Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

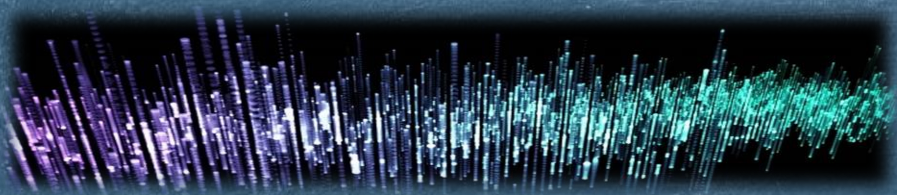
ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Μετασχηματισμός Z

Τι περιέχει το ΗΥ370?

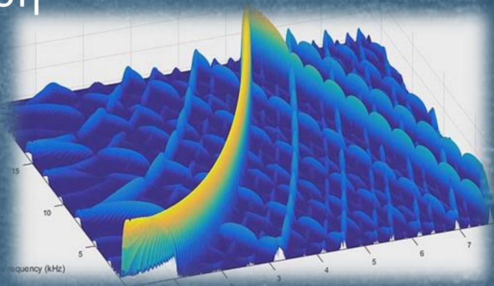
1^{o} Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας

- Παρ’ όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:

  1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  2. Υπάρχουν συστήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα

- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα πως δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!

- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι’ αυτό?

- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

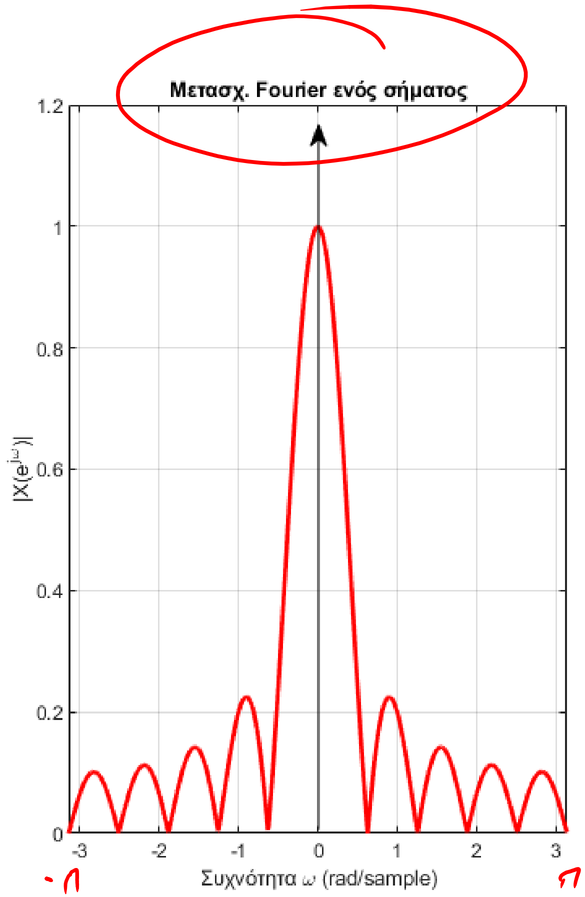
- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους $e^{-j\omega n}$

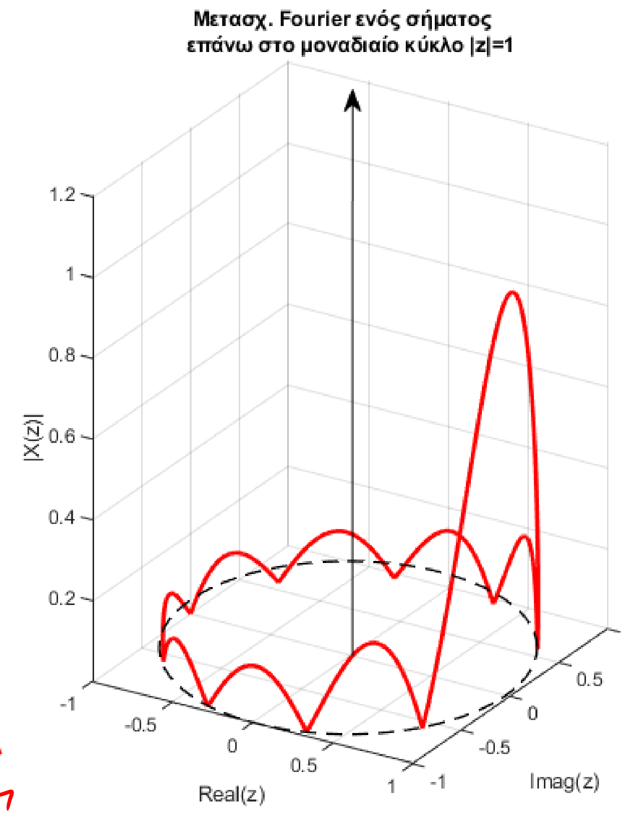
$$X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον *μοναδιαίο* κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου

- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα

- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
  - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?

