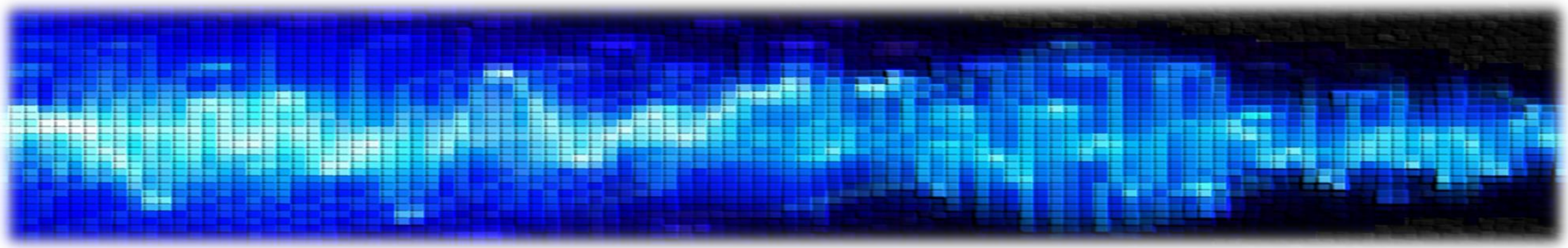
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η



- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

  - Ο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ’ αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (επανάληψη…)**

  - Αν το σήμα που αναλύεται είναι πραγματικό, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

  - Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x\left(e^{-j\omega}\right)$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

  - Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

  - Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα [0, π] !!!

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη**

  - Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

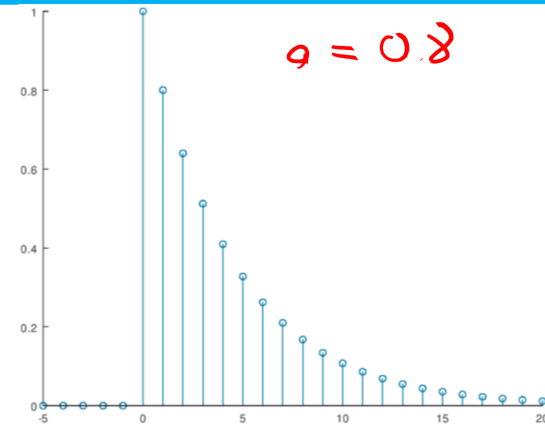
  - Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος

  - Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η *μέση τετραγωνική σύγκλιση*

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n],\ \ |a| < 1$.



$a = 0.8$

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \frac{1}{1-A}, \quad |A| < 1.$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$, αφού $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$, από υπόθεση

Άρα

$$x[n] = a^n u[n],\ |a|<1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}.$$

- Φάσμα πλάτους: $|X(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right| = \frac{1}{|1-ae^{-j\omega}|} =$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$= \frac{1}{|1-ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{|1-a(\cos\omega - j\sin\omega)|} = \frac{1}{|1-a\cos\omega + ja\sin\omega|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + a^2}}$$

- Φάσμα φάσης: $\varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$ (1)

Είναι $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \dfrac{1-ae^{j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} = \dfrac{1-ae^{j\omega}}{|1-ae^{-j\omega}|^2} =$

$$= \frac{1-ae^{j\omega}}{1-2a\cos\omega + a^2} = \underbrace{\frac{1-a\cos\omega}{1-2a\cos\omega + a^2}}_{X_R(e^{j\omega})} + j\underbrace{\frac{-a\sin\omega}{1-2a\cos\omega + a^2}}_{X_I(e^{j\omega})} \quad (2)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Άρα η (1) $\xrightarrow{(2)}$ $\varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{-a\sin\omega}{1-2a\cancel{\cos\omega}+a^2}}{\dfrac{1-a\cos\omega}{1-2a\cancel{\cos\omega}+a^2}} = \tan^{-1}\dfrac{-a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$

και $\varphi_x(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\dfrac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$.

