Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 9^{Η}

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

  - Ο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ' αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

  - Αν το σήμα που αναλύεται είναι **<u>πραγματικό</u>**, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

  - Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x\left(e^{-j\omega}\right)$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

  - Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

  - Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα [0, π] !!!

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)

- Ζεύγη Μετασχ. Fourier

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
$\dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\dfrac{\sin[\omega_c(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Ως τώρα, τα σήματα που εξετάσαμε ήταν σήματα ενέργειας
  - Ο μετασχ. Fourier συγκλίνει για αυτά τα σήματα
  - Όμως ενδιαφέρον έχουν και τα σήματα ισχύος
  - Γι’αυτά, ο μετασχ. Fourier δε συγκλίνει
  - Μπορούμε όμως να ορίσουμε με κάποιο τρόπο το μετασχ. Fourier τους?
    - …ίσως με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων?

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο IDTFT του σήματος $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega), \quad \omega \in (-\pi, \pi]$.

$$(1)\quad \int f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

Θα είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cancel{2\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega \overset{(1)}{=} e^{j\omega n}\Big|_{\omega=0} = 1, \quad \forall n$$

Άρα

$$x[n] = 1, \forall n \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$$

Προσέξτε:

Κατανομή Δέλτα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx = 1$$

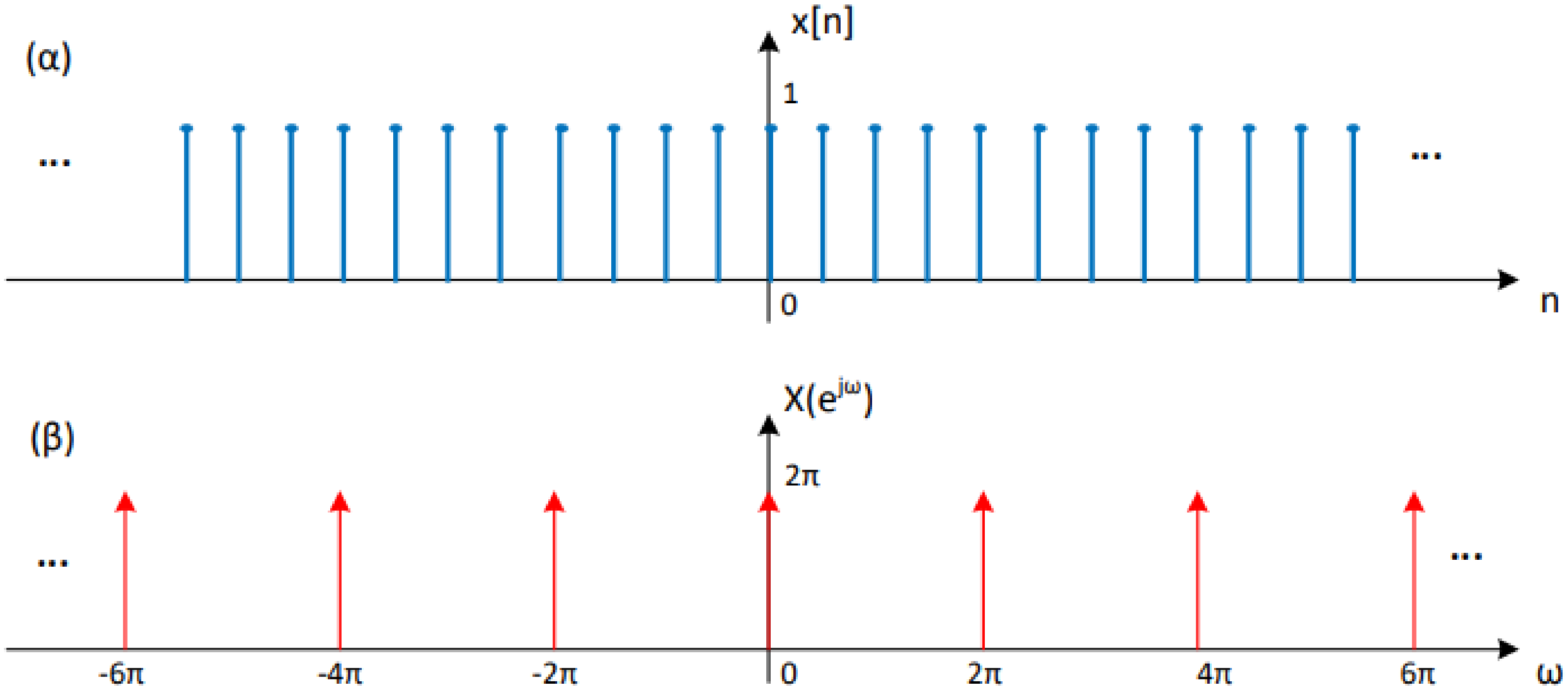
$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

