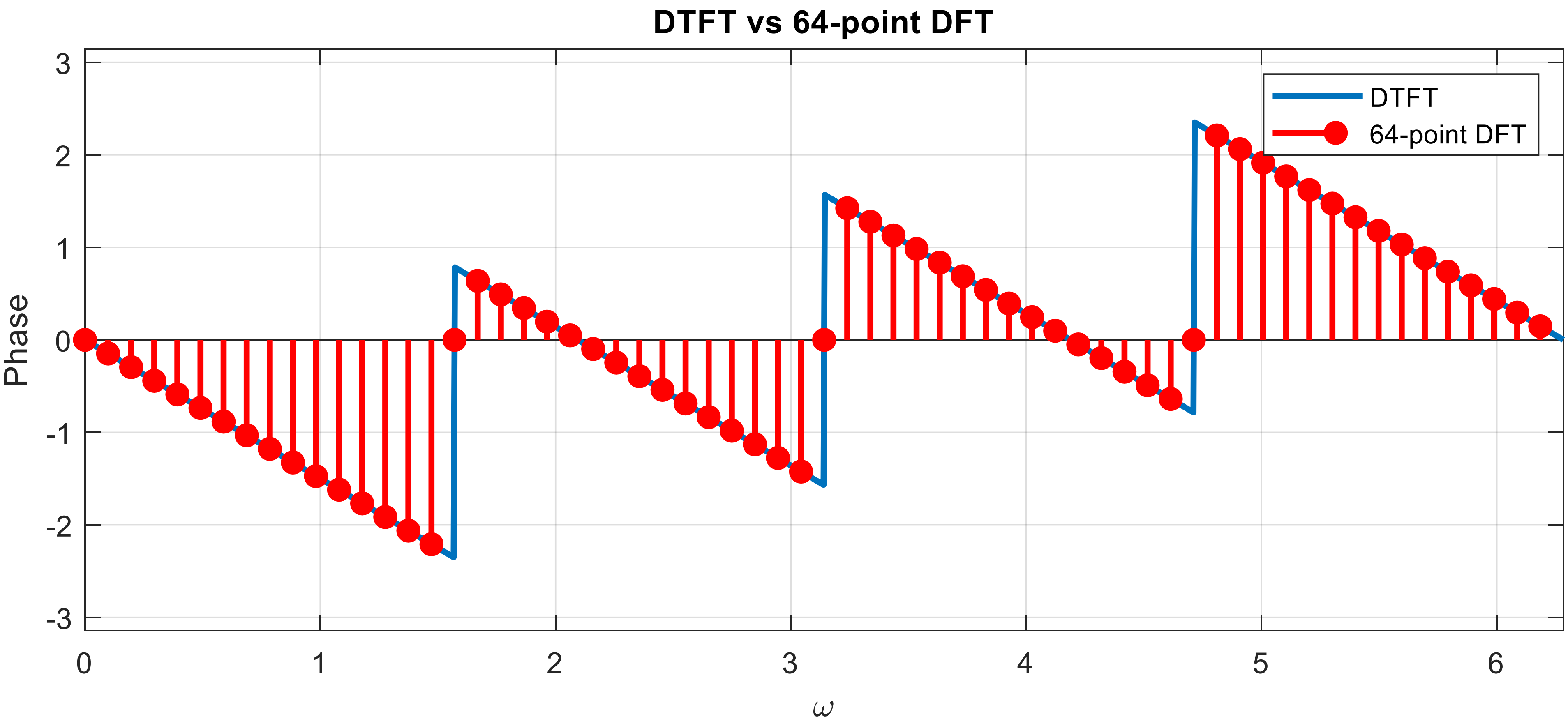
- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Φάσμα φάσης



- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

Φάσμα φάσης

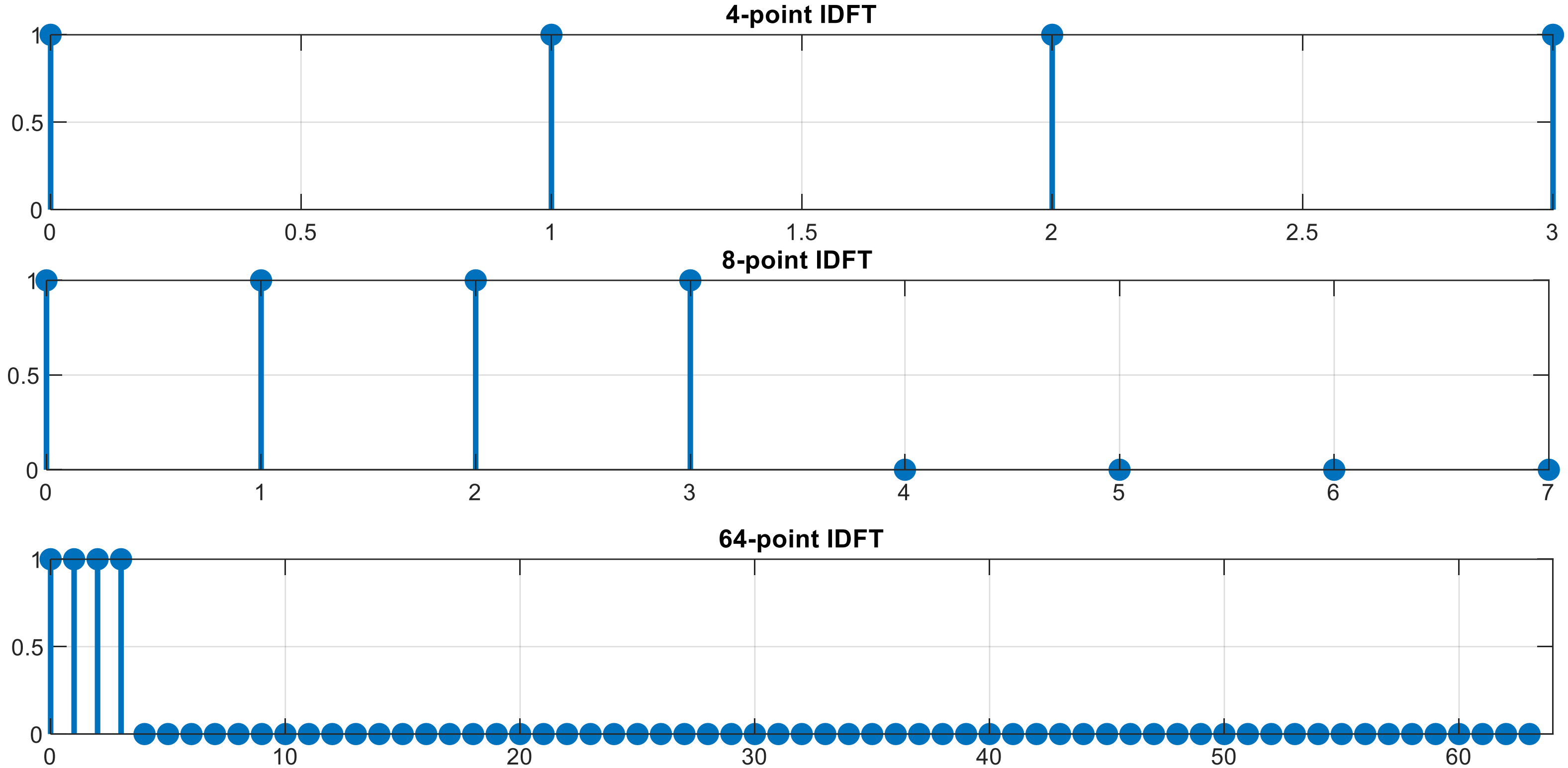


- **Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier**

- Παρατηρήσατε ότι τα περισσότερα σημεία του Διακριτού Μετασχ. Fourier μας δίνουν πράγματι καλύτερη εικόνα για το Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου

- Έχουμε δηλ. πιο **πυκνή** δειγματοληψία του $X(e^{j\omega})$ για μεγάλα N

- Ποια σήματα στο χρόνο (**βασικές περίοδοι** του περιοδικού σήματος) αντιστοιχούν μέσω του Αντίστρ. Διακριτού Μετασχ. Fourier στις δειγματοληψίες που είδατε πριν?



- Θα επανέλθουμε αργότερα στο θέμα της ανάλυσης (διακριτικής ικανότητας)

Συνεχίζεται... ☺