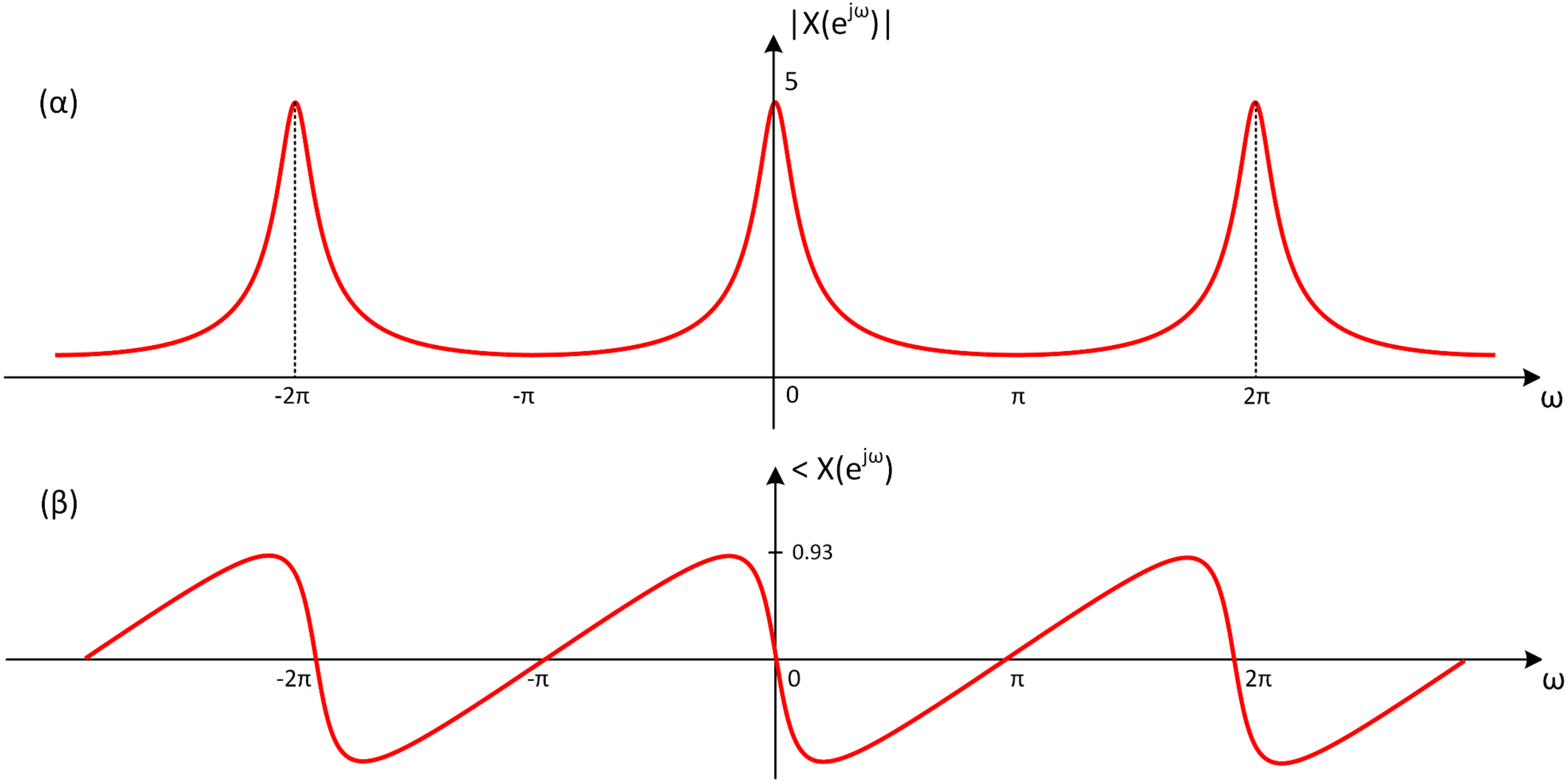
Οπότε συνολικά,

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}$$

$$\varphi_x(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a = 0.8 = \frac{4}{5}$

