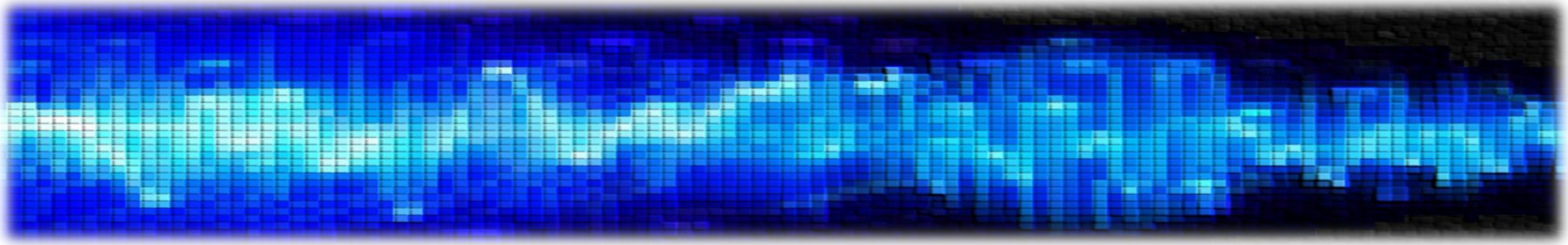
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

## ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η



- Απόκριση σε Συχνότητα (ή Συχνοτική Απόκριση)

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος – Επανάληψη…**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  - Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

# • Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος – Επανάληψη…

- Η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

**Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)**

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{j\omega}\right) + jH_I\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega}\right)}$$

με

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{H_R^2\left(e^{j\omega}\right) + H_I^2\left(e^{j\omega}\right)}$$

και

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{H_I\left(e^{j\omega}\right)}{H_R\left(e^{j\omega}\right)}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα – Επανάληψη…**

$f(x) = f(-x)$ → άρτια συνάρτηση
$f(x) = -f(-x)$ → περιττή συνάρτηση

- Αν η κρουστική απόκριση είναι **πραγματική** συνάρτηση του $n$, τότε

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)\right| = \left|\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}}\right)\right|$$

$$\boldsymbol{\varphi_H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right) = -\boldsymbol{\varphi_H}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega}})$$

- Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του $\omega$ ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

- **Απόκριση σε Συχνότητα – Επανάληψη…**

  - Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}$, $A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)}$$

  - Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος $A$ του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει **πραγματική** κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} |H\left(e^{j\omega_k}\right)| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος

  - Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο $2\pi$!

  - Πράγματι

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}e^{j2\pi}\right) = H(e^{j\omega})$$

  - Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του $\omega$, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο $2\pi$
    - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της

  - Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
    - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συντελεστές $h[n]$
    - Τα εκθετικά αυτά είναι $2\pi$-περιοδικά στη συχνότητα

  - Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

$\in \mathbb{Z}_+$

1ος τρόπος: παρατηρώ ότι $h[n] = \delta[n-n_d]$. Άρα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_d] e^{-j\omega n}$$

$$\delta[n-n_d] = \begin{cases} 1, & n=n_d \\ 0, & n \neq n_d \end{cases} \Rightarrow$$

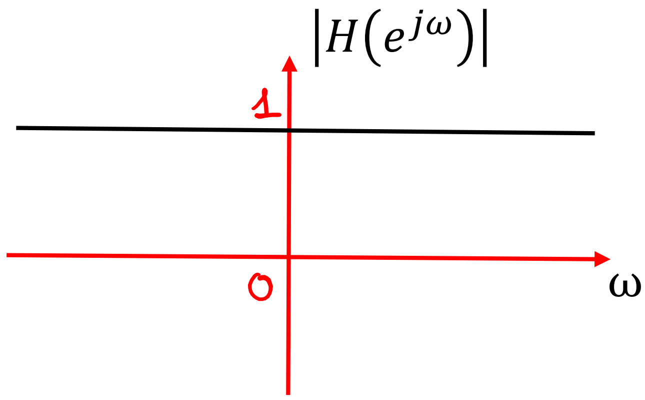
$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 \cdot e^{-j\omega n_d} = e^{-j\omega n_d}$$

