

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 11^Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

Τι περιέχει το ΗΥ370?



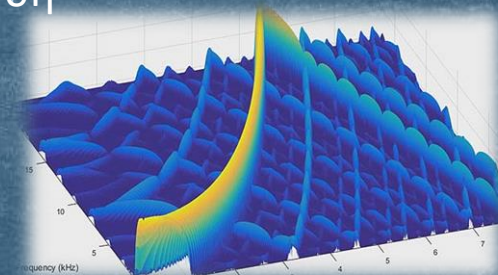
1^ο Κομμάτι

- ▶ Βασικά Σήματα
- ▶ Συστήματα και Ιδιότητες
- ▶ Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Fourier

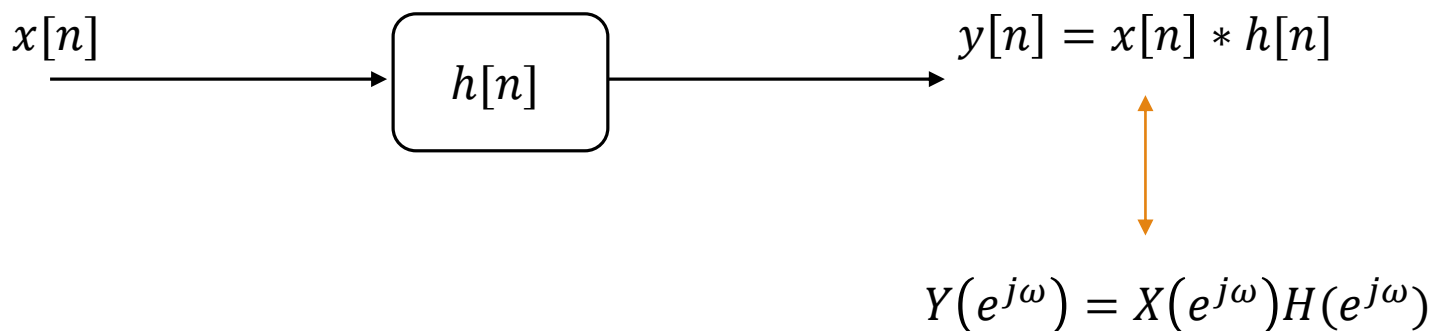


2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Z
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Z
- ▶ Δομές Συστημάτων
- ▶ Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- ▶ Φασματική Ανάλυση



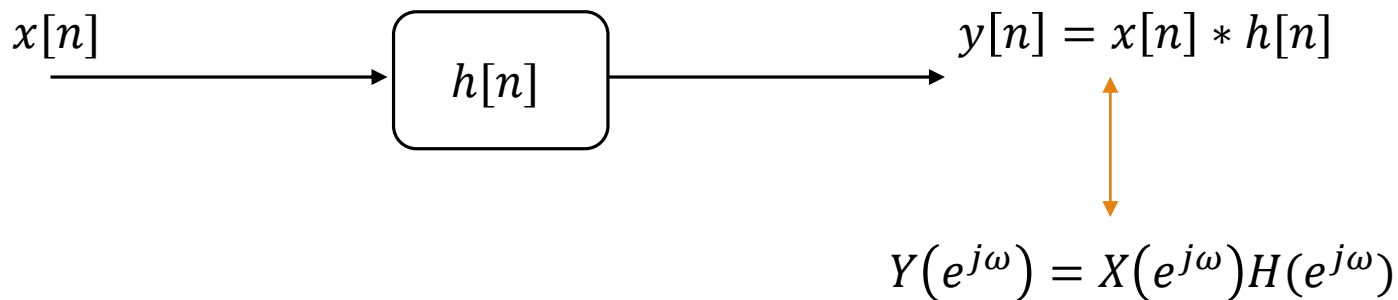
- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
 - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
 - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



- Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας



- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

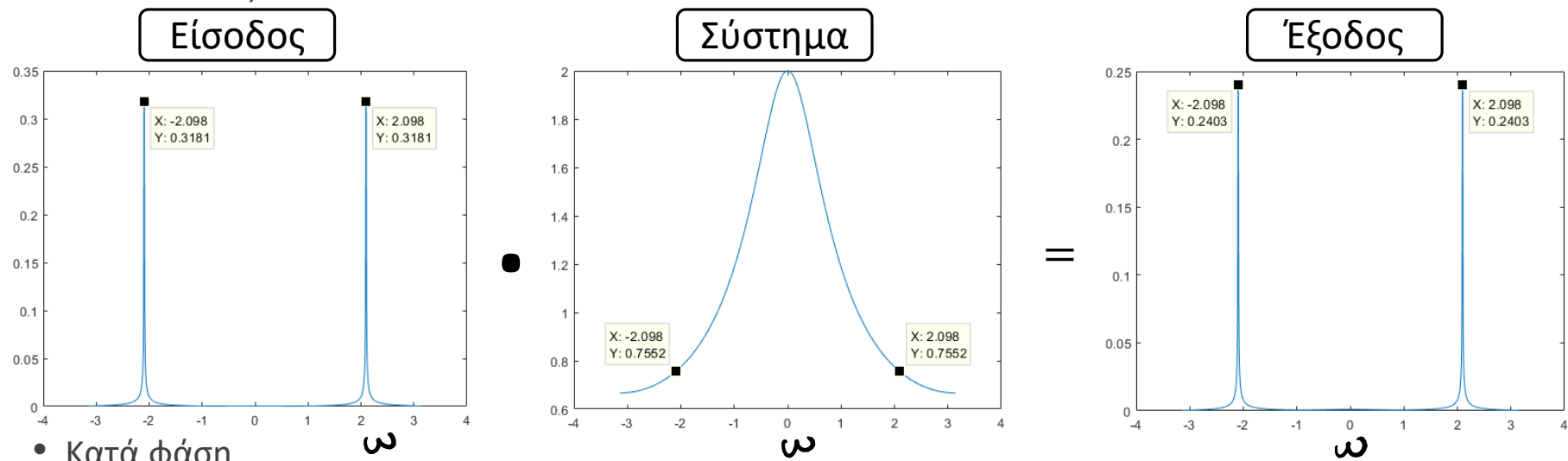
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$

$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

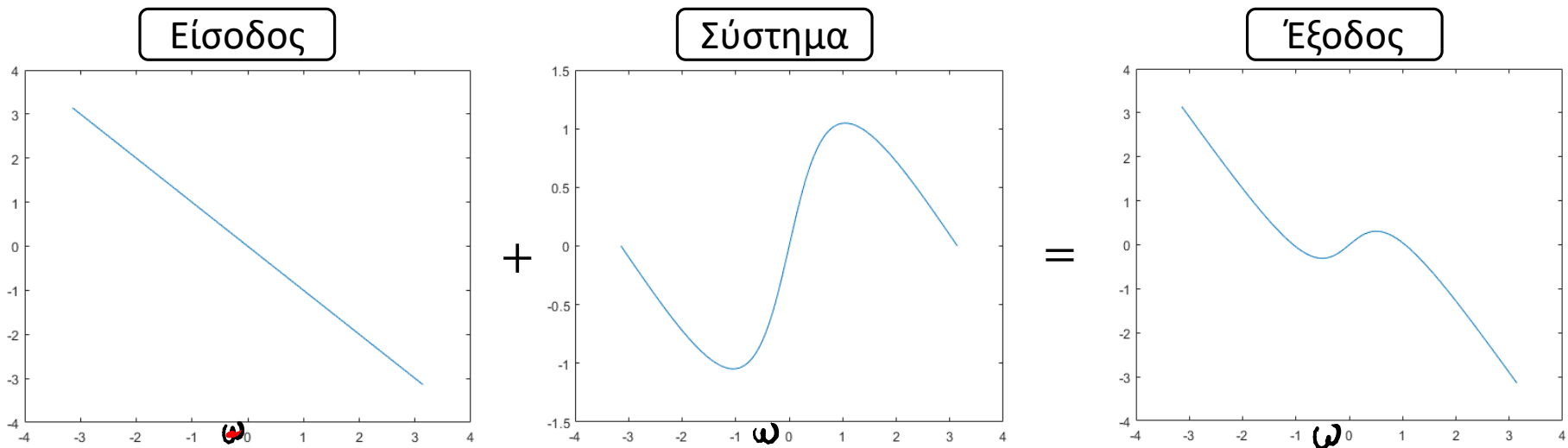
- Άρα
 1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
 2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

- Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
 - Κατά πλάτος



- Κατά φάση



- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

- Η σχέση

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

- Πώς? Λύνοντας ως προς $H(e^{j\omega})$, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Ας δούμε ένα παράδειγμα...

