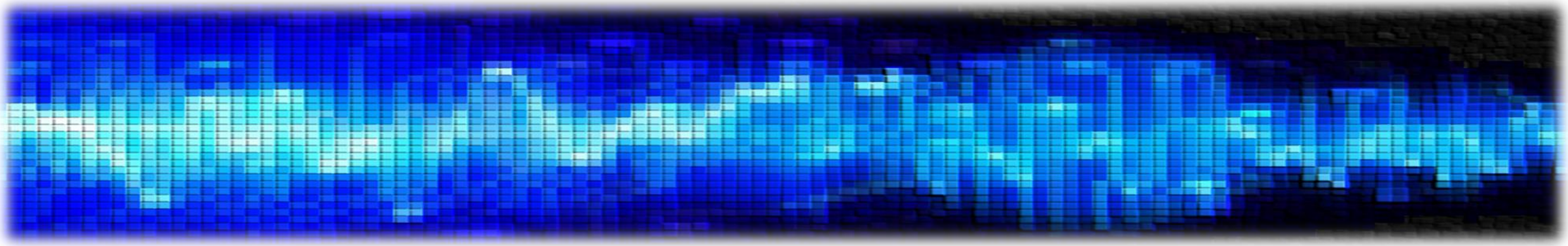
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η



- Απόκριση σε Συχνότητα (ή Συχνοτική Απόκριση)
- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

*Hint: $1 + e^{a+b} = e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{-\frac{a+b}{2}} + e^{\frac{a+b}{2}}\right)$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0 \Rightarrow h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} \overset{*}{=} \frac{1}{M_2+1} \frac{e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \cdot \frac{e^{j\omega\frac{(M_2+1)}{2}} - e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\cancel{2j}\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\cancel{2j}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = H(e^{j\omega})$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{M_2+1}\right| \cdot \left|\cancel{e^{-j\omega\frac{M_2}{2}}}\right|^{\to 1} \left|\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$

$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \left|\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$. Επιλέγω να μελετήσω τη συνάρτηση $|H(e^{j\omega})|$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Για $\omega = 0$, υπάρχει απροσδιοριστία

Για $\omega = 0$, $\lim_{\omega\to 0} \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \overset{DLH}{\underset{(\cdot)'}{=}} \lim_{\omega\to 0} \frac{\frac{M_2+1}{2}\cos\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = M_2+1$.

Άρα $|H(e^{j0})| = \frac{1}{M_2+1}(M_2+1) = 1$

Σημεία μηδενισμού: ο αριθμητής μηδενίζεται όταν

$$\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right) = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{M_2+1},\ k\in\mathbb{Z}^*$. Έστω π.χ. $M_2 = 4$, $\omega_k = \frac{2k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}^*$

* Αλλά όχι στα k που δίνουν ακέραια πολλαπλάσια του 2π

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Για $M_2 = 4$, $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5} \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$

Πώς μοιάζει γραφικά η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$?

Θα τη σχεδιάσουμε μέσω MATLAB/Octave.

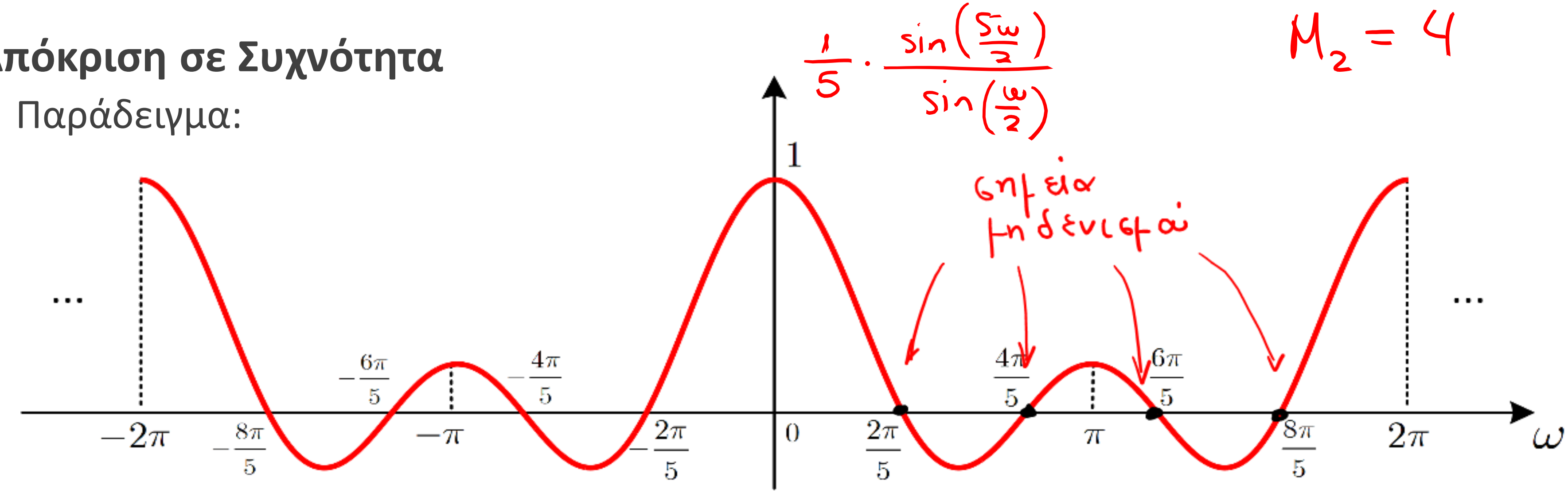
Ας δούμε πρώτα πως μοιάζει ο όρος $\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ και