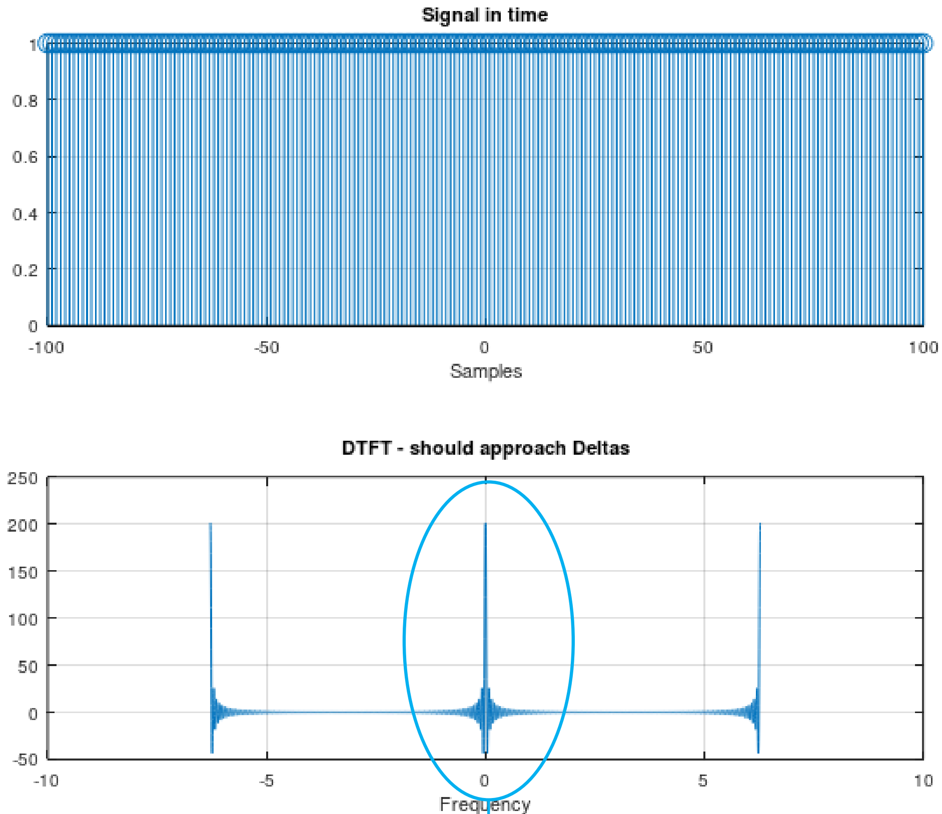
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

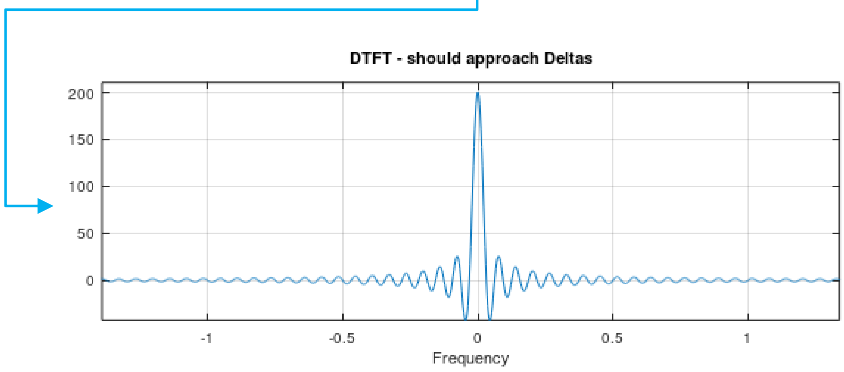
Γενικά: $x[n] = A,\ \forall n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi A\,\delta(\omega),\ \omega \in (-\pi, \pi]$

