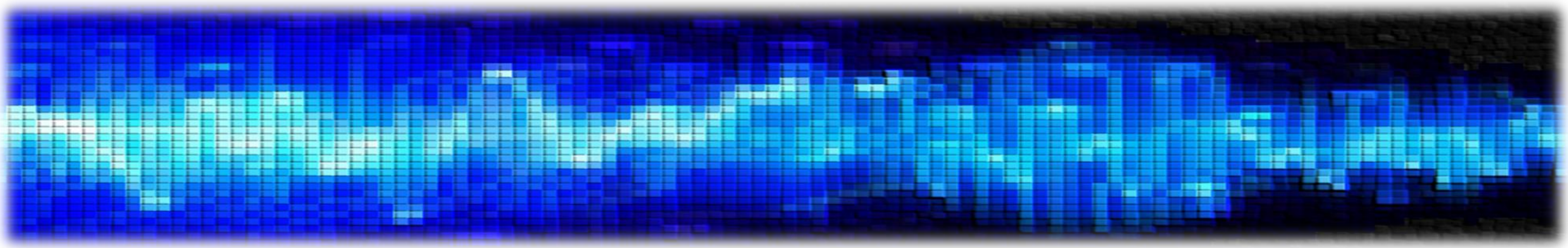
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

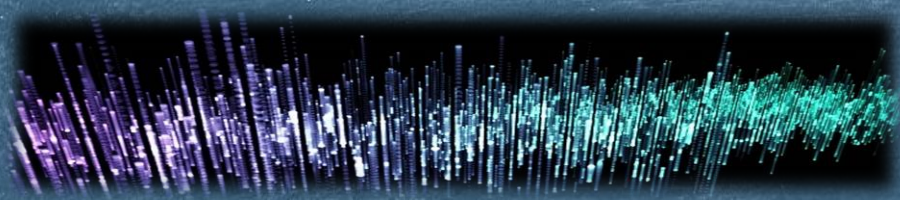


- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ιδιότητες

Τι περιέχει το HY370?

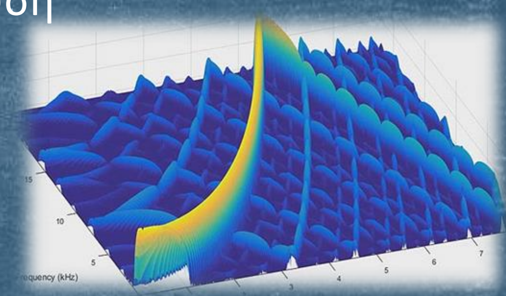
1ο Κομμάτι

- Βασικά Σήματα
- Συστήματα και Ιδιότητες
- Εξισώσεις Διαφορών ως συστήματα
- Μετασχηματισμός Fourier
- Συστήματα στο χώρο του Fourier



2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Z
- Συστήματα στο χώρο του Z
- Δομές Συστημάτων
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων
- Φασματική Ανάλυση



Review:

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n]\cdot e^{-j\omega n} = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

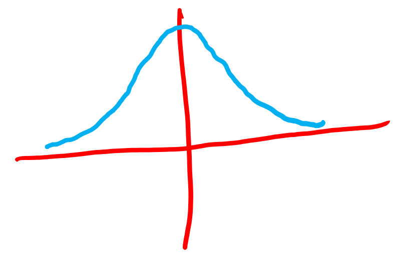
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2 + X_I^2}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

$$\sum_n |x[n]| < \infty \quad \text{ή} \quad \underbrace{\sum_n |x[n]|^2 < \infty}$$

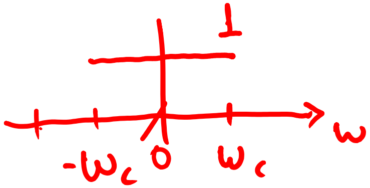
Direct:



- $x[n] = a^n u[n] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$, $|a| < 1$
- $x[n] = \delta[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_n \delta[n]\, e^{-j\omega n} = 1 \quad \forall \omega$

Inverse:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$



$$= \frac{1}{2\pi j n}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \Leftarrow$$

- $x[n] = 1 \quad \forall n \qquad X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega = 1$$

- $x[n] = u[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} \leftarrow$

▷ $x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$

$$x[n-n_0] \Rightarrow F\{x[n-n_0]\} = \sum_n x[n-n_0]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n_1} x[n_1]\, e^{-j\omega n_1} \cdot e^{-j\omega n_0} =$$