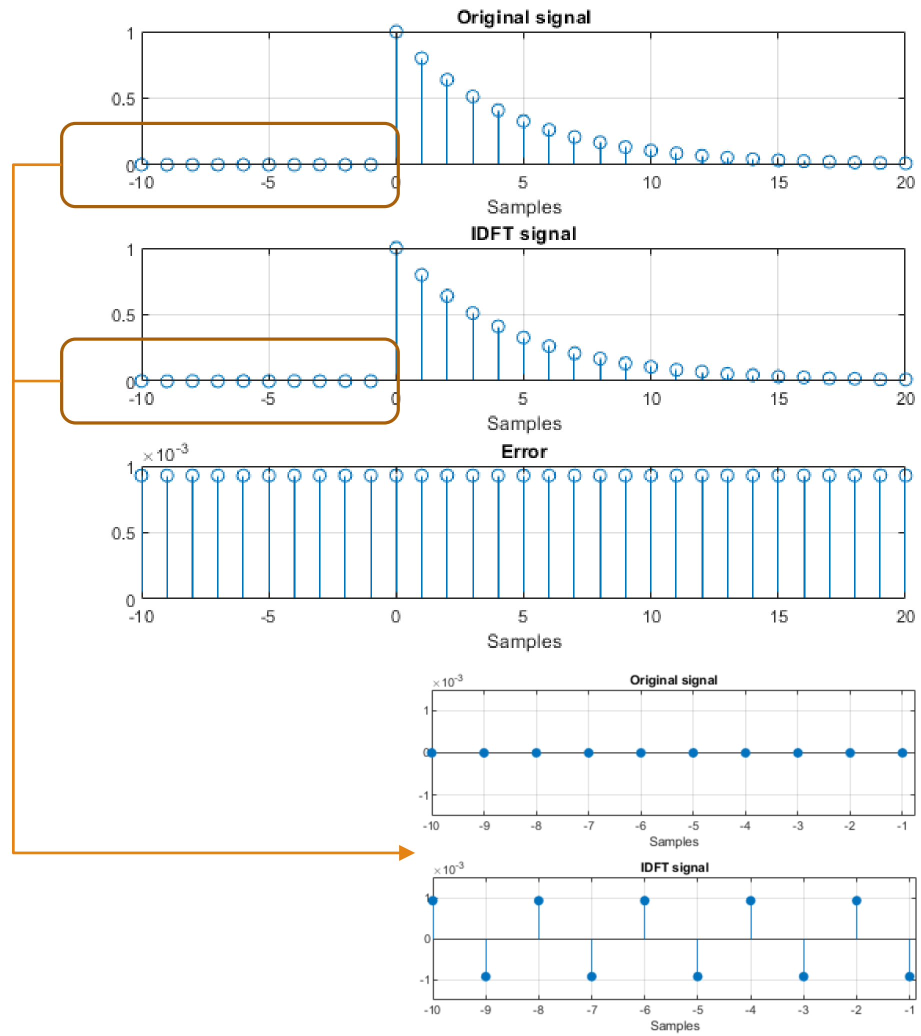


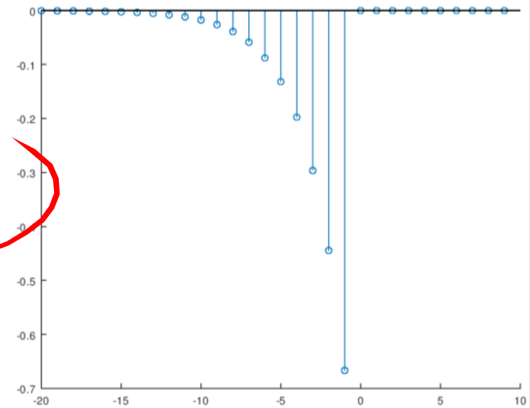
• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8;
n = [-10:-1 0 1:20];
x = [zeros(1,10) alpha.^n(11:31)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```





- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $|a| > 1$.

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] e^{-j\omega n} =$$

$$u[-n-1] = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ 0, & n > -1 \end{cases}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{k=N_1}^{+\infty} A^k = \frac{A^{N_1}}{1-A}, \quad |A| < 1$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a e^{-j\omega})^n = -\sum_{k=1}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^{-k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \underline{(a^{-1} e^{j\omega})^k} =$$

$$= -\frac{a^{-1} e^{j\omega}}{1 - a^{-1} e^{j\omega}}, \text{ αν } |a^{-1} e^{j\omega}| < 1 \Leftrightarrow |a^{-1}| \underbrace{|e^{j\omega}|}_{1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} < 1$$

$\Leftrightarrow |a| > 1$ ✓. Συνεχίζοντας, $X(e^{j\omega}) = -\dfrac{a^{-1} e^{j\omega}\, a e^{-j\omega}}{a e^{-j\omega} - 1} =$

$= 1 / (1 - a e^{-j\omega}), \; |a| > 1.$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Άρα τελικά

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a|>1$$

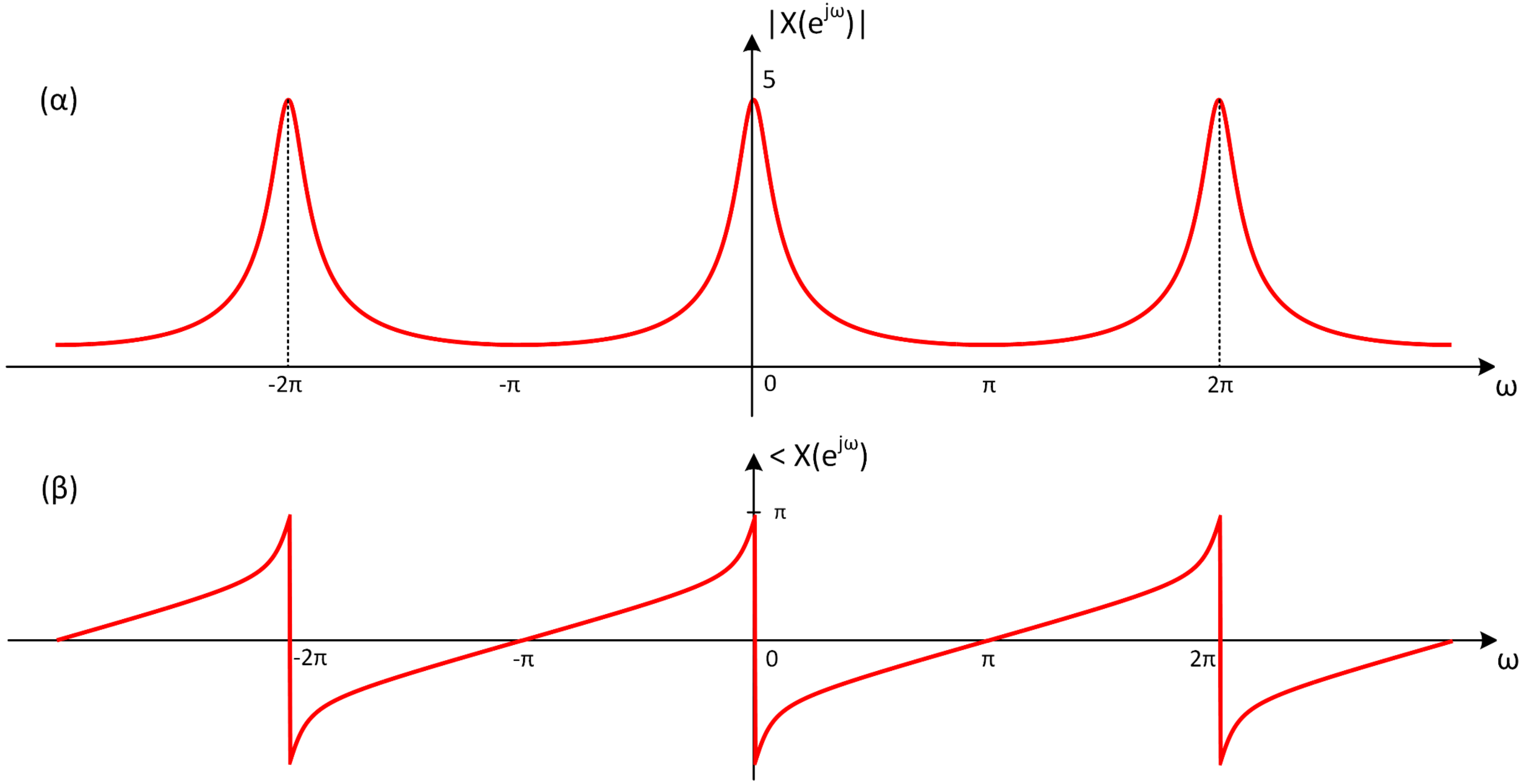
Όπως δείξαμε πριν, έχουμε:

- $$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}, \quad |a|>1$$

- $$\varphi_x(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}, \quad |a|>1$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$a = \frac{6}{5}$

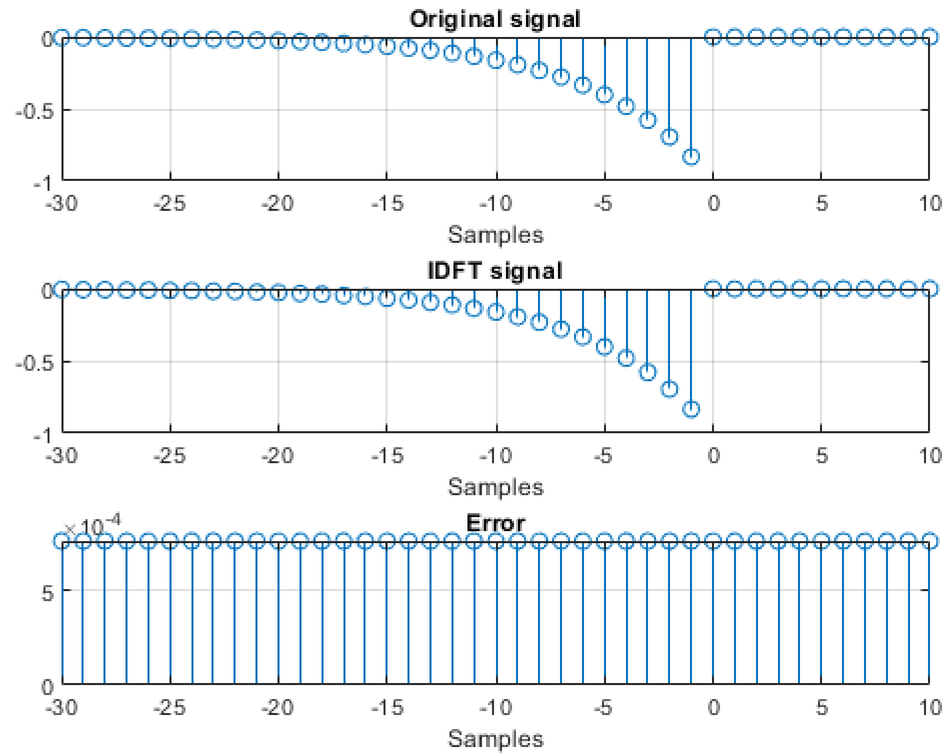


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5;
n = [-30:-1 0 1:10];
x = [-alpha.^n(1:30) zeros(1,11)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

