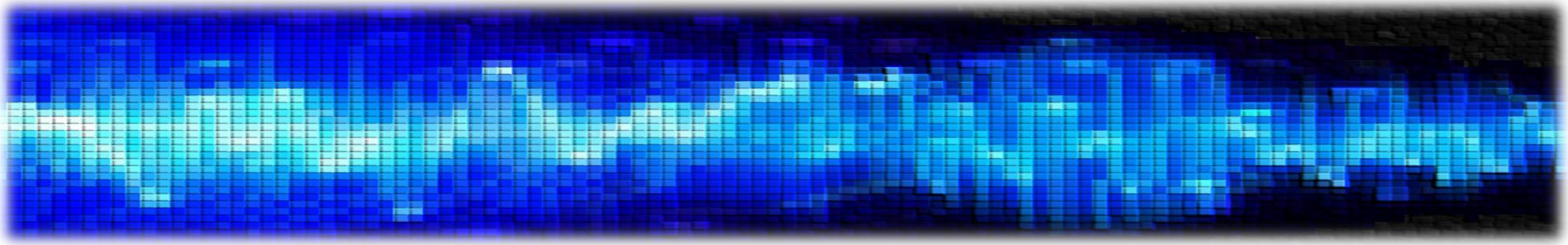
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 5Η



- Ευστάθεια και Αιτιατότητα ΓΧΑ συστημάτων
- Απόκριση σε Συχνότητα

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$
- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών $(x[n] = 0)$
- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)
- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα
- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]$$

- Zero-state response: η **συνέλιξη** της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Διατάξεις συστημάτων
  - Σε σειρά: $h_{total}[n] = h_1[n] * h_2[n]$
  - Παράλληλα: $h_{total}[n] = h_1[n] + h_2[n]$

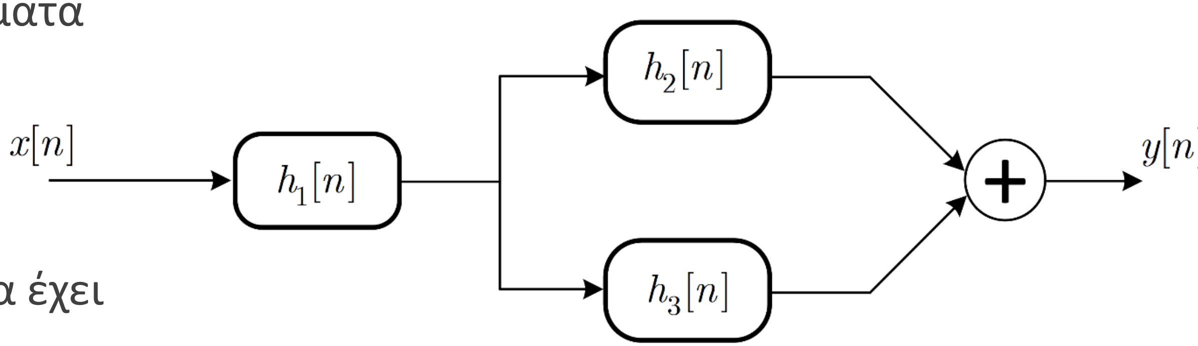
$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το σύστημα της εικόνας, που αποτελείται από τα υποσυστήματα

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα έχει κρουστική απόκριση

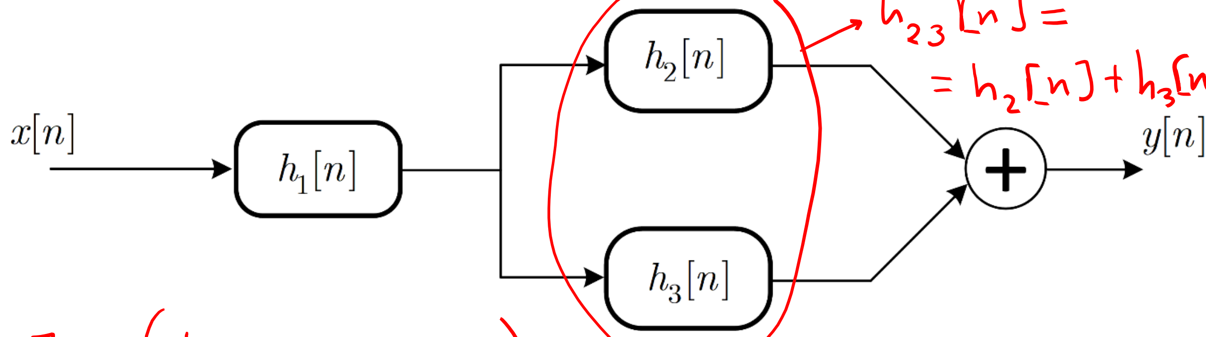
$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)u[n-1]$$