$n - n_0 = n_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = n_1 + n_0$

$$= e^{-j\omega n_0} \underbrace{\sum_{n_1} x[n_1]\, e^{-j\omega n_1}}_{X(e^{j\omega})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{x[n-n_0]\} = e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$$

$$\measuredangle Y(e^{j\omega}) = \measuredangle X(e^{j\omega}) - \omega n_0$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \|a\|>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\|n\|},\ \|a\|<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \|r\|<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \|\omega\|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<\|\omega\|\le\pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0\le n\le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$k-$οστή παραγώγιση στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\dfrac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-e^{j\omega}}X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\}=\Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\}=-\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert, \\ \phi_x(e^{j\omega})=-\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n]=x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega})\in\Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n]=-x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega})\in\Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n]=\mathrm{Ev}\{x[n]\}$, πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n]=\mathrm{Od}\{x[n]\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα

$x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$

$x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$

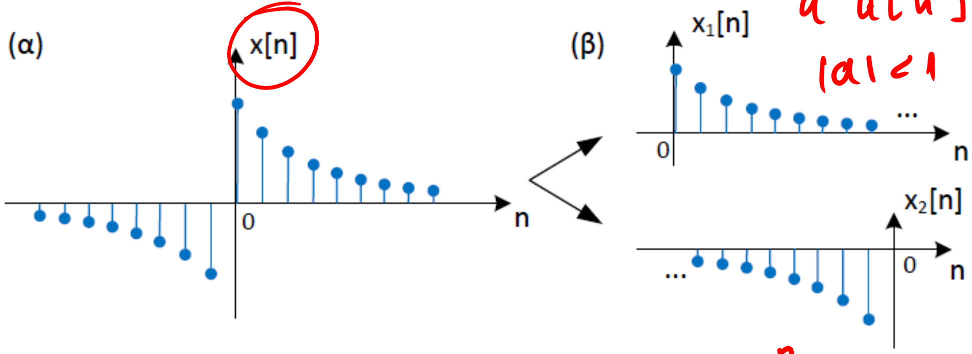
$w[n] = a x_1[n] + \beta x_2[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow W(e^{j\omega}) = \sum_n w[n] e^{-j\omega n} =$

$= \sum_n a x_1[n] e^{-j\omega n} + \sum_n \beta x_2[n] \cdot e^{-j\omega n} =$

$= a \underbrace{\sum_n x_1[n] e^{-j\omega n}}_{X_1(e^{j\omega})} + \beta \underbrace{\sum_n x_2[n] \cdot e^{-j\omega n}}_{X_2(e^{j\omega})} = a X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα
  - ○ Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



$a^n u[n]$

$|a|<1$

$-\beta^n u[-n-1]$

$|\beta|>1$

$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$

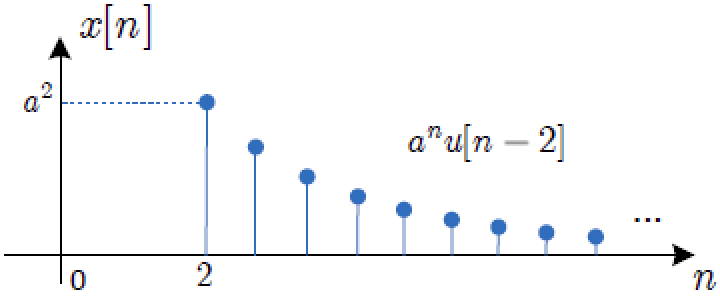
$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}, \quad |a|<1, \ |\beta|>1$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση
  - Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



$$\left\{\begin{array}{l} a^n u[n] \rightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \\ a^{n-2} u[n-2] \rightarrow \dfrac{e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}} \end{array}\right.$$

$$x[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n-n_0] \rightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

- $y[n] = a^n u[n-2]$

$$y_1[n] = a^{n-2} u[n-2] \rightarrow Y_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^2 y_1[n] = a^n u[n-2] = y[n] \rightarrow Y(e^{j\omega}) = a^2 \frac{e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

$x[n] \to X(e^{j\omega}) = \sum_n x[n] e^{-j\omega n}$ $\quad X(\omega)$

$\boxed{e^{j\omega_0 n} x[n]} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = F\{e^{j\omega_0 n} x[n]\} = \sum_n x[n] \cdot e^{-j(\omega-\omega_0)n}$

$= X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

$= X(\omega-\omega_0)$

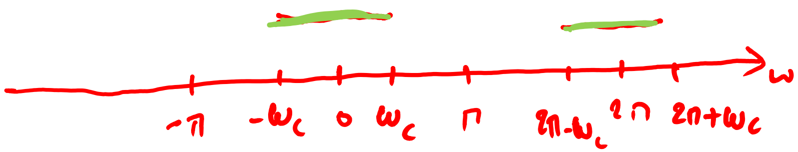
$\cos(\pi n) = \{-1, 1, -1, -1\}$

$\cos(0n) = \{1, 1, 1, \ldots\}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα
    - Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ αν