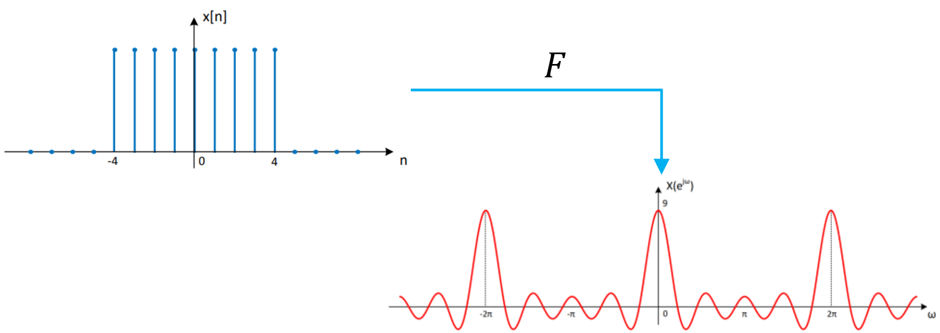


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = -100:100;
x = ones(size(n));

% DTFT
w = linspace(-2*pi, 2*pi, 5000);
X = zeros(size(w));

for i=1:length(n)
  X = X + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% Απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Signal in time');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X);
title('DTFT - should approach Deltas'); grid;
xlabel('Frequency');
```







- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \ \ \forall\, n, \ \ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

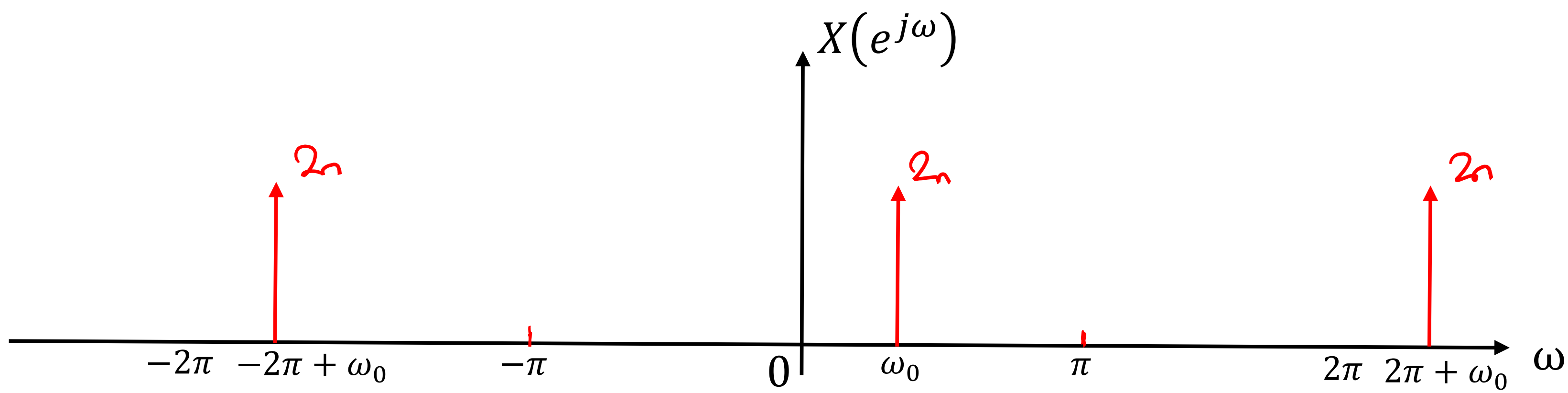
Πριν. δείξαμε ότι

$$\mathcal{F}\{\underbrace{1}_{x[n]\ \text{πριν}}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overbrace{1}^{x[n]\ \text{πριν}} \cdot e^{-j\omega n} = 2\pi\,\delta(\omega)$$

Ζητάμε

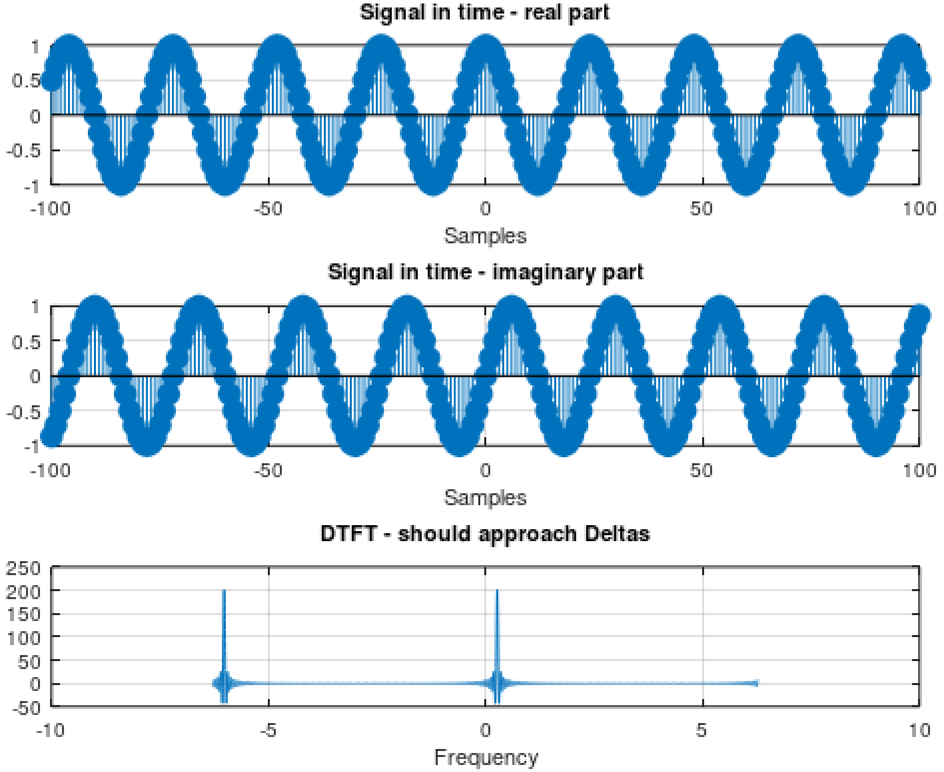
$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0),$$

$$\omega \in (-\pi, \pi]$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = -100:100;
w0 = pi/12;
x = exp(j*w0*n);