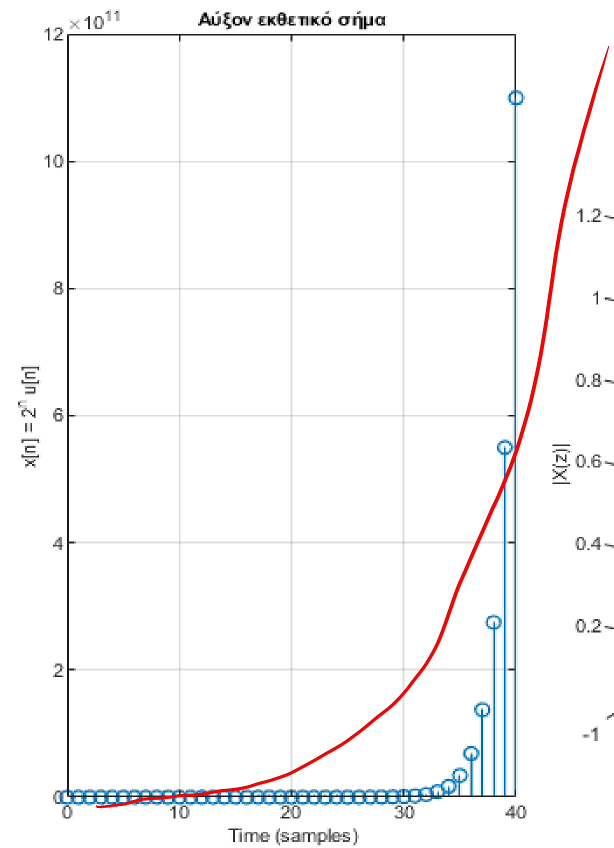


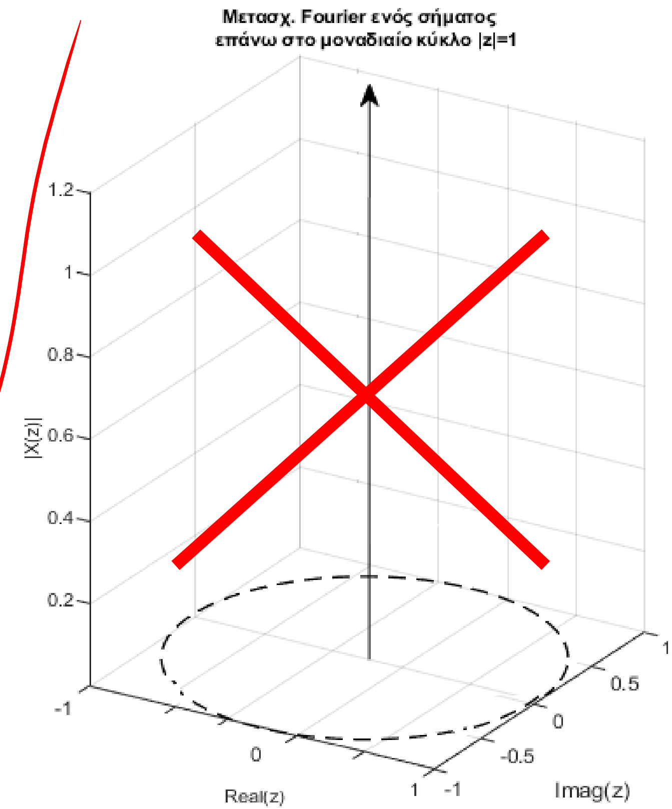


- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier
- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους
- Διαφορετικού πλάτους ίσως?





- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

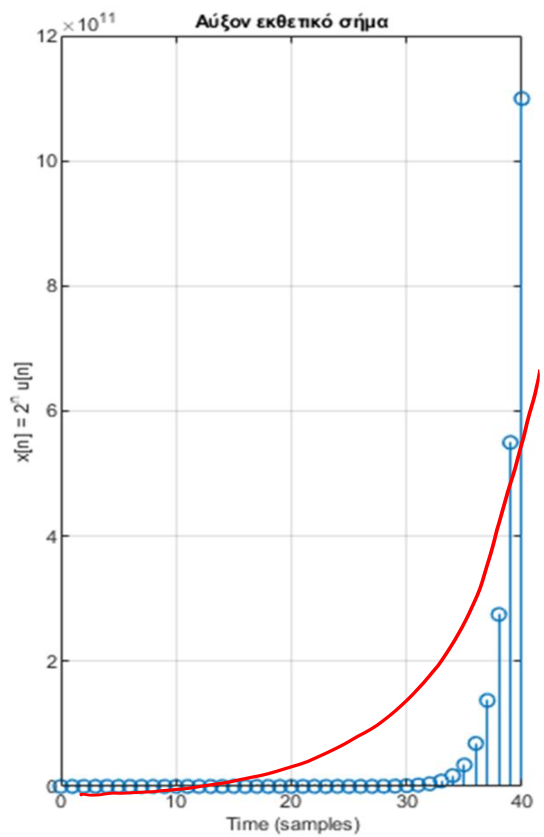
$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\underbrace{\left(re^{j\omega}\right)}_{z}^{-n}$$