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

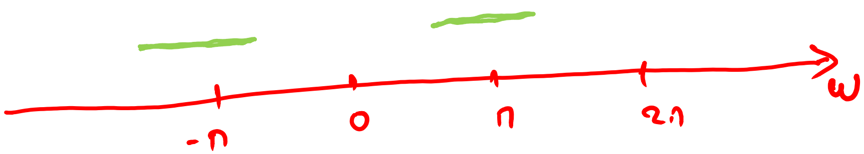
$X(e^{j\omega})$:



$X_{lp}(e^{j\omega}) \rightarrow x_{lp}[n] = \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

$X_{hp}(e^{j\omega}) \rightarrow x_{hp}[n] = (-1)^n \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

$X(e^{j(\omega-\pi)})$:



$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)}) \Rightarrow y[n] = e^{j\pi n} \cdot \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = (-1)^n \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

- $x[n] \rightarrow X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[kn] \rightarrow X(e^{j\omega/k})$

$$F\{x[kn]\} = \sum_{n} x[kn] e^{-j\omega n} = \sum_{n_1} x[n_1] e^{-j\omega/k \, n_1} = X(e^{j\omega/k})$$

$n_1 = kn \Rightarrow n = n_1/k$

- $x[\frac{n}{2}]$

$$\begin{cases} x[n] = a^n u[n], & |a|<1 \\ X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} \end{cases}$$

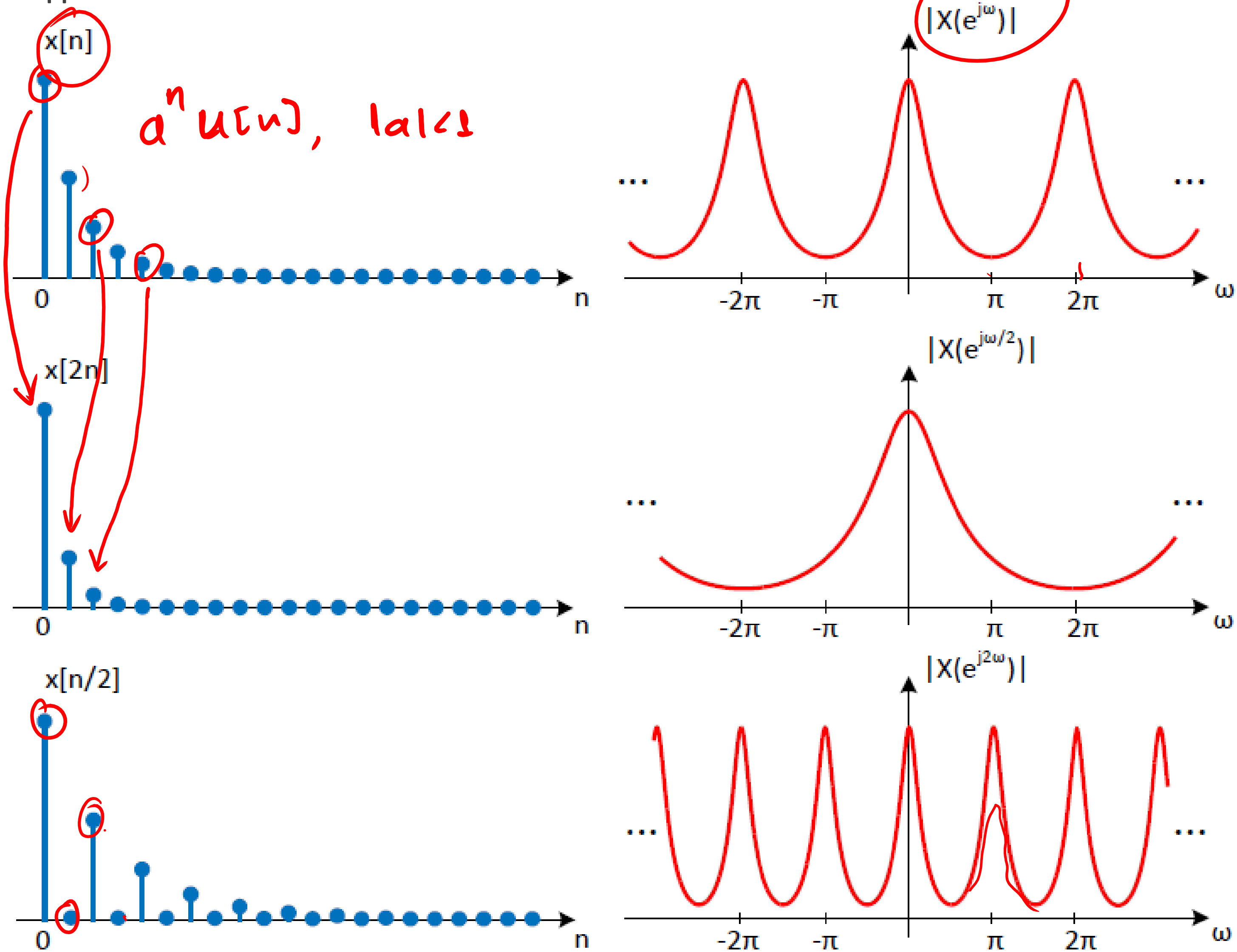
$$x[\tfrac{n}{2}] \rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a e^{-j2\omega}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a^n u[n], \ |a|<1$