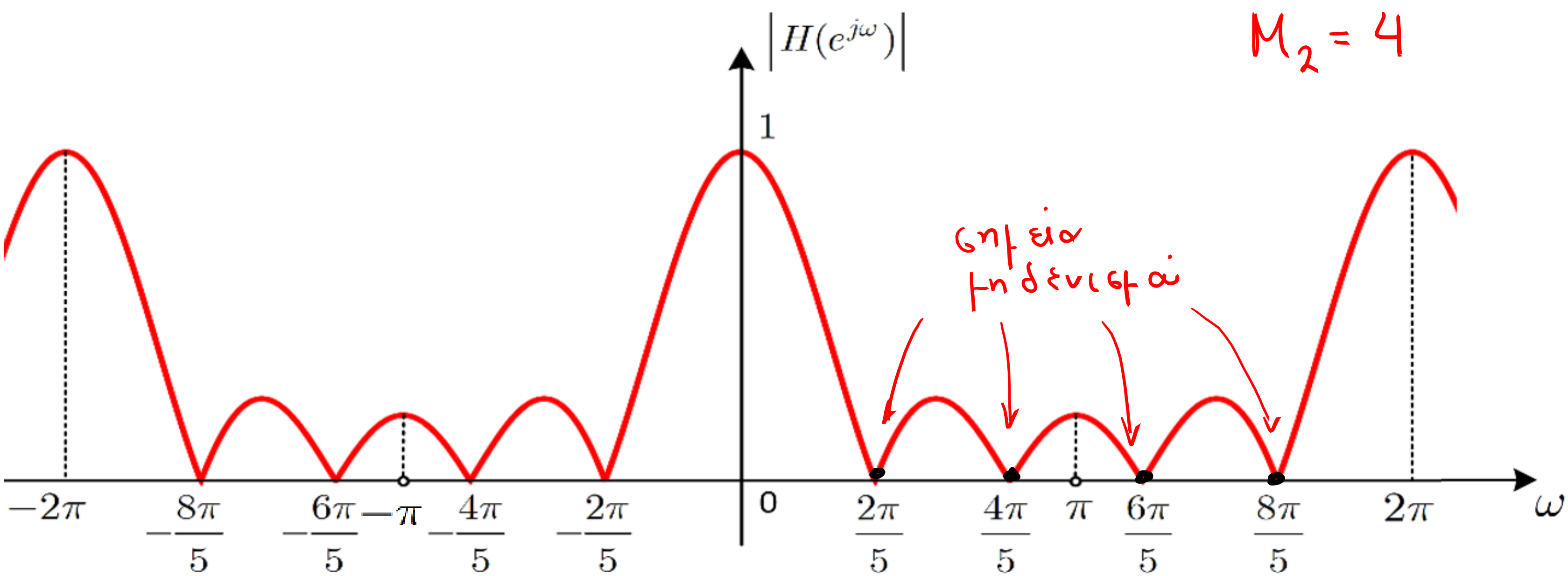
από αυτόν θα βρούμε εύκολα την απόκριση πλάτους.