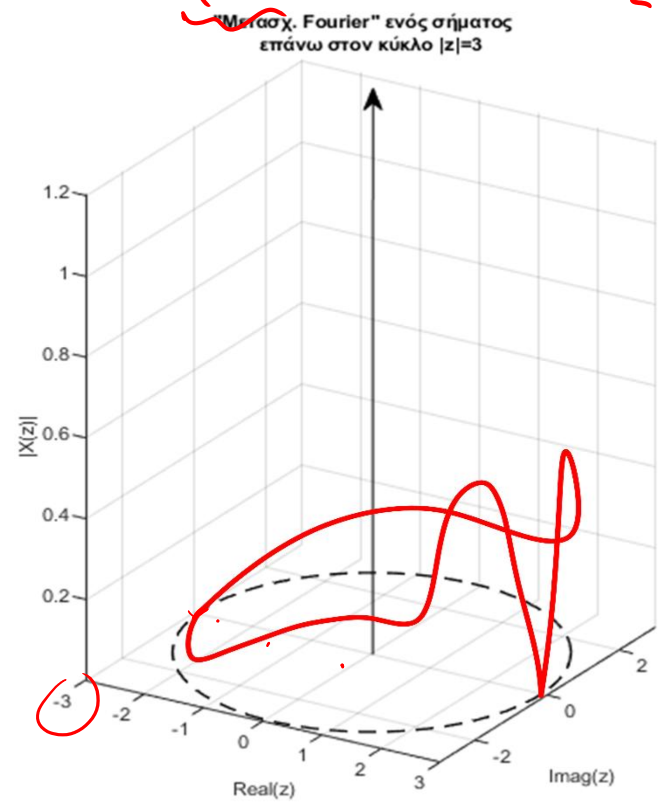
$$2^n u[n] \cdot r^{-n} e^{-j\omega n} =$$

$$= \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$r > 2$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r





- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?

- Προφανώς όταν

$$\left|X\left(re^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]r^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| < +\infty \quad \leftarrow$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
  - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη

- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2^n}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2}{r}\right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

ROC

- Θέτοντας

$$\boxed{z = re^{j\omega},} \quad r \in \Re_+$$

$|z| = r$

  η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$|z| > 2$$

  και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού

- Ο ~~νέος~~ αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}}$$

ROC

$\frac{1}{1-2z^{-1}}, \; |z|>2$

  και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

$\sum_n 2^n u(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n =$

  - Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

$|2z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|2|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > 2$

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| > 2$$

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = \sum_n a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \Bigg\} \Rightarrow$$

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

$$\Rightarrow Z\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \ (|z| > |a|) = \frac{z}{z-a}$$

$$X(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

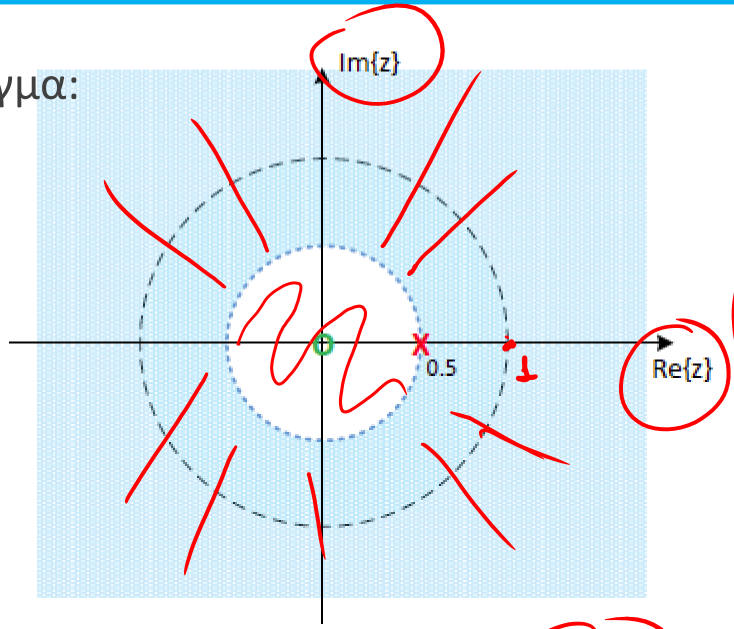
$$Q(z) = z$$

$$P(z) = z - a$$

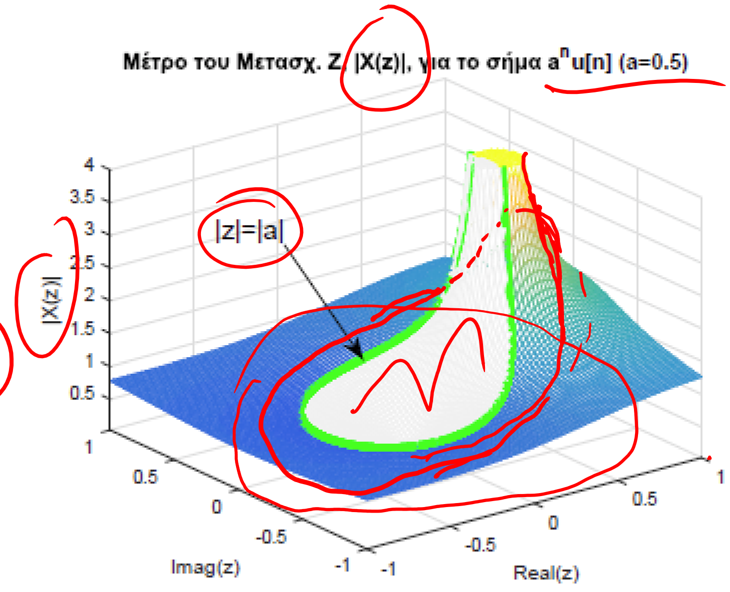
1 μηδενικό στο $z_0 = 0$

1 πόλο στο $z_1 = a$

- Παράδειγμα:



(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Ζ για $a = 0.5$



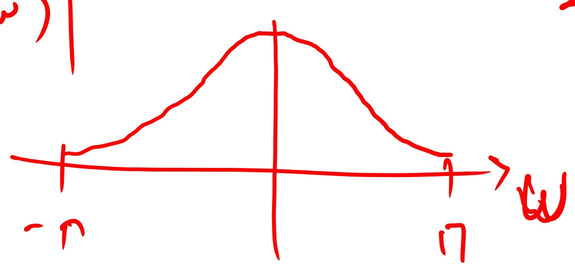
(β′) Μέτρο μετασχ. Ζ.