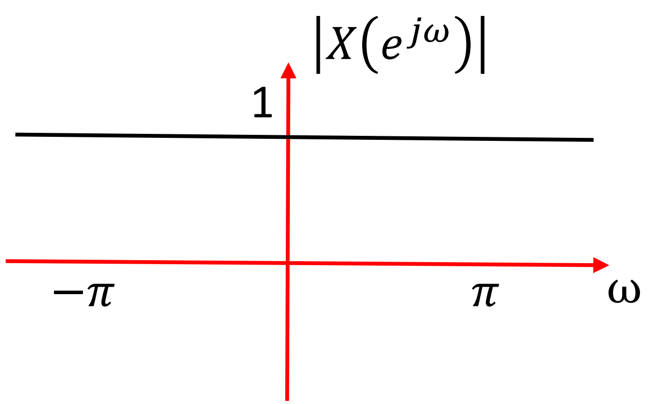
Είναι

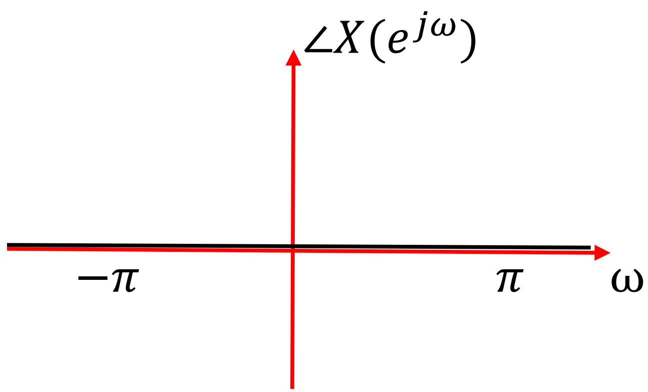
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \delta[0] e^{-j\omega \cdot 0}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1 \rightsquigarrow |X(e^{j\omega})| = 1 \text{ και } \varphi_x(e^{j\omega}) = 0 \ \forall \omega$$

Άρα

$$\delta[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} 1, \ \forall \omega$$



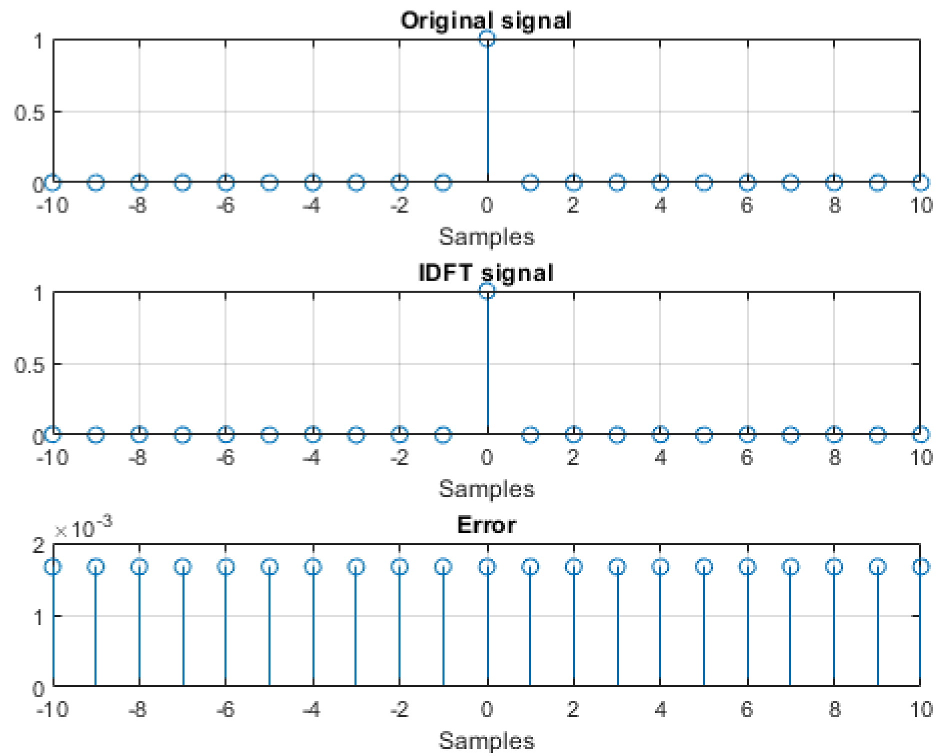


- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

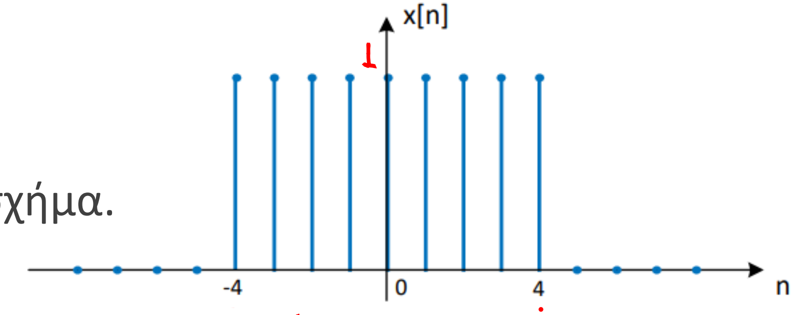
Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,10) 1 zeros(1,10)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = 1 για κάθε ω
X = ones(size(w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} 1 \; e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$

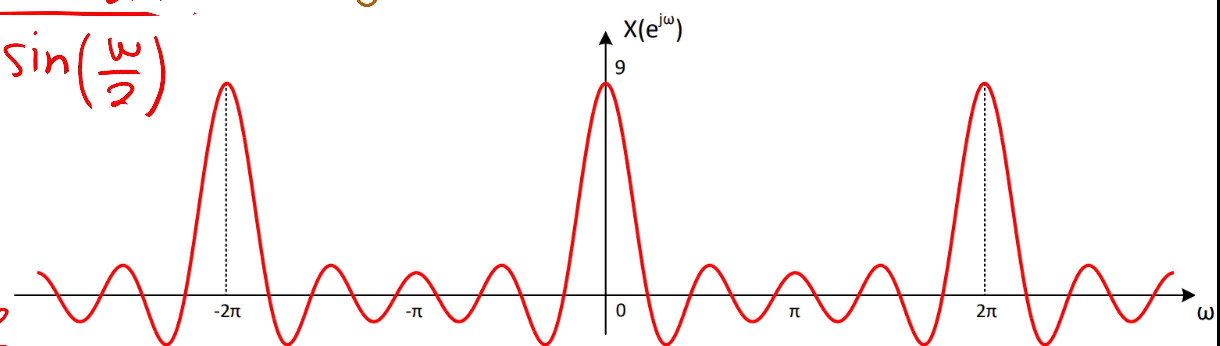
$$= \frac{e^{j4\omega} - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \overset{*}{=} \frac{\cancel{e^{-j\frac{\omega}{2}}}}{\cancel{e^{-j\frac{\omega}{2}}}} \cdot \frac{e^{j\frac{9\omega}{2}} - e^{-j\frac{9\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$= \frac{\cancel{2j} \sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\cancel{2j} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