MATLAB/Octave

```
w = linspace(-2*pi, 2*pi, 1000);
absH = 1/5 * abs(sin(5*w/2)./sin(w/2));
plot(w, absH)
```

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:





- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Hint: αν $z_1 z_2$, $\angle z_1 z_2 = ?$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{j(\phi_1+\phi_2)} \Rightarrow \angle z_1 z_2 = \phi_1 + \phi_2$$

- Απόκριση φάσης: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

Από την παραπάνω γραφή:

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \underbrace{\measuredangle \frac{1}{M_2+1}}_{\substack{\varphi_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} e^{j0} \\ \underbrace{\qquad}_{0}}} + \underbrace{\measuredangle e^{-j\omega \frac{M_2}{2}}}_{\substack{-\omega \frac{M_2}{2} \\ \shortparallel \\ \varphi_2(e^{j\omega})}} + \underbrace{\measuredangle \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}}_{? = \varphi_3(e^{j\omega})}$$

για ποια ω

Μένει να βρούμε το $\varphi_3(e^{j\omega})$, δηλ. να δούμε <u>πότε</u> ο όρος $\frac{\sin(\cdot)}{\sin(\cdot)}$ είναι >0 και πότε <0, γιατί έχουμε $\frac{\sin(\,)}{\sin(\cdot)} \in \mathbb{R}$!

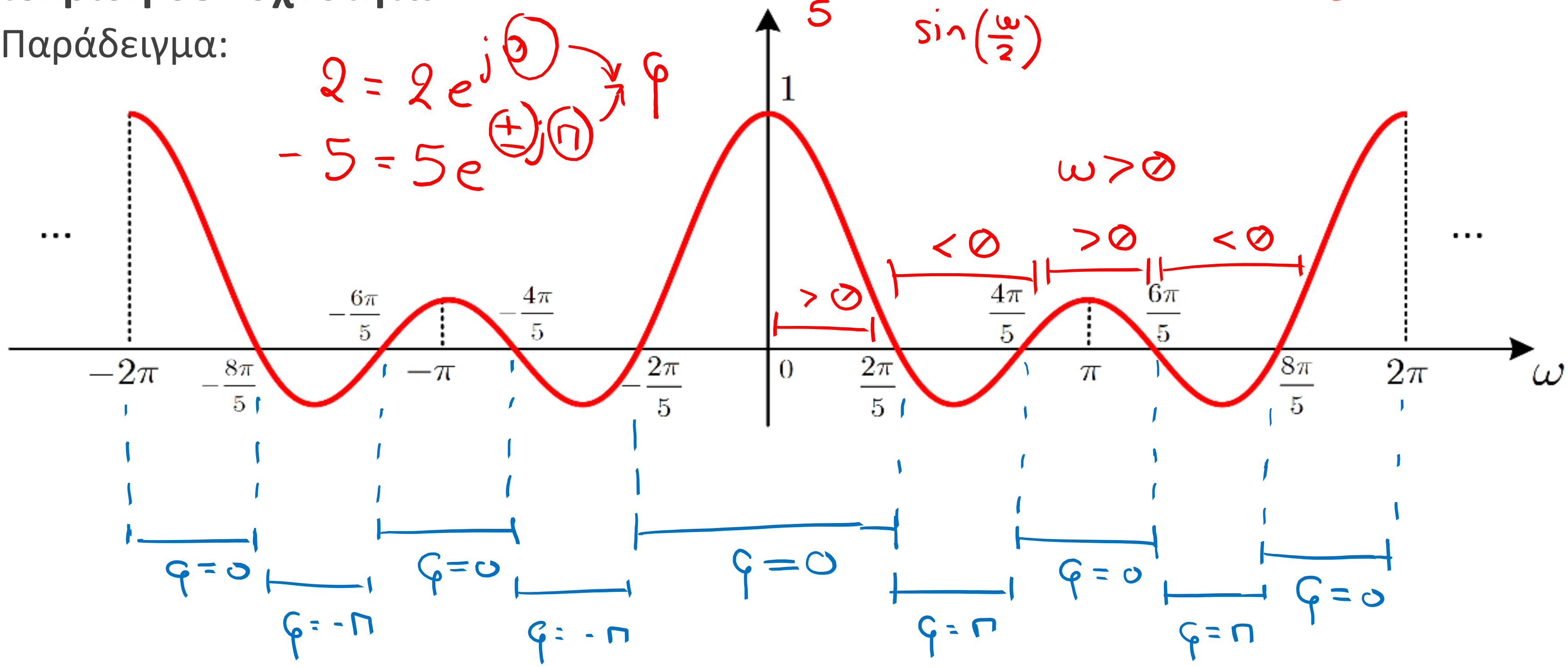
- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$M_2 = 4$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