$Z_0 = 0$ μηδ.

$Z_1 = a = \frac{1}{2}$ πόλος

$|z| > |a| \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$

$|X(e^{j\omega})|$



$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n} x[n] z^{-n} = -\sum_{n} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n =$$

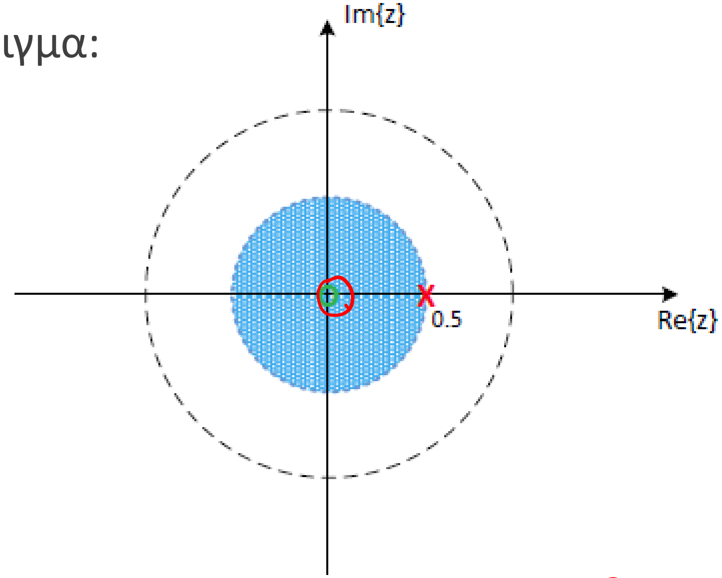
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n + 1 = -\frac{1}{1-a^{-1}z} + 1 = \frac{-1+1-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} =$$

$$= \frac{-a^{-1}z}{-a^{-1}z}\frac{1}{(-az^{-1}+1)} \Rightarrow$$

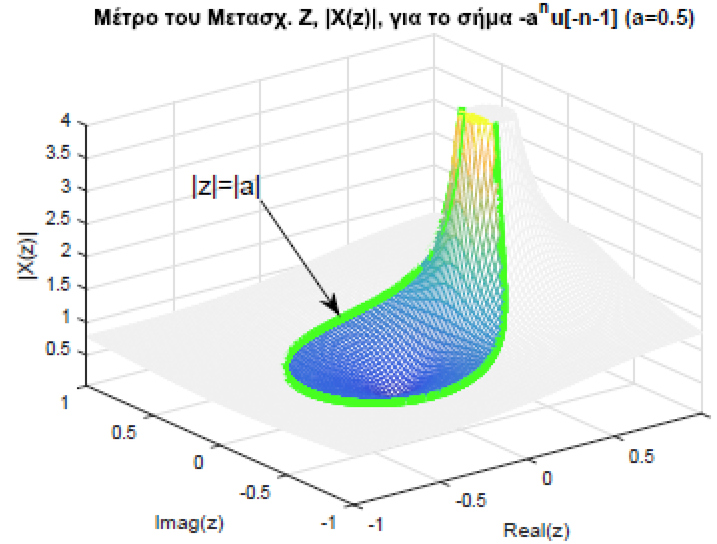
$$|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow \frac{|z|}{|a|} < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

- Παράδειγμα:



(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β′) Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < a$$

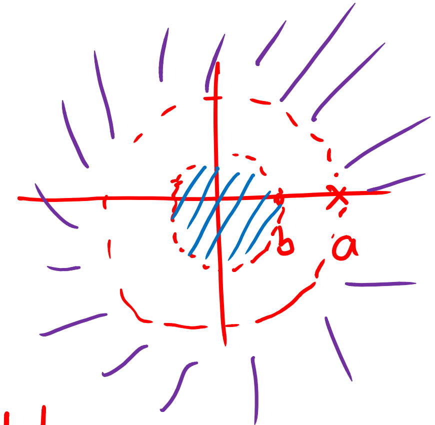
$$= \frac{z}{z-a}$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

$x_1[n] = a^n u[n] \rightarrow X_1(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$

$x_2[n] = -b^n u[-n-1] \rightarrow X_2(z) = \dfrac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| < |b|$