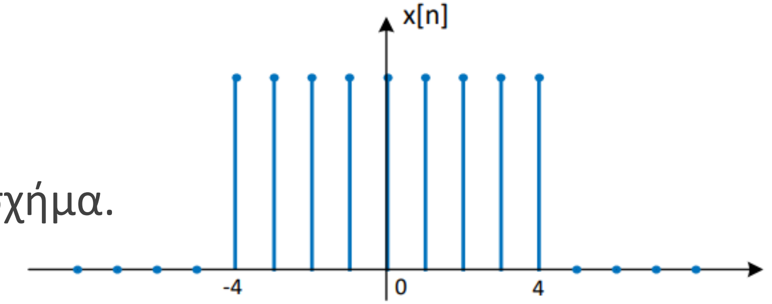
*Hint: $e^a - e^b = e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{\frac{a-b}{2}} - e^{\frac{b-a}{2}}\right)$

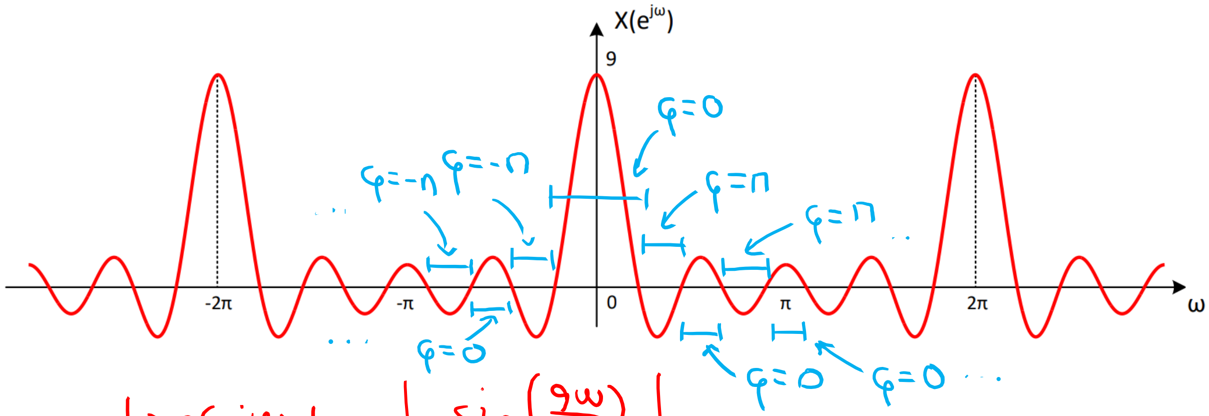
Σημεία μηδενισμού: $\omega_k = \frac{2\pi k}{9}$

για $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 9l$, $l \in \mathbb{Z}$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.





- Φάσμα πλάτους: $|X(e^{j\omega})| = \left| \dfrac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$

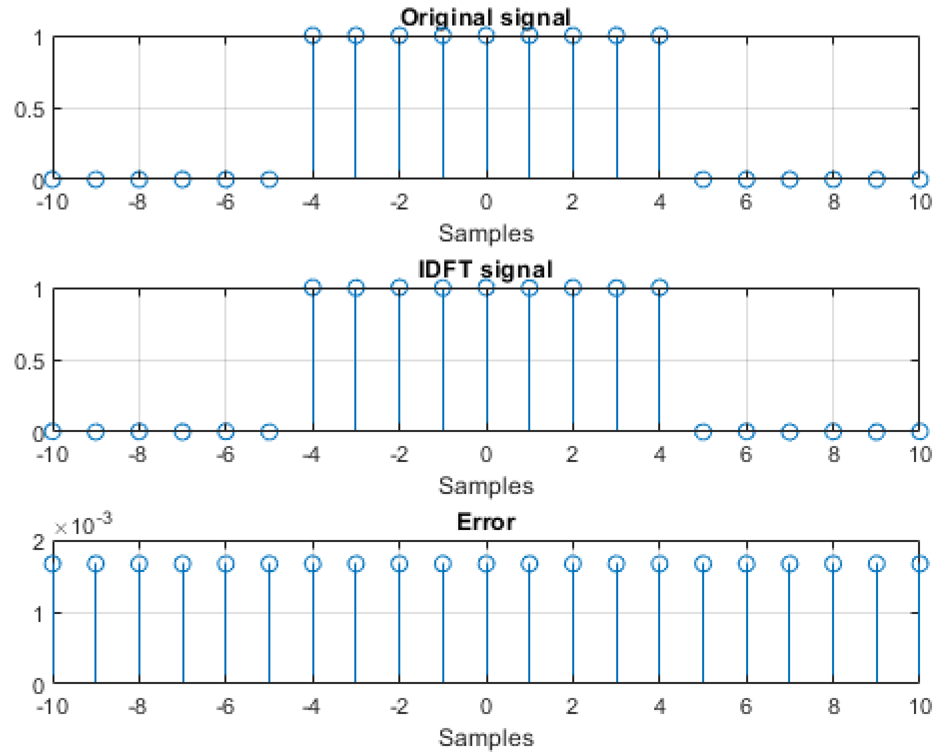
- Φάσμα φάσης: $\varphi_x(e^{j\omega}) = \begin{cases} \pi, & \omega>0 \text{ και } X(e^{j\omega})<0 \\ -\pi, & \omega<0 \text{ και } X(e^{j\omega})<0 \\ 0, & \text{αν } X(e^{j\omega})>0 \end{cases}$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