$2 = 2e^{j0} \rightarrow \varphi$

$-5 = 5e^{\pm j\pi}$



Συνολικά,

$$\varphi_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5},\ \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \\ \pi, & \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -\pi, & -\frac{4\pi}{5} < \omega < -\frac{2\pi}{5},\ -\frac{8\pi}{5} < \omega < -\frac{6\pi}{5} \end{cases}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$$M_2 = 4$$

Οπότε η συνολική φάση θα είναι: (στο $[0,2\pi)$)

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \varphi_1(e^{j\omega}) + \varphi_2(e^{j\omega}) + \varphi_3(e^{j\omega})$$

$$= 0 - \frac{\omega \cancelto{4}{M_2}}{2} + \begin{cases} 0, & 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5}, \\ & \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \\ \pi, & \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \end{cases}$$

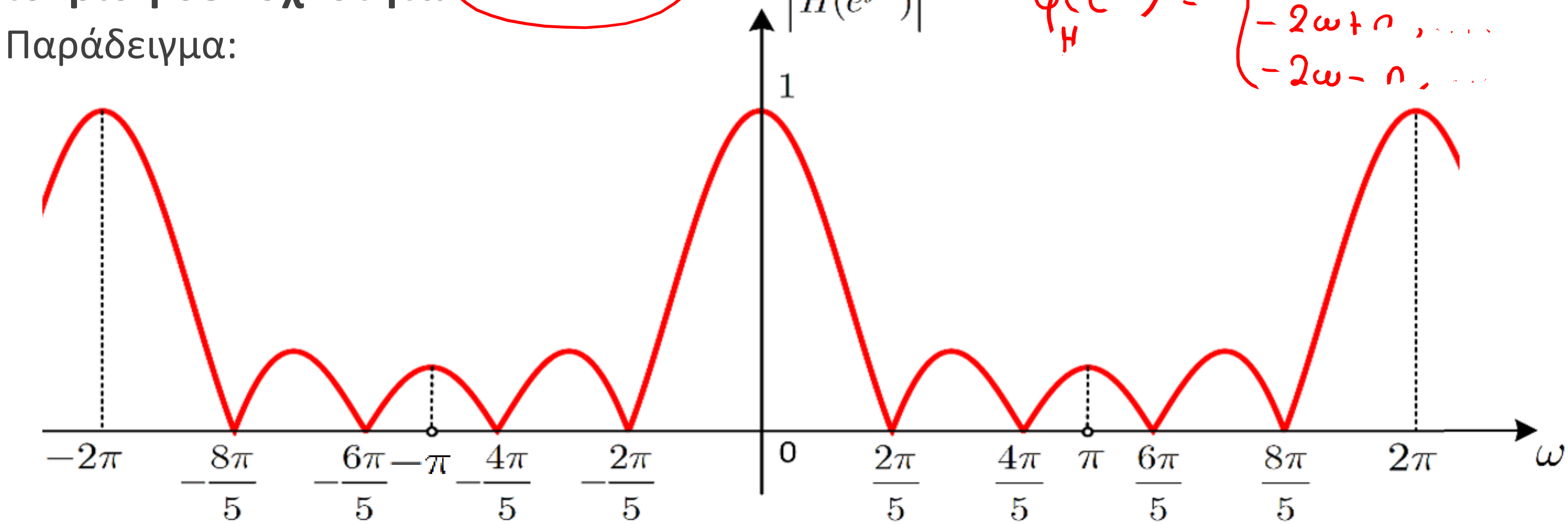
$$= \begin{cases} -\frac{\omega \cancelto{4}{M_2}}{2}, & \dots \\ \pi - \frac{\omega \cancelto{4}{M_2}}{2}, & \dots \end{cases}$$