$|a| \geq |b|$

ΔΕΝ υπάρχει ο $X(z)$

$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$

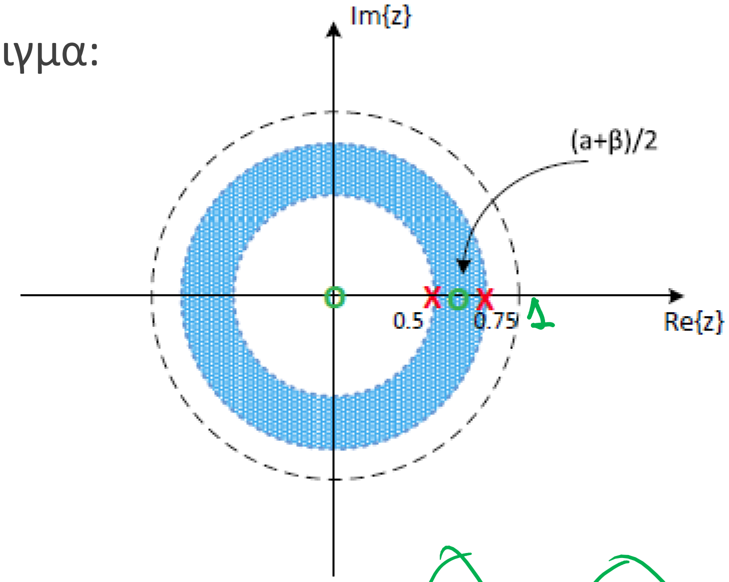
Αν $|b| > |a| \Rightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} + \dfrac{1}{1-bz^{-1}} = \dfrac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} =$

$|a| < |z| < |b|$

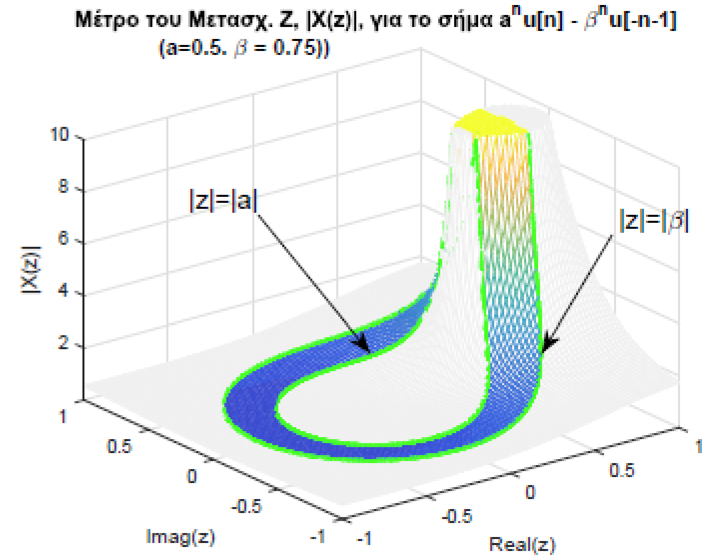
$|a| < |z| < |b|$

$= \dfrac{z^{-1}(2z-(a+b))}{z^{-2}(z-a)(z-b)} = \dfrac{z(2z-(a+b))}{(z-a)(z-b)}$

- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης, με* $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



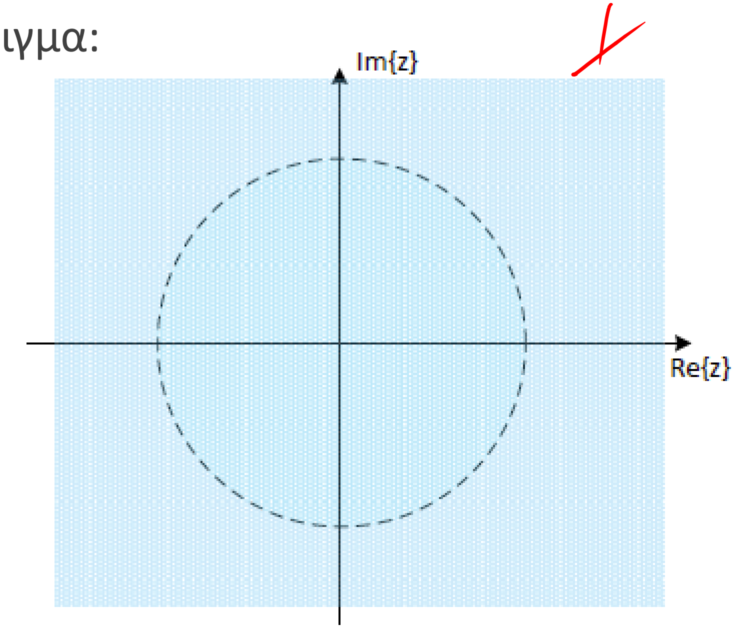
(β′) *Μέτρο μετασχ.* Z *με* $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

- Παράδειγμα:

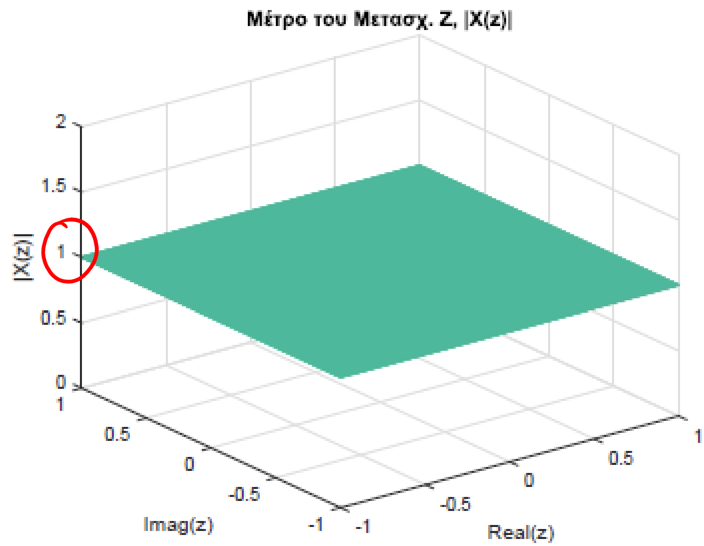
  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = \delta[n]$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = \sum_n \delta[n] z^{-n} = 1 \quad \forall z$$

- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n]$.