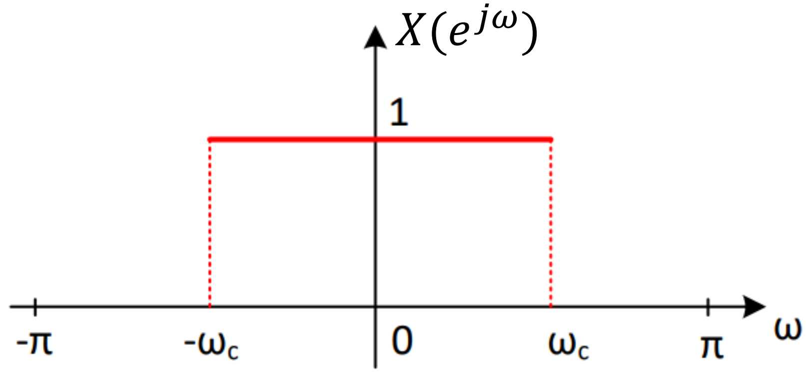
Riemann Sum:

$$x[n] = \lim_{\Delta\omega_k \to 0} \Delta\omega_k \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} X(\Delta\omega_k) e^{j\Delta\omega_k n}$$

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,6) ones(1,9) zeros(1,6)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = sin(9ω/2)/sin(ω/2)
% για κάθε ω
X = sin(9*w/2)./sin(w/2);

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\, e^{j\omega n}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} =$$

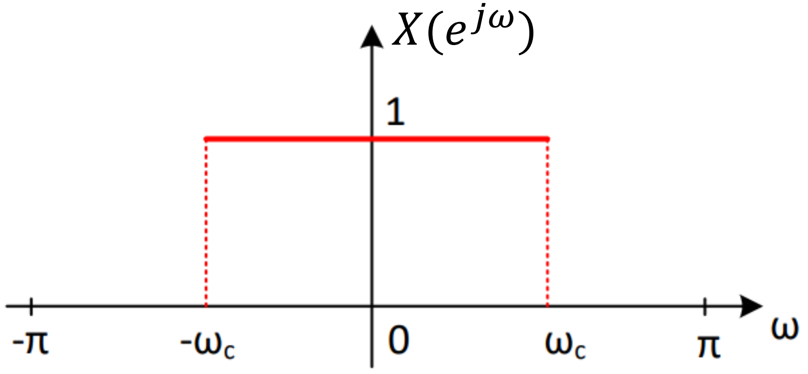
$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\,\frac{1}{\cancel{j}n}\,\cancel{2j}\sin(\omega_c n)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n), \quad -\infty < n < +\infty .$$