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

• Παράδειγμα:

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.
Βρείτε την κρουστική απόκριση.

$$\begin{array}{ccc}
 x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] & & \\
 \downarrow F & & \downarrow F \\
 X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} & & Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{F} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \\
 \\
 H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2} \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow \\
 \\
 h[n] = F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]
 \end{array}$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$x[n-1] \xrightarrow{F} e^{-j\omega n} X(e^{j\omega})$$

- Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad \leftarrow$$

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} \underline{Y(e^{j\omega})} = \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} \underline{X(e^{j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}$$

- Έτσι

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \underline{H(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad \leftarrow$$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

$$F \rightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right) = X(e^{j\omega}) \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} - \frac{1}{4} \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών

- Παράδειγμα:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4} x[n-1]$$

$$S_0: h_0[n] - \frac{1}{2} h_0[n-1] = \delta[n] \Rightarrow$$

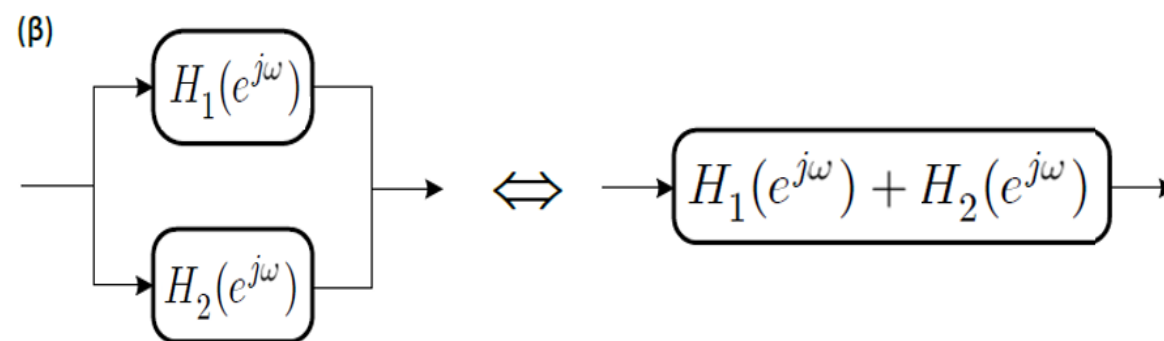
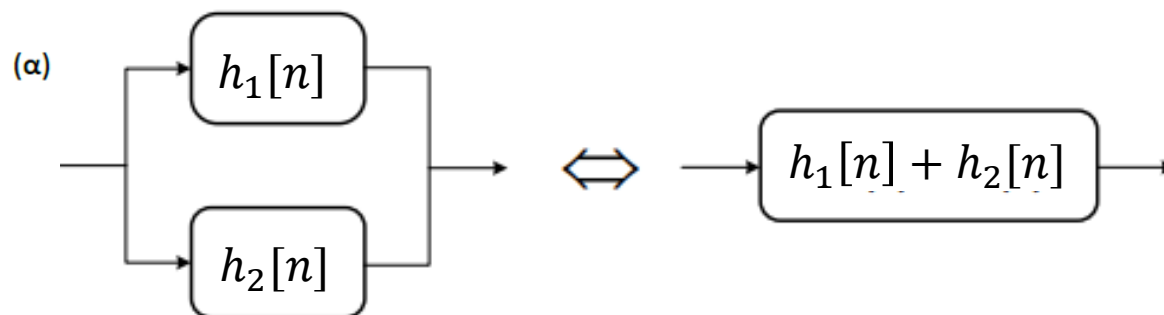
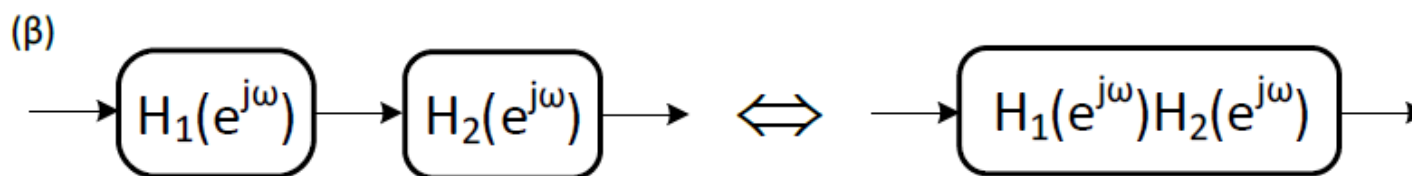
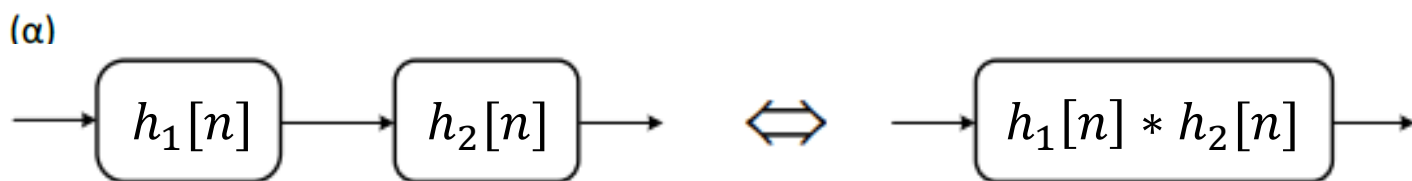
$$n=0 \Rightarrow h_0[0] = 1$$