% DTFT
w = linspace(-2*pi, 2*pi, 5000);
X = zeros(size(w));

for i=1:length(n)
  X = X + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% Απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,real(x),'filled');
title('Signal in time - real part');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n,imag(x),'filled');
title('Signal in time - imaginary part');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); plot(w, X);
title('DTFT - should approach Deltas'); grid;
xlabel('Frequency');
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$, $\forall\, n,\ \omega_0, \phi \in (-\pi, \pi]$.

Είναι

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\varphi} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n} \cdot e^{-j\varphi}$$

Άρα

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} = F\left\{\frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}\right\} + F\left\{\frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega_0 n}\right\}$$

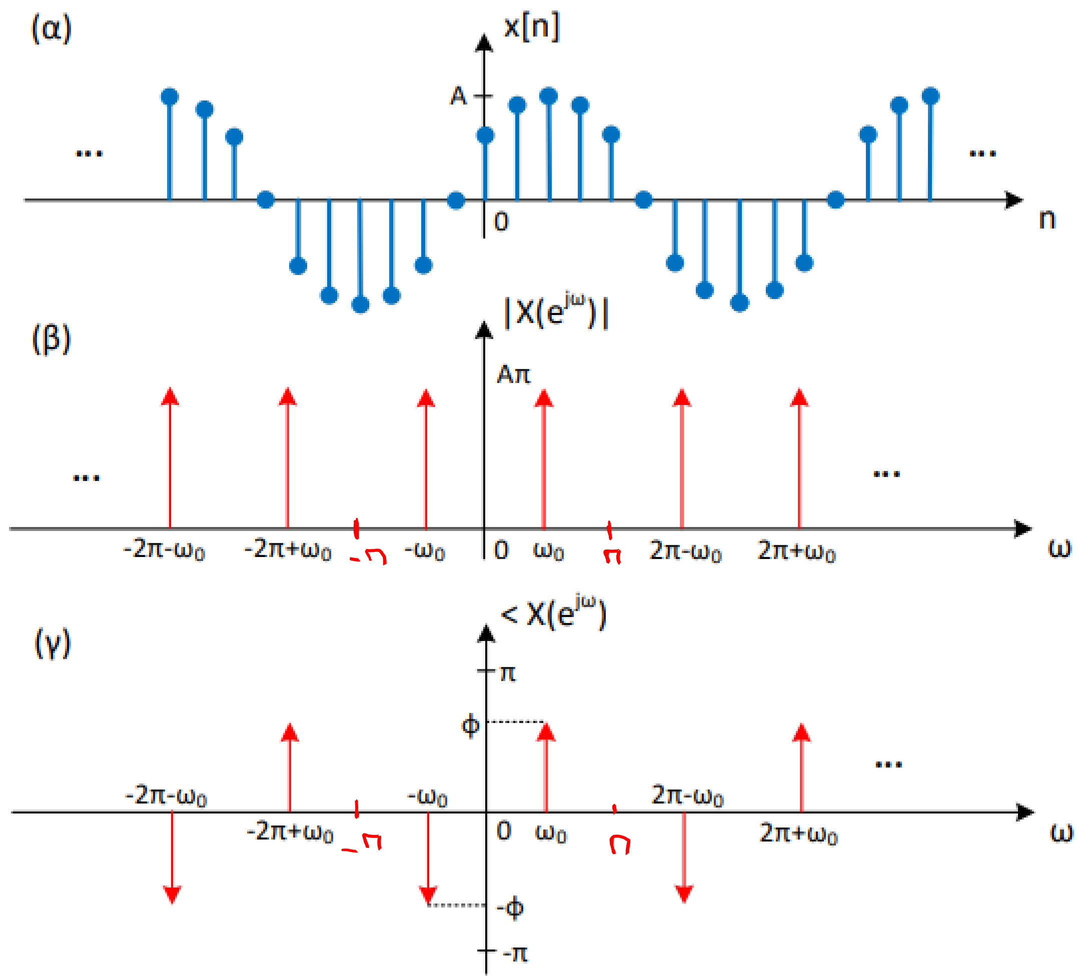