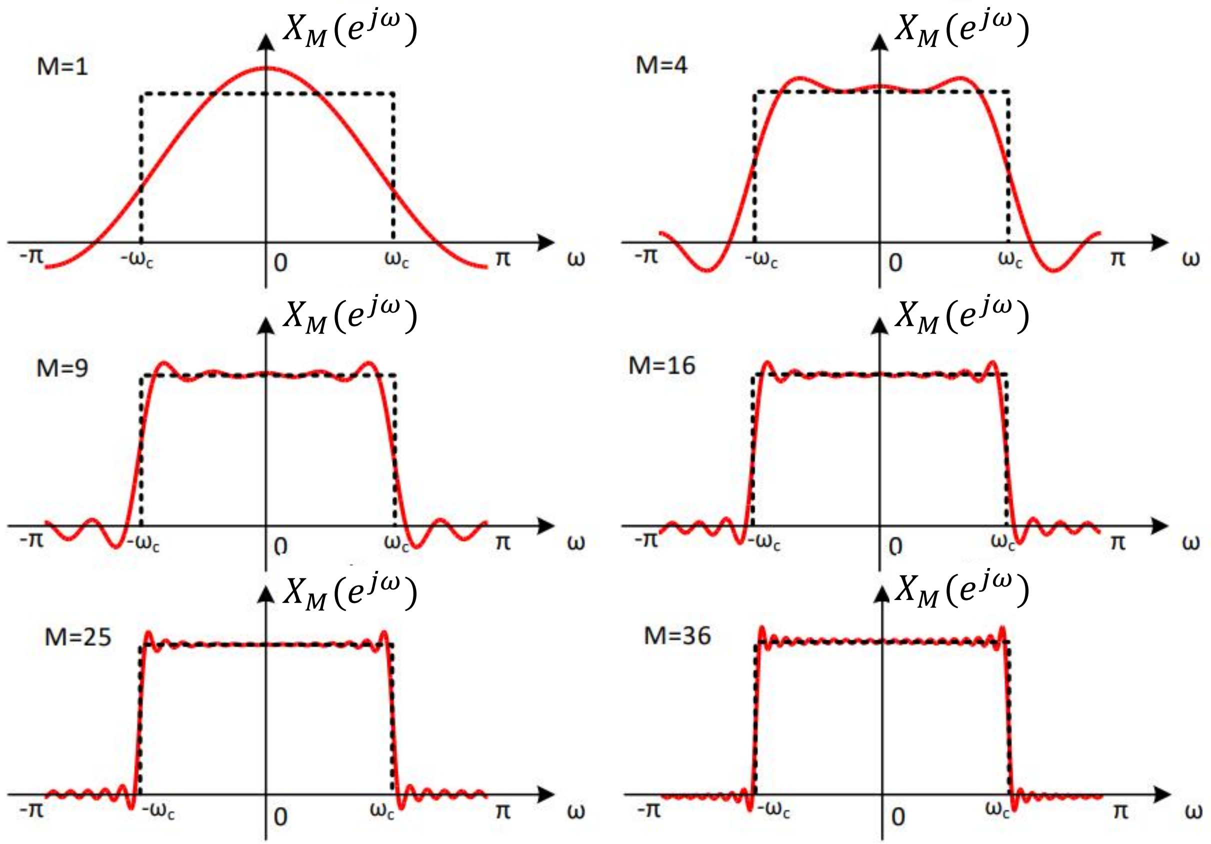
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}.$$ Γράφεται και ως $\frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right).$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



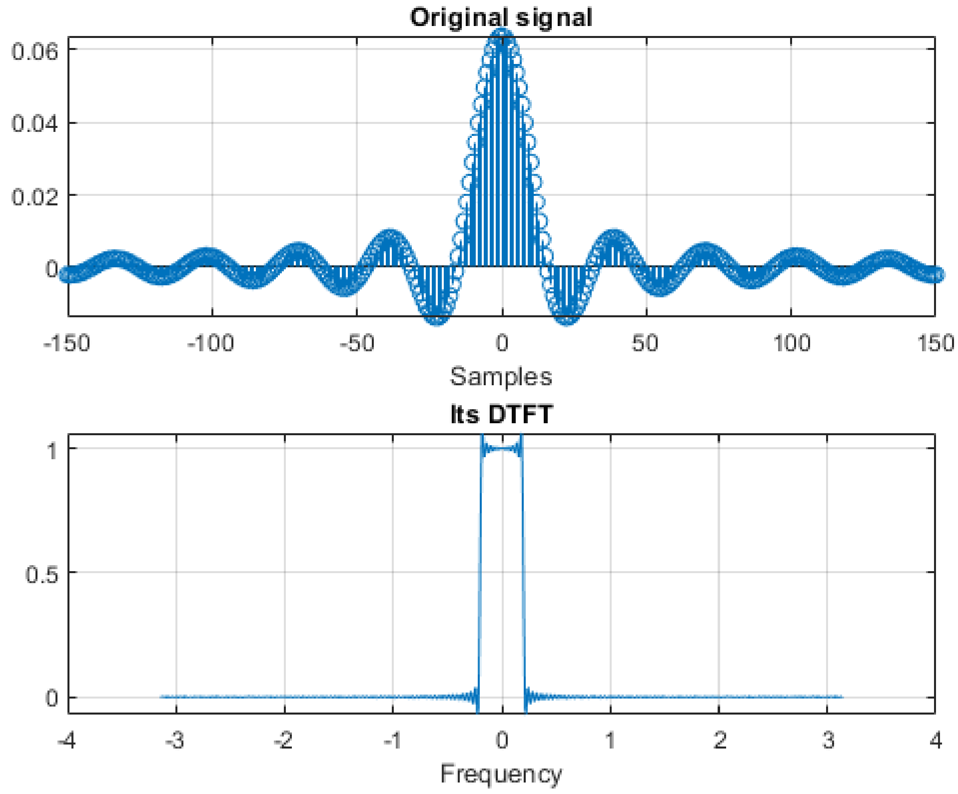
Έστω ότι παίρνω $2M + 1$ δείγματα του σήματος $x[n]$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

• Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-150:150];
wc = 0.2;
x = sin(wc*n)./(pi*n);
% Ρύθμιση απροσδιοριστίας
x(151) = wc/pi;

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);

% Σύνθεση του X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = zeros(size(w));

for i = 1:length(n)
    X_syn = X_syn + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X_syn);
title('Its DTFT'); xlabel('Frequency'); grid;
```



Συνεχίζεται... ☺