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = \sum_n \delta[n - n_0] z^{-n} = z^{-n_0}$$

a) $n_0 > 0$ $\quad X(z) = \frac{1}{z^{n_0}}$

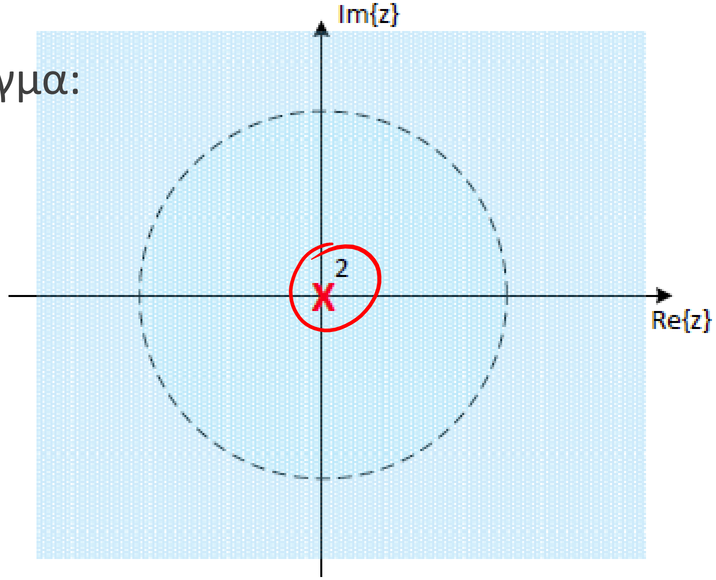
$$\lim_{z \to 0} X(z) = \infty$$

b) $n_0 < 0$ $\quad X(z) = z^{n_0}$

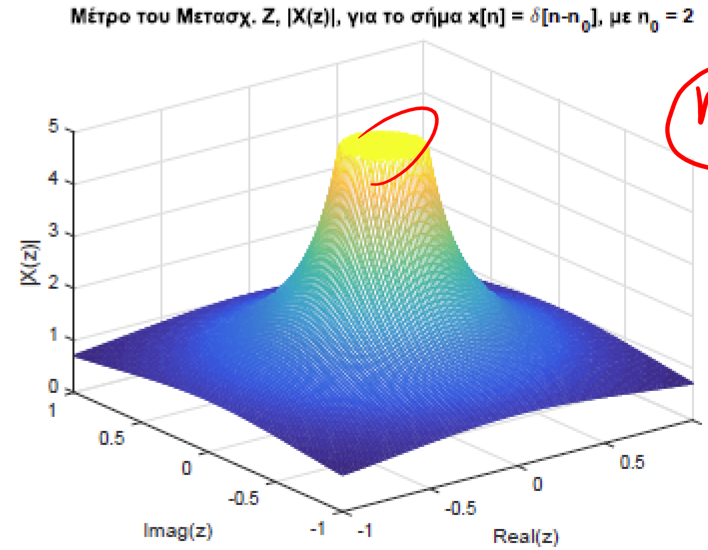
$$\lim_{z \to 0} X(z) = 0$$

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \infty$$

- Παράδειγμα:



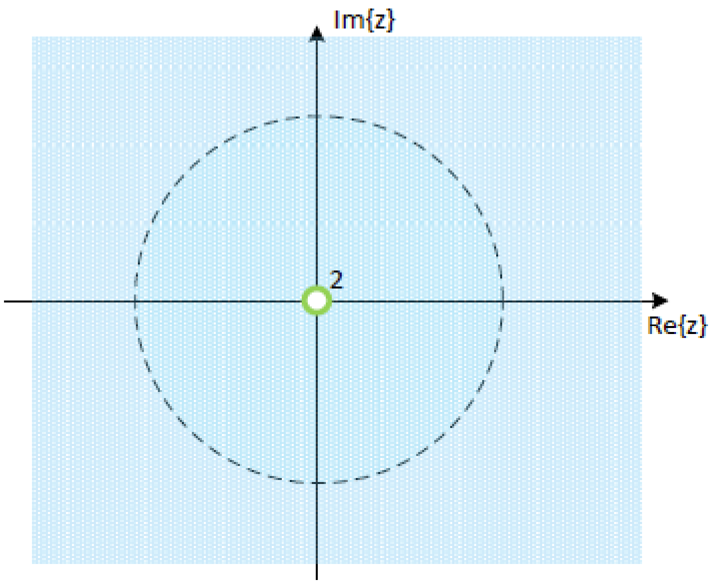
(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