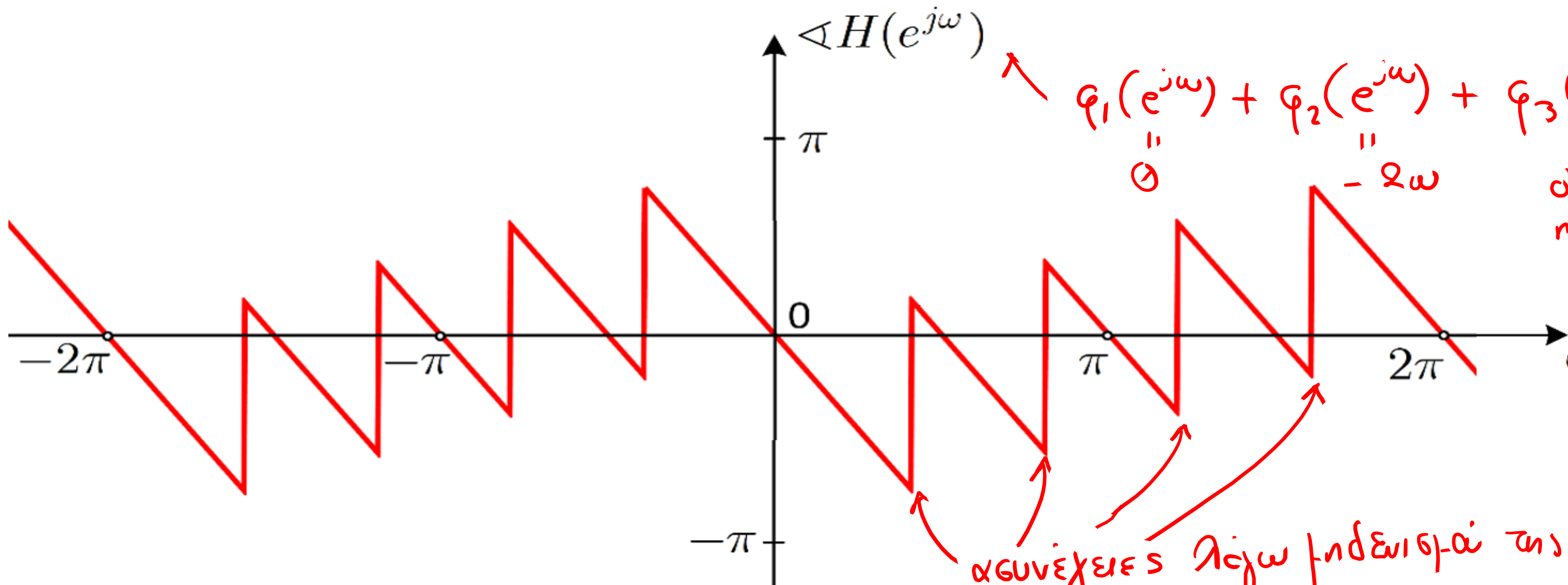
ή εναλλακτικά στο $[-\pi,\pi)$:

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\frac{\omega \cancelto{4}{M_2}}{2}, & |\omega| < \frac{2\pi}{5}, \\ & \frac{4\pi}{5} < |\omega| < \pi \\ \pi - \frac{\omega \cancelto{4}{M_2}}{2}, & \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -\pi - \frac{\omega \cancelto{4}{M_2}}{2}, & -\frac{4\pi}{5} < \omega < -\frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα** $M_2 = 4$
  - Παράδειγμα:

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & \ldots \\ -2\omega+\pi, & \ldots \\ -2\omega-\pi, & \ldots \end{cases}$$





$\varphi_1(e^{j\omega}) + \varphi_2(e^{j\omega}) + \varphi_3(e^{j\omega})$

$\varphi_1(e^{j\omega}) = 0$, $\varphi_2(e^{j\omega}) = -2\omega$, $\varphi_3(e^{j\omega}) =$ όπως πριν

ασυνέχειες λόγω μηδενισμού της $H(e^{j\omega})$

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής

$$e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  σε ένα ΓΧΑ σύστημα

  - Όμως τέτοια σήματα ($-\infty < n < +\infty$) **δεν** υπάρχουν στην πραγματικότητα

  - Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει <u>ακριβώς</u> στην πράξη

  - Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα

  - Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
    - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$

  - Το σήμα αυτό θα είναι το

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

  - Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \\ &= H\left(e^{j\omega n}\right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \\ &= y_{ss}[n] + y_t[n] \end{aligned}$$

  - Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$y[n] = H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από το αποτέλεσμα της ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|\left|e^{j\omega(n-k)}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε

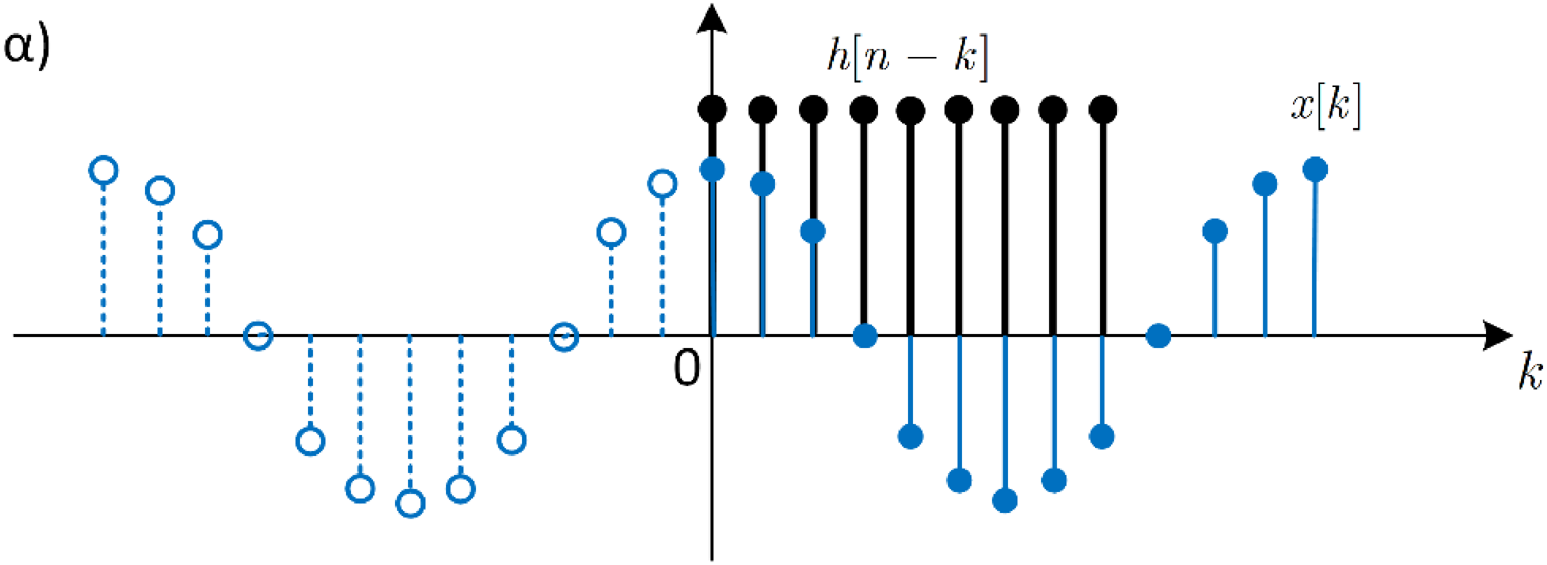
$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$

   τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

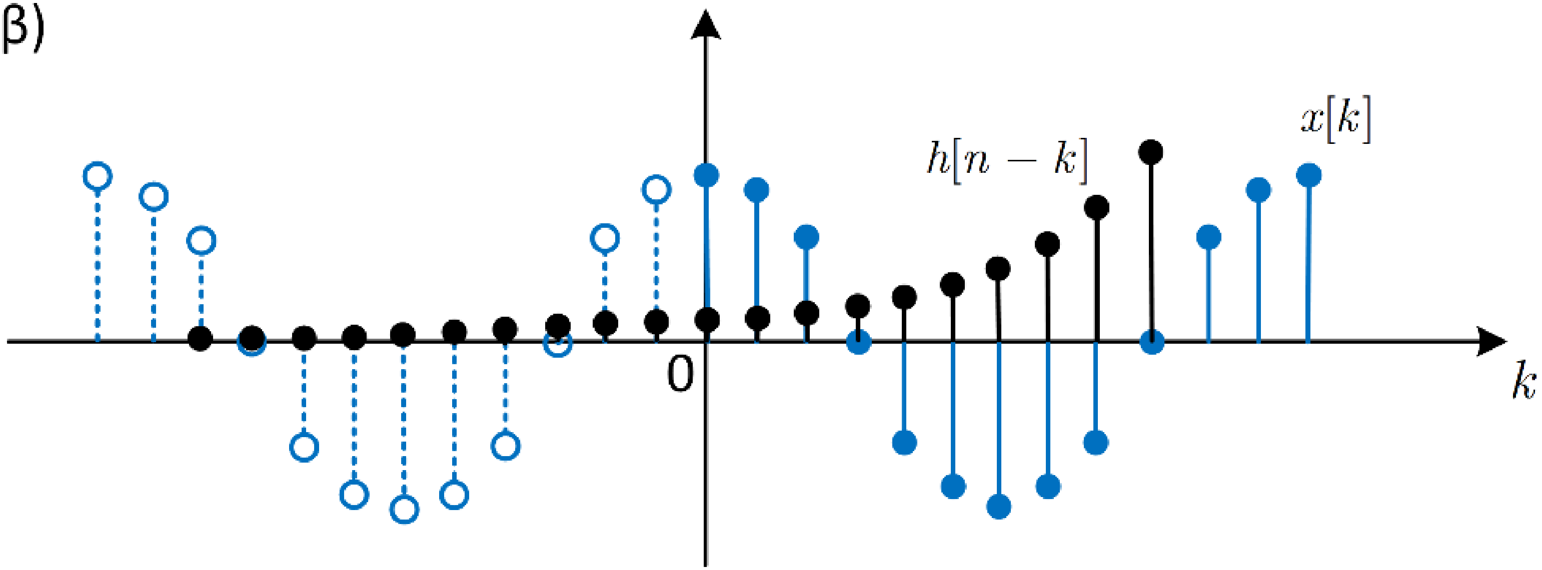
2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \to +\infty$
   - Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

(α)



(β)



- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ας υλοποιήσουμε στο Octave/MATLAB το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

  δηλ. για το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

  με $M_1 = 0, M_2 = 4$.

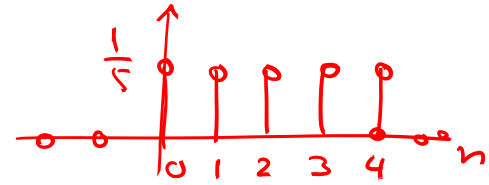
  - Αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση μας ότι η έξοδος θα είναι μηδενική!