$$\text{Χαρ. ποσ.: } \lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \left. \vphantom{\lambda} \right\} \Rightarrow c=1 \Rightarrow h_0[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$h_0[n] = c \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$h[n] = h_0[n] - \frac{1}{4} h_0[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

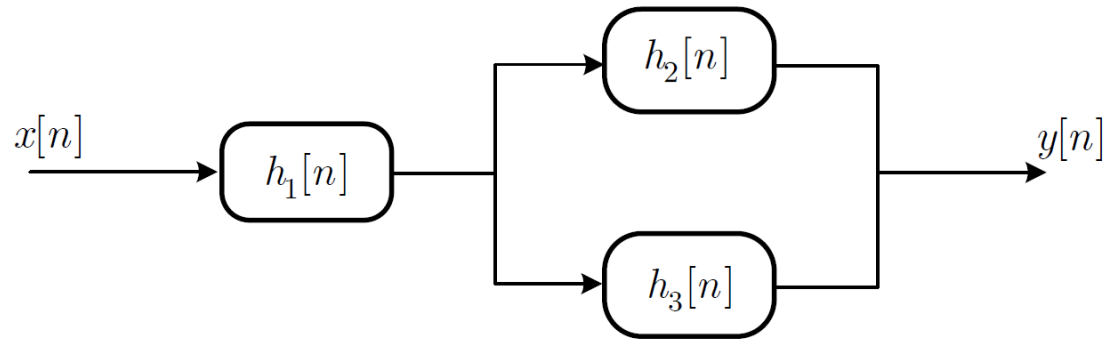
• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$h_2[n] = \delta[n - 2],$$

$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

$$x[n] * \left[h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) \right] = y[n]$$

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])$$

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot [H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})]$$

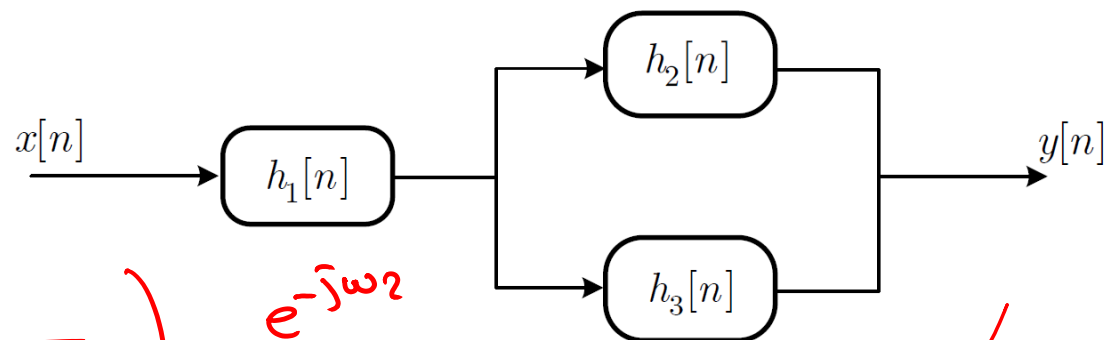
$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 2}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