$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] =$
$= x[n-n_0-n_1]$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



$h_{23}[n] = $
$= h_2[n] + h_3[n]$

Είναι $h_{total}[n] = h_1[n] * \left(h_2[n] + h_3[n]\right)$

$= u[n-1] * \left(nu[n] + \delta[n+1]\right) = u[n-1] * nu[n] + \underbrace{\overset{x[n-1]}{u[n-1]} * \delta[n+1]}_{u[n-1+1] = u[n]}$

Επίσης $u[n-1] * nu[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \underbrace{u[k]\, u[n-k-1]}_{?}$

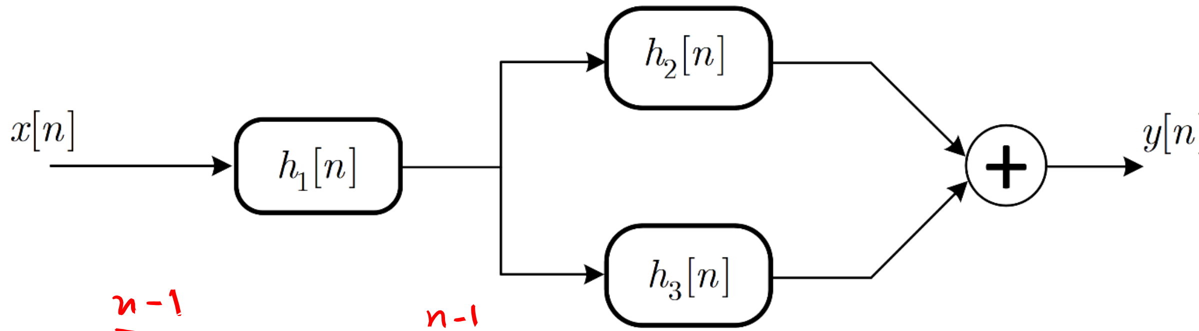
Είναι $u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$u[n-k-1] = \begin{cases} 1, & n-k-1 \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$u[k]\, u[n-k-1] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$



Άρα $u[n-1] * nu[n] = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)(n-1-1)$

$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, για $0 \leq n-1 \Rightarrow \underline{n \geq 1}$. Οπότε

$u[n-1] * nu[n] = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\underline{u[n-1]}$.

Άρα

$h_{total}[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)u[n-1]$.

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**

  - Έχουμε συζητήσει για την έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος

$$|x[n]| \leq B_x \Rightarrow |y[n]| \leq B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

  - Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

  - Άρα θα πρέπει

$$|y[n]| \leq B_y \Rightarrow |x[n] * h[n]| \leq B_y \Rightarrow \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq B_y$$

  - Ξέρουμε ότι $|x[n]| \leq B_x, \quad \forall\, n$, οπότε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \leq B_y$$

  - Η τελευταία σχέση ισχύει αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

• Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

- Η σχέση

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty}$$

Κρουστική απόκριση απολύτως αθροίσιμη

και η οποία αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ευστάθεια** ενός ΓΧΑ συστήματος