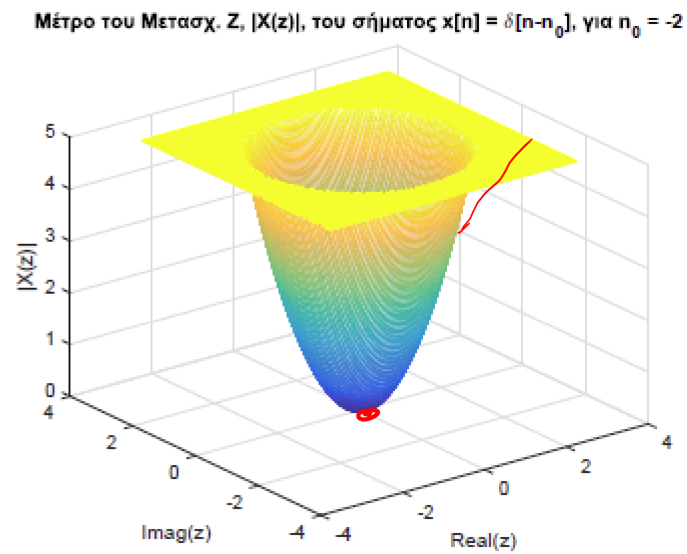
n₀=2

δ[n-n₀]

(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n - n_0]$, *για* $n_0 = 2$.



(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



n₀=-2

(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n - n_0]$, *για* $n_0 = -2$.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

r=1

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Ζ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$= \frac{1}{1-are^{-j\omega}}\Big|_{r=1} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

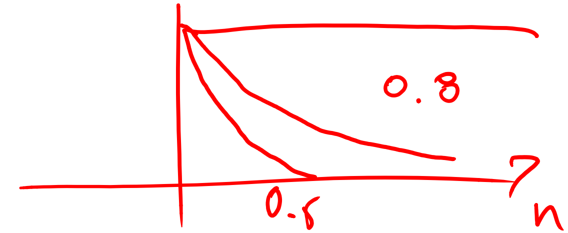
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
  - ΌΧΙ!
  - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}, \qquad \boxed{X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}}$$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

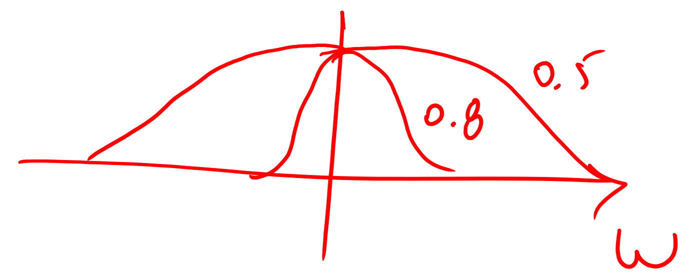


  - Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

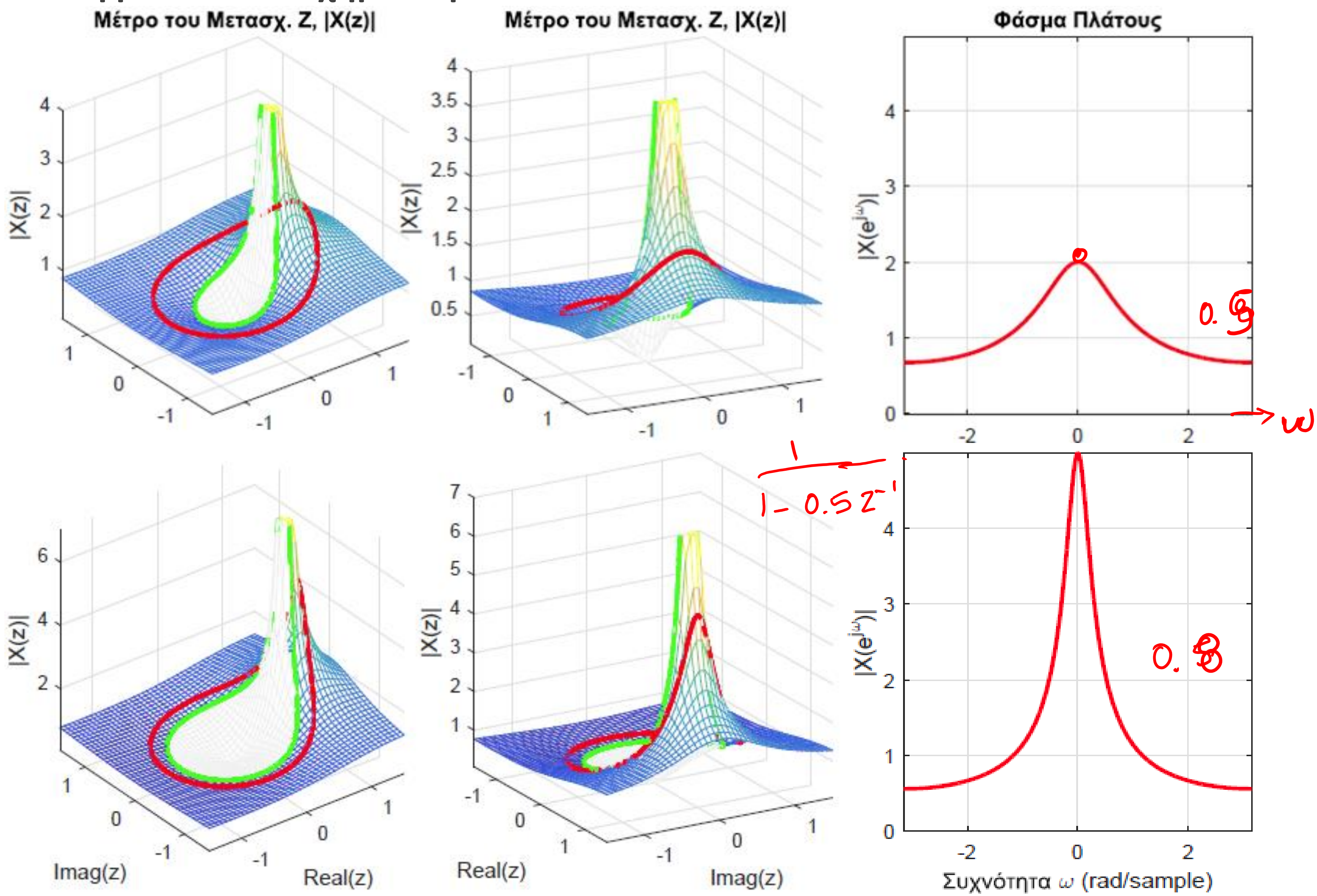
  - Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

  - Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$

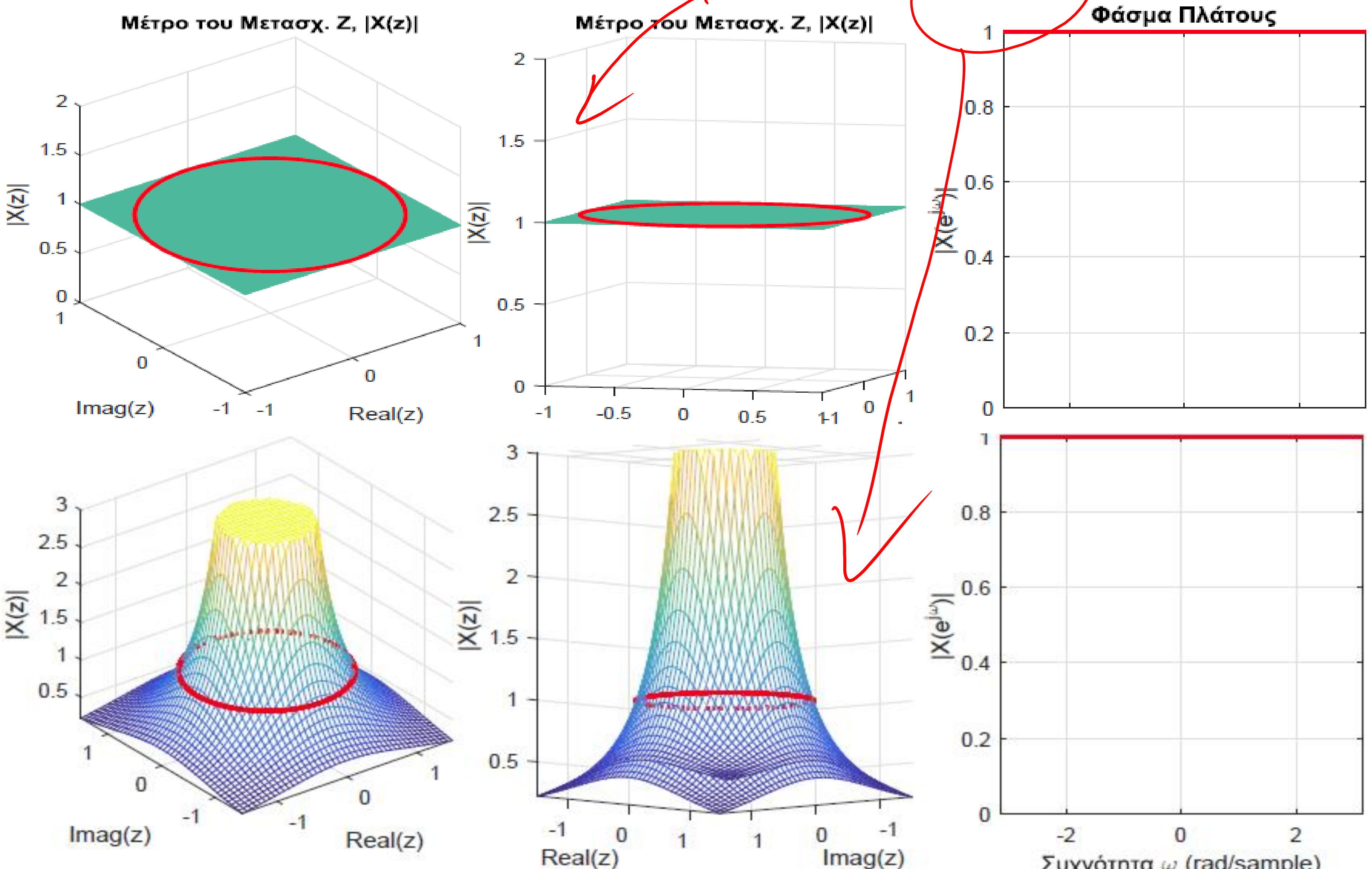


  - Δείτε τι συμβαίνει...

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n]$, $x[n] = \delta[n-2]$?



Συνεχίζεται... ☺