$k=2$

$k=1/2$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$x[n] \to X(e^{j\omega})$

$y[n] \to Y(e^{j\omega})$

$x[n] * y[n] = \sum_n x[n]\, y[k-n] \leftarrow$

$F\{x[n] * y[n]\} = \sum_k \sum_n x[n]\, y[k-n] \cdot e^{-j\omega k} =$

$= \sum_n x[n] \underbrace{\sum_k y[k-n] e^{-j\omega k}}_{e^{-j\omega n} Y(e^{j\omega})} = Y(e^{j\omega}) \underbrace{\sum_n x[n] e^{-j\omega n}}_{X(e^{j\omega})} \Rightarrow$

$\Rightarrow F\{x[n] * y[n]\} = X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$x[n] = a^n u[n]$

$y[n] = b^n u[n]$

$|a|<1, \ |b|<1$

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

$$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-be^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{A}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1-be^{-j\omega}} = \frac{a}{a-b}\,\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} - \frac{b}{a-b}\,\frac{1}{1-be^{-j\omega}}$$

$$A = \left.\frac{1}{1-be^{-j\omega}}\right|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a}{a-b}$$

$$B = \left.\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{b}} = \frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{b-a}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$\frac{a}{a-b}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} - \frac{b}{a-b}\frac{1}{1-be^{-j\omega}} \xrightarrow{F^{-1}}$$

$$\rightarrow x[n]*y[n] = \frac{a}{a-b}(a)^n u[n] - \frac{b}{a-b} b^n u[n]$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: θεώρημα Parseval

$$\sum_n |x[n]|^2 < \infty$$

$$E_x = \underbrace{\sum_n |x[n]|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\sum_n |x[n]|^2 = \sum_n x[n]\, x^*[n] = \sum_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega \cdot x^*[n] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \underbrace{\sum_n x^*[n]\, e^{j\omega n}}_{\left(\underbrace{\sum_n x[n]\, e^{-j\omega n}}_{X(e^{j\omega})}\right)^*} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

$x[n] = \delta[n] \Rightarrow E_x = 1$

$X(e^{j\omega}) = 1 \quad \forall \omega$

Άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 1 = E_x$$

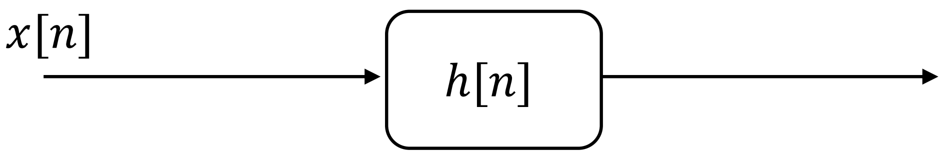
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

  - Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του DTFT είναι:

$$
\begin{tikzcd}
x[n] \arrow[r, "*"] \arrow[d, leftrightarrow, "F"'] & y[n] \arrow[r, "="] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] & c[n] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] \\
X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\bullet"] & Y(e^{j\omega}) \arrow[r, "="] & C(e^{j\omega})
\end{tikzcd}
$$

  - Αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

  - Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\updownarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

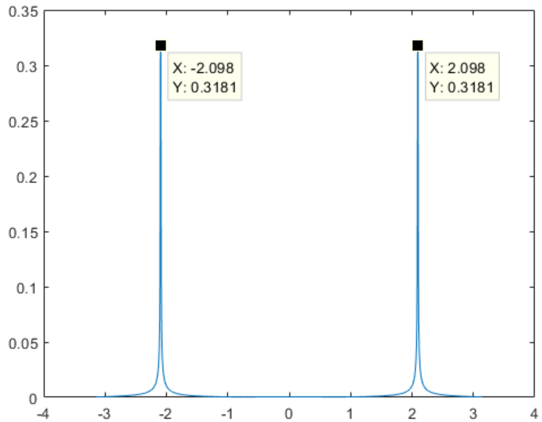
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