$$= \frac{A}{\cancel{2}} e^{j\varphi} \cdot \cancel{2}\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \frac{A}{\cancel{2}} e^{-j\varphi} \cdot \cancel{2}\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

$$= A\pi\, e^{+j\varphi}\delta(\omega-\omega_0) + A\pi \cdot e^{-j\varphi}\delta(\omega+\omega_0),\ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$$

Οπότε

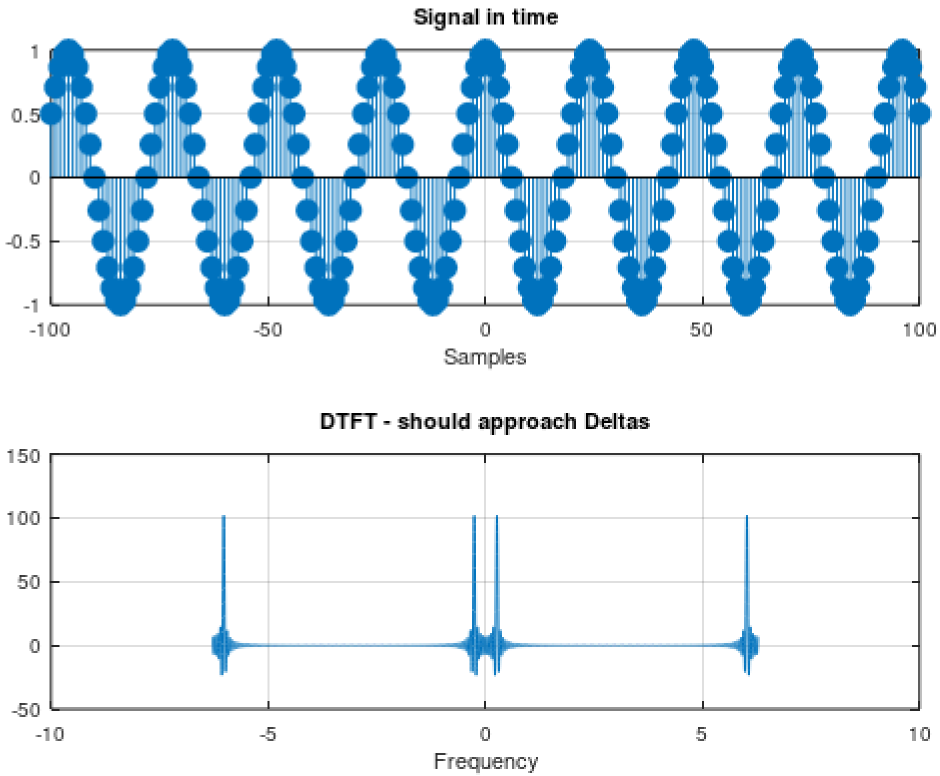
$$A\cos(\omega_0 n + \varphi) \xleftrightarrow{F} A\pi\, e^{j\varphi}\delta(\omega-\omega_0) + A\pi\, e^{-j\varphi}\delta(\omega+\omega_0),$$
$$\omega \in (-\pi, \pi]$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:



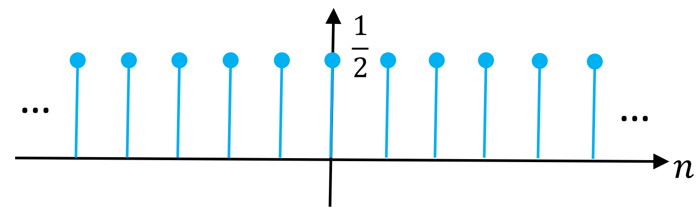
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = -100:100;
w0 = pi/12;
x = cos(w0*n);

% DTFT
w = linspace(-2*pi, 2*pi, 5000);
X = zeros(size(w));

for i=1:length(n)
  X = X + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% Απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x,'filled');
title('Signal in time');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X);
title('DTFT - should approach Deltas'); grid;
xlabel('Frequency');
```