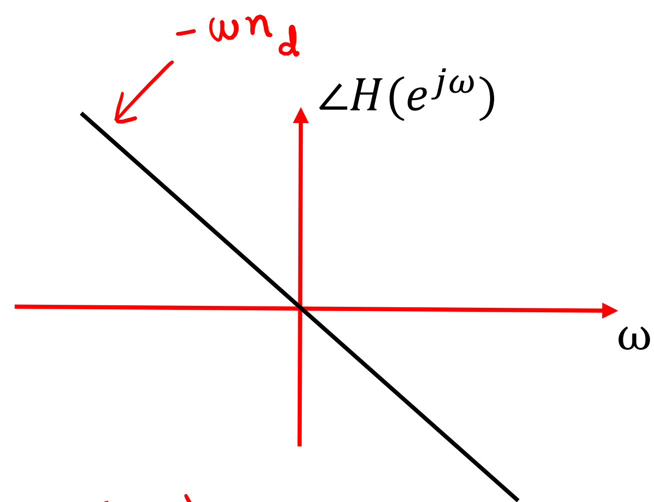
2ος τρόπος: $x[n] = e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{S} y[n] = e^{j\omega_0 (n-n_d)} = \underbrace{e^{j\omega_0 n}}_{x[n]} \cdot \underbrace{e^{-j\omega_0 n_d}}_{H(e^{j\omega_0})}$

Άρα $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} = \cos(\omega n_d) - j\sin(\omega n_d)$

- Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega n_d}| = 1, \ \forall \omega$
- Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\dfrac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1}\dfrac{-\sin(\omega n_d)}{\cos(\omega n_d)} =$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:




$= \tan^{-1}(-\tan(\omega n_d)) = -\omega n_d$. Άρα $\varphi_H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$.

Έστω $n_d = 5$ δείγματα.

Αν είσοδος: $x[n] = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8}\right)$

η έξοδος: $y[n] = 4 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{3}\right)$

$\phi_H(e^{j\pi/3})$

$|H(e^{j\pi/3})|$

Όμοια, $y[n] = x[n-5] = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-5) + \frac{\pi}{8}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right)$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

*Hint: $1 + e^{a+b} = e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{-\frac{a+b}{2}} + e^{\frac{a+b}{2}}\right)$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

Έστω $M_1 = 0 \Rightarrow h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n} =$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} \overset{*}{=} \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \cdot \frac{e^{j\omega\frac{(M_2+1)}{2}} - e^{-j\omega\frac{(M_2+1)}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\cancel{2j}\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\cancel{2j}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = H(e^{j\omega})$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{M_2+1}\right| \cdot \left|\cancelto{1}{e^{-j\omega\frac{M_2}{2}}}\right| \cdot \left|\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$

$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \left|\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$. Επιλέγω να μελετήσω τη συνάρτηση $|H(e^{j\omega})|$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Για $\omega = 0$, υπάρχει απροσδιοριστία.

Για $\omega = 0$, $\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \overset{\frac{DLH}{(\cdot)'}}{=} \lim_{\omega \to 0} \frac{\frac{M_2+1}{2}\cos\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = M_2 + 1$.

Άρα $|H(e^{j0})| = \frac{1}{M_2+1}(M_2+1) = 1$.

Σημεία μηδενισμού: ο αριθμητής μηδενίζεται όταν

$$\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{M_2+1},\ k \in \mathbb{Z}$. Έστω π.χ. $M_2 = 4$, $\omega_k = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

Για $M_2 = 4$, $\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{5} \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$.

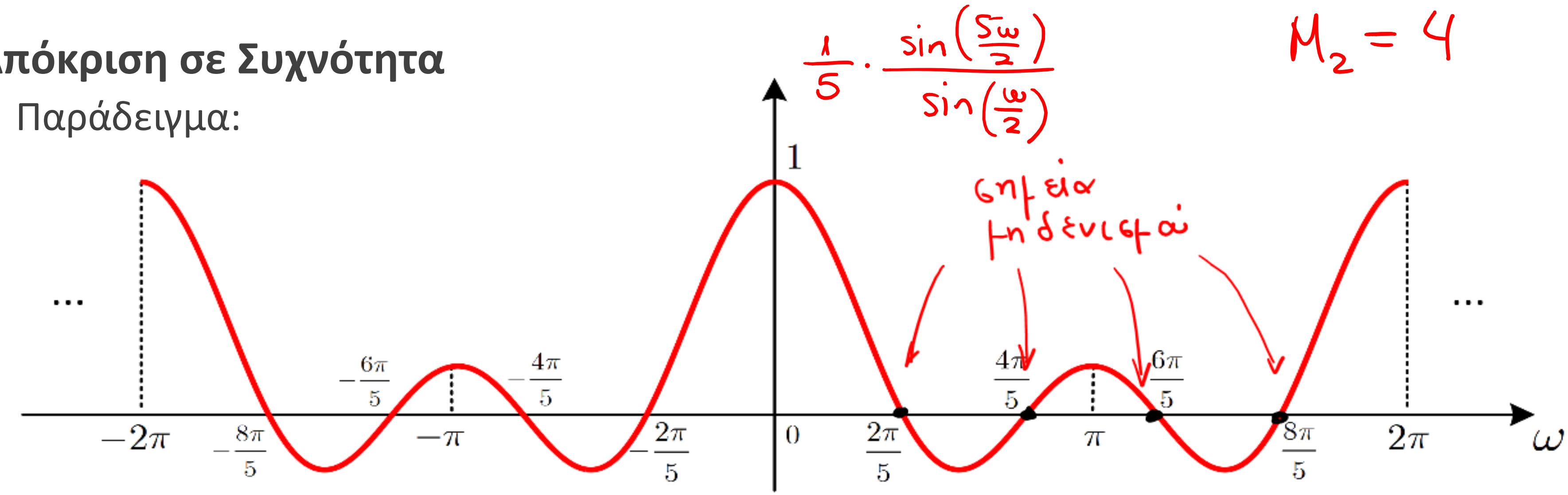
Πώς μοιάζει γραφικά η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$?