- Παράδειγμα:



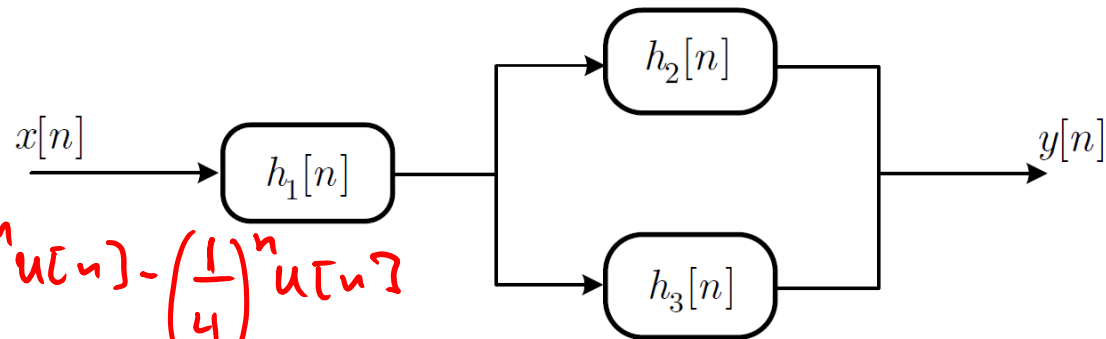
$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left(e^{-j\omega 2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right) = \frac{e^{-j\omega 2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \\
 &= \frac{e^{-j\omega 2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = \dots
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega} = 2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

- ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων

- Παράδειγμα:



$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j2\omega} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right) + 1}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)} = \frac{1 + e^{-j2\omega} - \frac{1}{4} e^{-j3\omega}}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega}} \Rightarrow$$

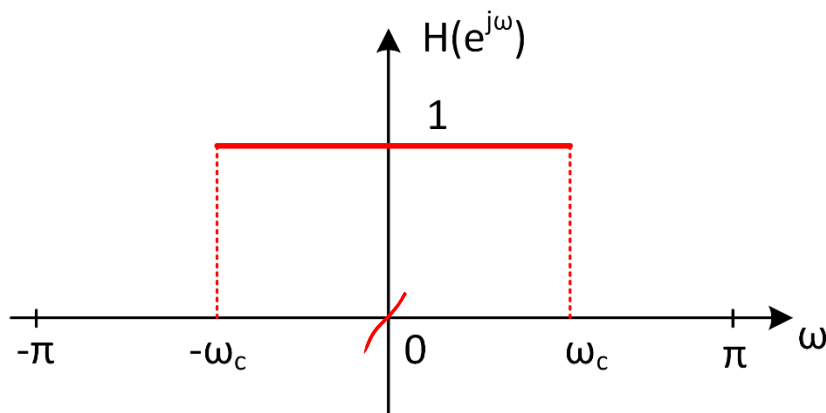
$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8} e^{-j2\omega} Y(e^{j\omega}) =$$

$$X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega} X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j3\omega} X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

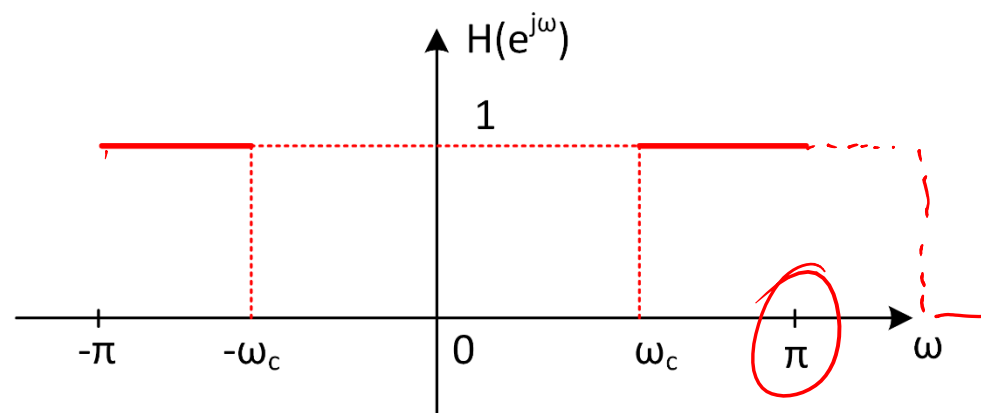
$$\overset{F^{-1}}{\Rightarrow} y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4} x[n-3]$$

ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

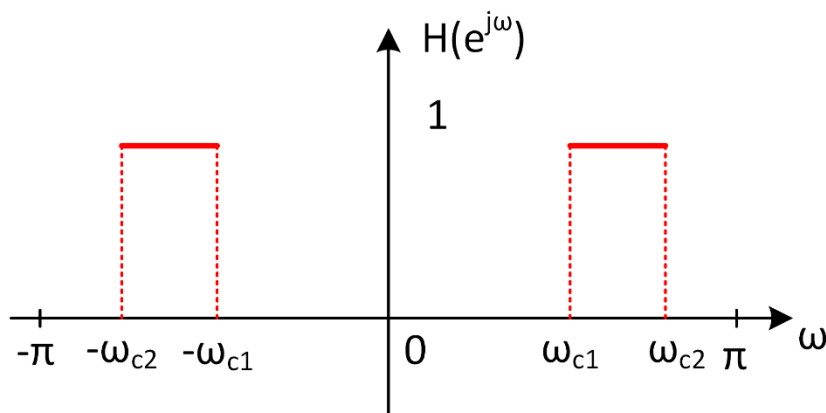
- Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας



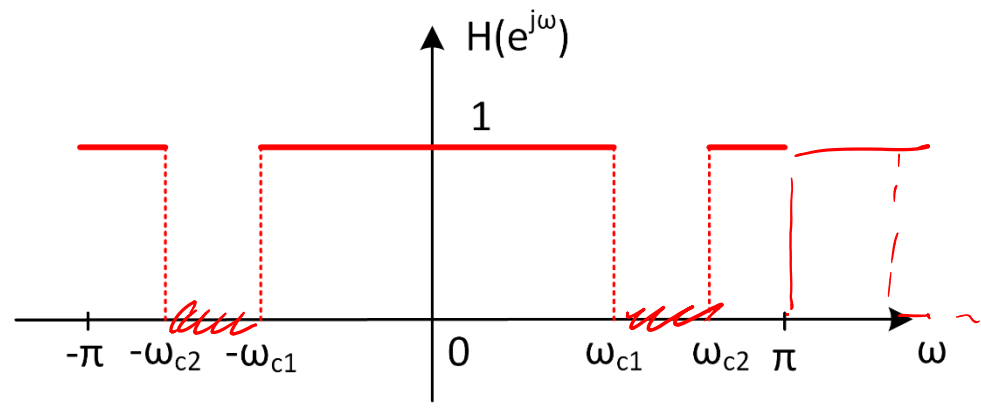
(α) Χαμηλοπερατό



(β) Υψηλοπερατό



(γ) Ζωνοπερατό



(δ) Ζωνοφρακτικό

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

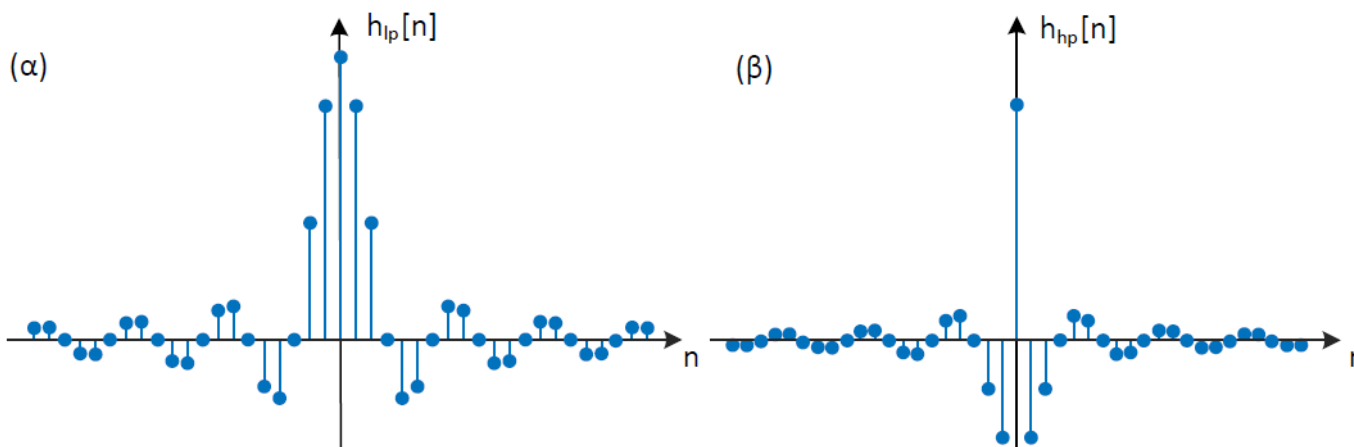
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \leftrightarrow H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- Το υψιπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

- Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

```

% Ideal lowpass filter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tones
f1 = 1800; %Hz
f2 = 2800; %Hz

% Sampling frequency and time axis
fs = 8000;
t = 0:1/fs:0.1; % .1 seconds

% Discrete time frequencies
w1 = 2*pi*f1/fs;
w2 = 2*pi*f2/fs;

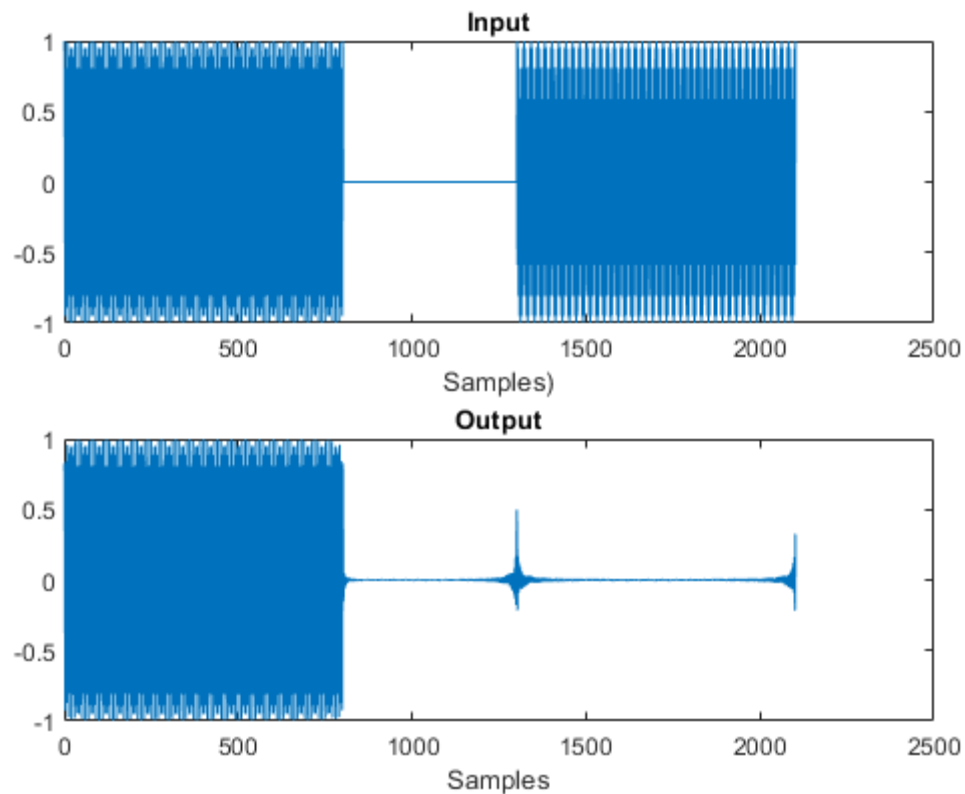
% Sound
x = [cos(2*pi*f1*t) zeros(1,500) cos(2*pi*f2*t)];

% Lowpass filter
fc = 2600; % Hz
wc = 2*pi*fc/fs;
n = -length(x)/2:length(x)/2;
hlp = wc/pi * sinc(wc*n/pi);

% Filter!
y = conv(x,hlp,'same');

% Show!
figure; subplot(211);
plot(x); xlabel('Samples'); title('Input');
subplot(212);
plot(y); xlabel('Samples'); title('Output');

```



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