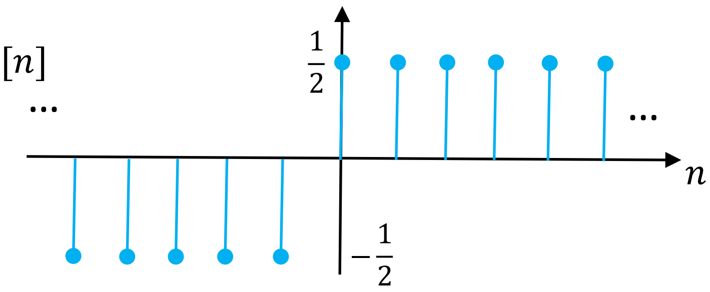


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.

$x_1[n] = \frac{1}{2}$



$x_2[n] = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n]$



Παρατηρώ (!) ότι:

$$x[n] = u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n]\right\} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\delta(\omega) + F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n]\right\} \quad (1)$$

Ψάχνουμε το $F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n]\right\}$. Παρατηρώ (!) ότι:

$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n] - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n-1] = \delta[n]$ και παίρνοντας Μετ. Fourier έχω

$$\underbrace{F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n]\right\}}_{S(e^{j\omega})} - F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n-1]\right\} = F\{\delta[n]\}$$

$$S(e^{j\omega}) - F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n-1]\right\} = 1 \quad (2)$$

?

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Ξέρατε ότι $x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ ⟵ Ⓐ

$$x[n-n_0] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_d(e^{j\omega}) = ?$$

Είναι

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0] e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega(k+n_0)}$$

$$k = n-n_0 \Rightarrow n = k+n_0$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k} e^{-j\omega n_0} = e^{-j\omega n_0} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k}}_{X(e^{j\omega})} \overset{A}{=} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Άρα η ② γράφεται ως:

$$S(e^{j\omega}) - S(e^{j\omega}) e^{-j\omega} = 1 \Leftrightarrow S(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \quad ③$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Οπότε η 1 $\xRightarrow{3}$ $X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{1-e^{-j\omega}}, \ \omega \in (-\pi, \pi]$

Άρα

$$u[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}, \ \omega \in (-\pi, \pi].$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Οι σχέσεις ισχύουν για $-\infty < \omega < +\infty$

Για να πάρετε τις σχέσεις που αποδείξαμε ($-\pi < \omega < \pi$), θέστε $k = 0$ και βγάλτε τα αθροίσματα (όπου υπάρχουν)

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \lvert r\rvert<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c \\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\le\pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0\le n\le M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