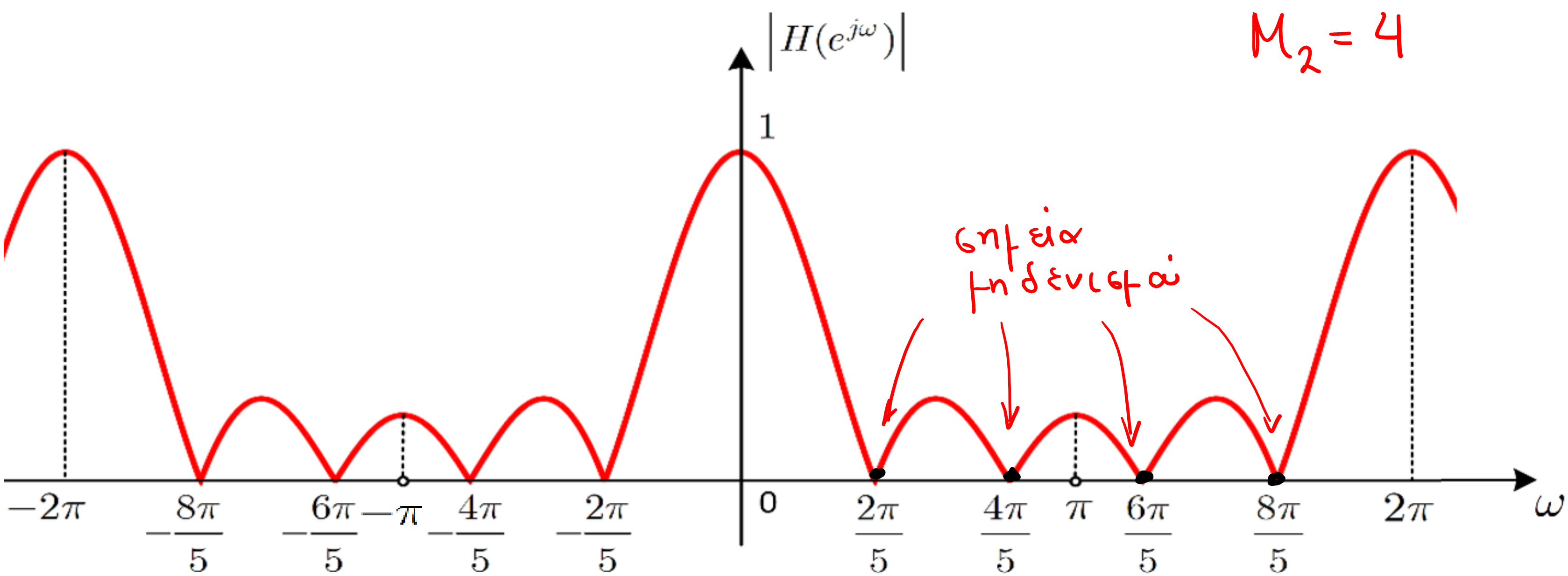
Θα τη σχεδιάσουμε μέσω MATLAB/Octave.

Ας δούμε πρώτα πως μοιάζει ο όρος $\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ και

από αυτόν θα βρούμε εύκολα την απόκριση πλάτους.

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

- Απόκριση φάσης: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

Από την παραπάνω γραφή:

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \measuredangle \underbrace{\frac{1}{M_2+1}}_{\underbrace{\frac{1}{M_2+1}e^{j0}}_{0}} + \measuredangle \underbrace{e^{-j\omega\frac{M_2}{2}}}_{-\omega\frac{M_2}{2}} + \measuredangle \underbrace{\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}}_{?}$$

Hint: αν $z_1 z_2$, $\angle z_1 z_2 = ?$

$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{j(\phi_1+\phi_2)} \Rightarrow \angle z_1 z_2 = \phi_1 + \phi_2$

# Συνεχίζεται... ☺