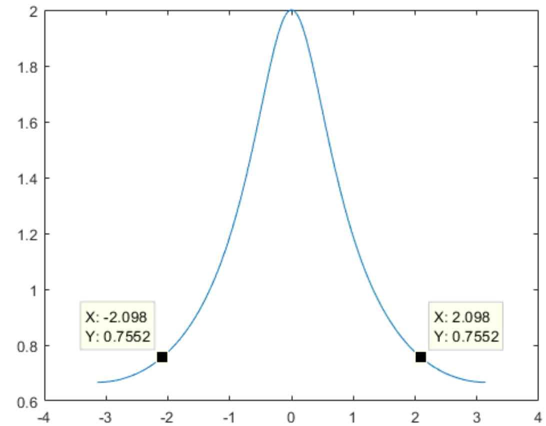
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

Είσοδος



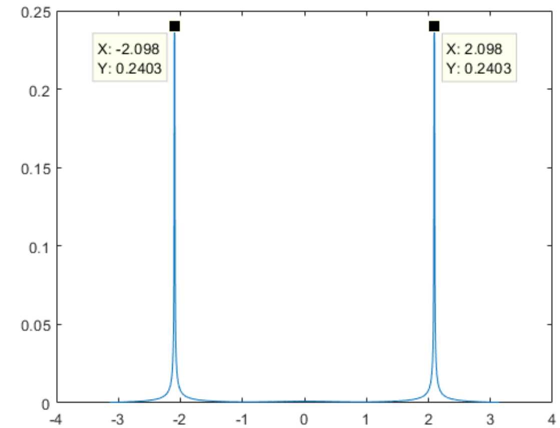
•

Σύστημα



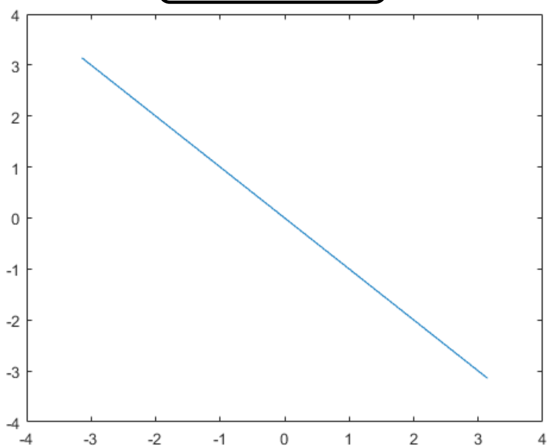
=

Έξοδος



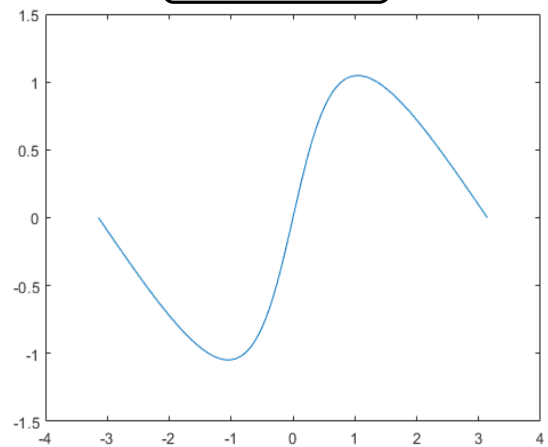
- Κατά φάση

Είσοδος



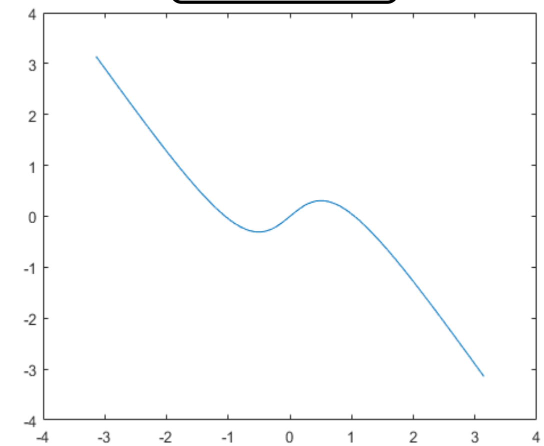
+

Σύστημα



=

Έξοδος



Συνεχίζεται... ☺