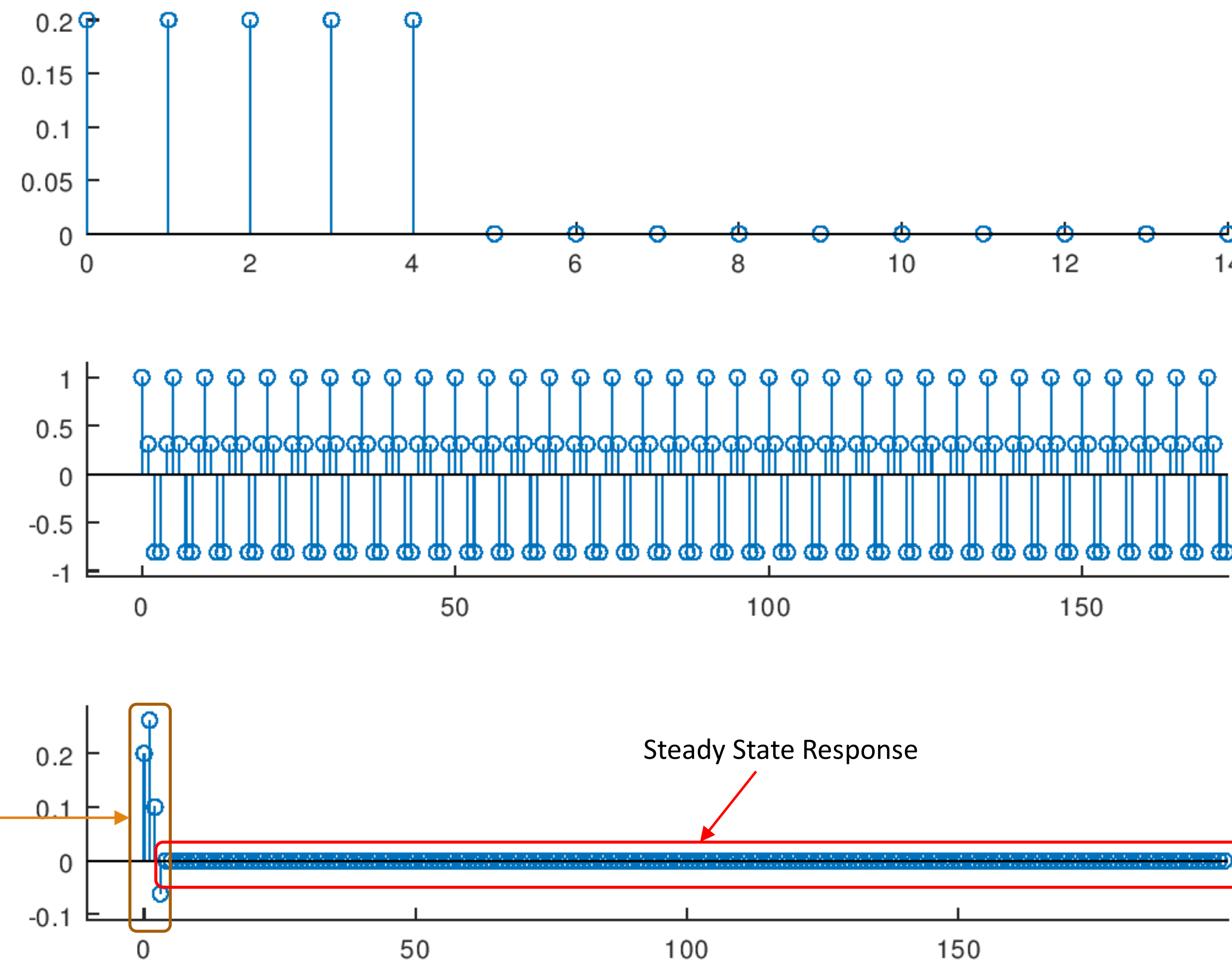
  - Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και την απόκριση σταθερής κατάστασης, αφού το ημίτονο ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

```
% Impulse Response h[n]
M1 = 0;
M2 = 4;
h = 1/(M1 + M2 + 1).*ones(1, M2+1);
h = [h zeros(1,10)];
nh = 0:14;

% Input signal x[n]
omega0 = 2*pi/5;
nx = 0:1000;
x = cos(omega0.*nx);

% Convolution
y = conv(h,x);
ny = [0:1014];

% Plots
subplot(311); stem(nh, h);
subplot(312); stem(nx, x);
subplot(313); stem(ny, y);
```

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$





Προς το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου…

- Είδαμε με λεπτομέρεια πως επηρεάζει ένα ΓΧΑ σύστημα ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ή ένα ημίτονο) συχνότητας ω_0 που εμφανίζεται στην είσοδό του
  - Το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$
  - Στη φάση της εισόδου προστίθεται μια σταθερά $\varphi_H(e^{j\omega_0})$
- Όμως τα περισσότερα σήματα που μας ενδιαφέρουν **δεν** έχουν τη μορφή ενός μιγαδικού εκθετικού (ή ημιτονοειδούς) σήματος
- Η ανάλυση που κάναμε θα μας ήταν **πολύ** χρήσιμη αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση κάποιων μιγαδικών εκθετικών σημάτων που το καθένα θα έχει κάποια συγκεκριμένη συχνότητα
  - Τότε θα γνωρίζαμε πως επηρεάζεται κάθε συχνότητα από το ΓΧΑ σύστημα
- Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! ☺
- Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται – έκπληξη! ☺ – **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

  - Μια πιο εύλογη εξαγωγή του DTFT προέρχεται από τις Σειρές Fourier διακριτού χρόνου, ευθέως ανάλογα με την εξαγωγή του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από τις Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου

  - Θα παραλείψουμε εδώ αυτήν την παρουσίαση και θα δώσουμε απευθείας τον ορισμό

  - Ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ’ αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi_X(e^{j\omega})}$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}$$

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

- Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν *συνεχείς τιμές* στο $(-\pi, \pi]$, και "υπάρχουν" μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.
2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να *συνθέσει* το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών *όλων* των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

$x[n] \in \Re$

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι **πραγματικό**, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^{*}\left(e^{j\omega}\right)$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x\left(e^{-j\omega}\right)$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα [0, π] !!!

Συνεχίζεται... ☺