- ◦ Δεν αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα εδώ

- Η κρουστική απόκριση μπορεί να αποτελείται από όρους της μορφής

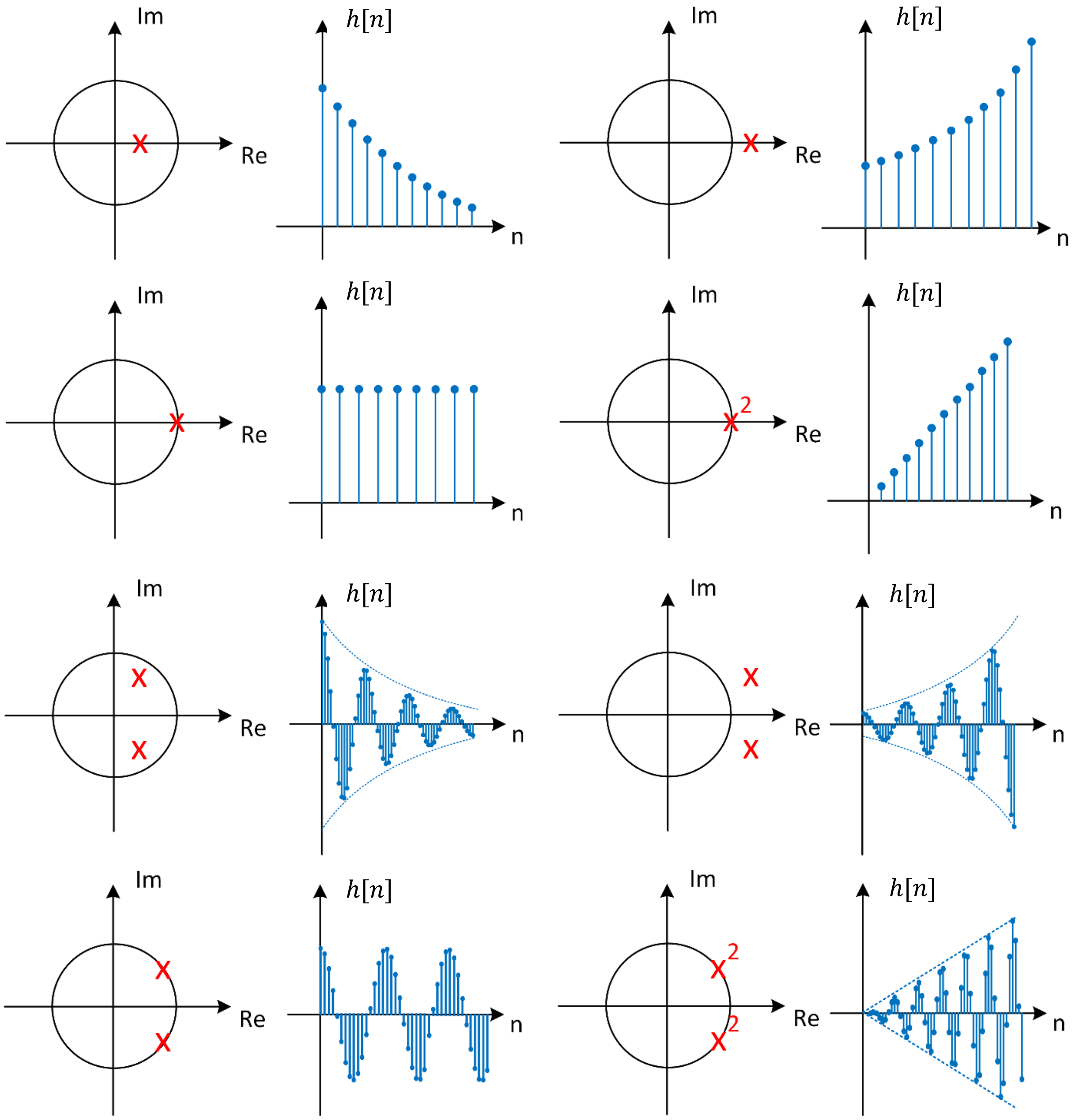
$$\delta[n-k], \gamma_k^n, n^k \gamma_k^n$$

- Προφανώς η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη αν και μόνον αν

$|\gamma_k| < 1, \ \ \forall \gamma_k \in \mathbb{C} \ \Leftrightarrow$ οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας!

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**

Παραδέιγματα θέσης χαρακτηριστικών ριζών και το αποτέλεσμα αυτών στην κρουστική απόκριση



- **Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος**

  - Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \;\; \forall\, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \;\; \forall\, n < n_0$$

  - Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \qquad n < n_0 \;\; \Rightarrow \;\; y[n] = 0, \qquad n < n_0$$

  - Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
  - Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
    - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα

  - Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$\boxed{h[n] = 0, \qquad n < 0}$$

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**

- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

  τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους… ☺

- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου

- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παρ' όλα αυτά
  - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του *γιατί* τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δεν ξέρουμε *πώς* να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά

- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια διαφορετική είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
  - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό…

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Έστω το σήμα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad -\infty < n < +\infty$$

  - Η έξοδος τότε θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

με

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

- Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

- Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό

- Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Το άθροισμα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

  - Αρκεί

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|h[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

αφού $\left|e^{j\omega n}\right| = 1, \;\; \forall\, \omega, n$

  - Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
    - Θα πούμε περισσότερα αργότερα…

Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Η συνάρτηση ως προς ω

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

Απόκριση σε Συχνότητα
ή
Συχνοτική Απόκριση

(frequency response)

- Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

- Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι <u>πραγματική</u> συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Η ιδιότητα

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

συνεπάγεται ότι

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I(e^{-j\omega})$$

και

$$\boldsymbol{\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|}$$

$$\boldsymbol{\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_H(e^{-j\omega})}$$

  - Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

  - Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}, \quad A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H(e^{j\omega_0})\right)} \end{aligned}$$

  - Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

  - Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
    - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με πραγματική κρουστική απόκριση

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta)}, \qquad A \in \Re_+$$

θα έχουμε

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j\left(\omega_0 n+\theta-\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right)}$$

  - Όμως

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_H\left(e^{-j\omega}\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Άρα

$$y[n] = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{-j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)}$$
$$= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}\left(e^{j\omega}\right)}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = C + A\cos(\omega_0 n + \theta) = C\cos(0n) + A\cos(\omega_0 n + \theta)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH\left(e^{j0}\right) + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| A\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!

- Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} |H\left(e^{j\omega_k}\right)| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

Συνεχίζεται... ☺