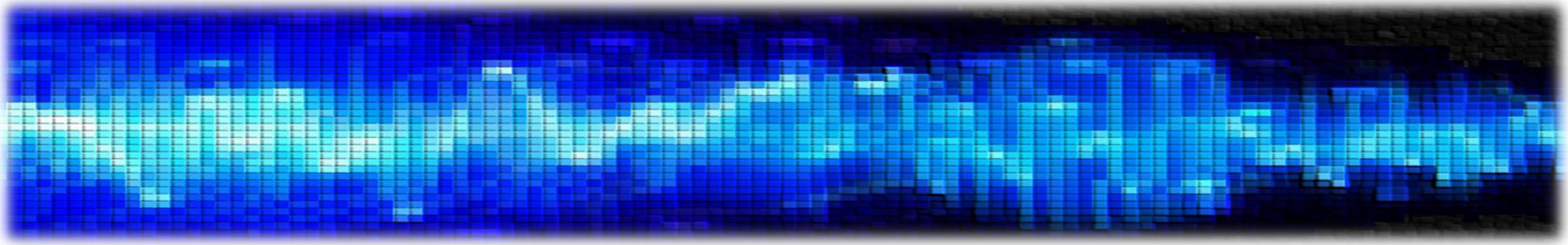
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 3Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου

- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

ένα σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου <u>όσο και της εξόδου</u>

  - Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

  - Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1], y[-2]$

  - Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

  ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

  - Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος

  - Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση

  - Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
    - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
    - Ένα σύστημα που **δε** βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?

- Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
  - Της απόκρισης **μηδενικής εισόδου** $y_{zi}[n]$ (zero input response)
  - Της απόκρισης **μηδενικής κατάστασης** $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

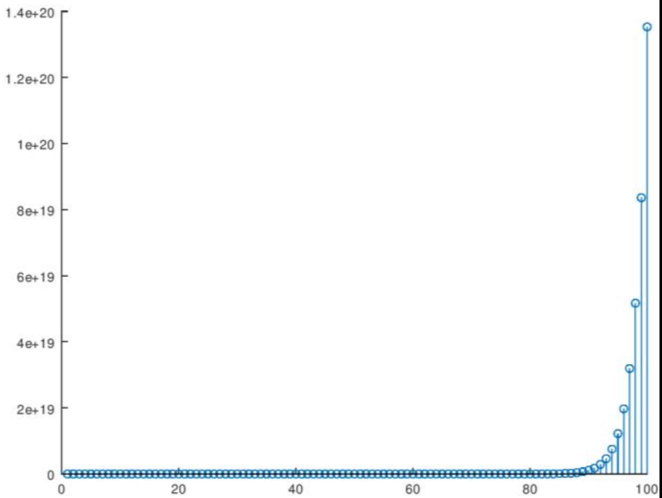
- Η απόκριση **μηδενικής εισόδου** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία <u>μόνο</u> των αρχικών συνθηκών
  - **Επομένως: αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν**

- Η απόκριση **μηδενικής κατάστασης** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
  - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

• Συστήματα με εξισώσεις διαφορών

- Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$



αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$
$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$
$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$
$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$
$$\dots \dots$$

- Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

- Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου (οι οποίες μάλιστα μεγαλώνουν εκθετικά)!
  - Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά παραγωγής εξόδου άνευ εισόδου ☺

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \; \forall \; n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0$$

  - Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**
  - Μπορεί να δειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \qquad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

  - Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \; c\gamma^n \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Δηλ. πρέπει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0$$

  - Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1}\gamma^{-N+1} + \cdots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N}(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N) = 0$$

  - Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το θέσουμε ίσο με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

  - Παραγοντοποιώντας

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \ldots (\gamma - \gamma_{\mathrm{N}}) = 0$$

με $\gamma_i, = 1, \ldots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

  - Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \qquad c_2\gamma_2^n, \qquad c_3\gamma_3^n, \qquad \dots, \qquad c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Μπορεί να δειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \cdots + c_N\gamma_N^n, \qquad c_i \in \mathbb{C}, \qquad i = 1, \dots, N$$

  - Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i\gamma_i^n, \qquad n \geq 0$$

  - Και τα c_i?

  - Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

  με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1$.

Έχουμε $y_{zi}[n] + 5y_{zi}[n-1] + 6y_{zi}[n-2] = 0 \leftarrow$ ομογενής εξίσωση

Άρα $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \leftarrow$ χαρακτηριστική εξίσωση

Ρίζες: $\gamma_1 = -2, \gamma_2 = -3 \leftarrow$ χαρακτηριστικές ρίζες

Οπότε:

$$y_{zi}[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n, \quad n \geq 0$$

$$= c_1(-2)^n + c_2(-3)^n, \quad n \geq 0$$

Αρχ. συνθήκες:

$$y_{zi}[-2] = 0 \Rightarrow c_1(-2)^{-2} + c_2(-3)^{-2} = 0$$

$$y_{zi}[-1] = 1 \Rightarrow c_1(-2)^{-1} + c_2(-3)^{-1} = 1$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

Λύνοντας το 2x2 σύστημα έχουμε: $c_1 = 4$, $c_2 = -9$

Άρα

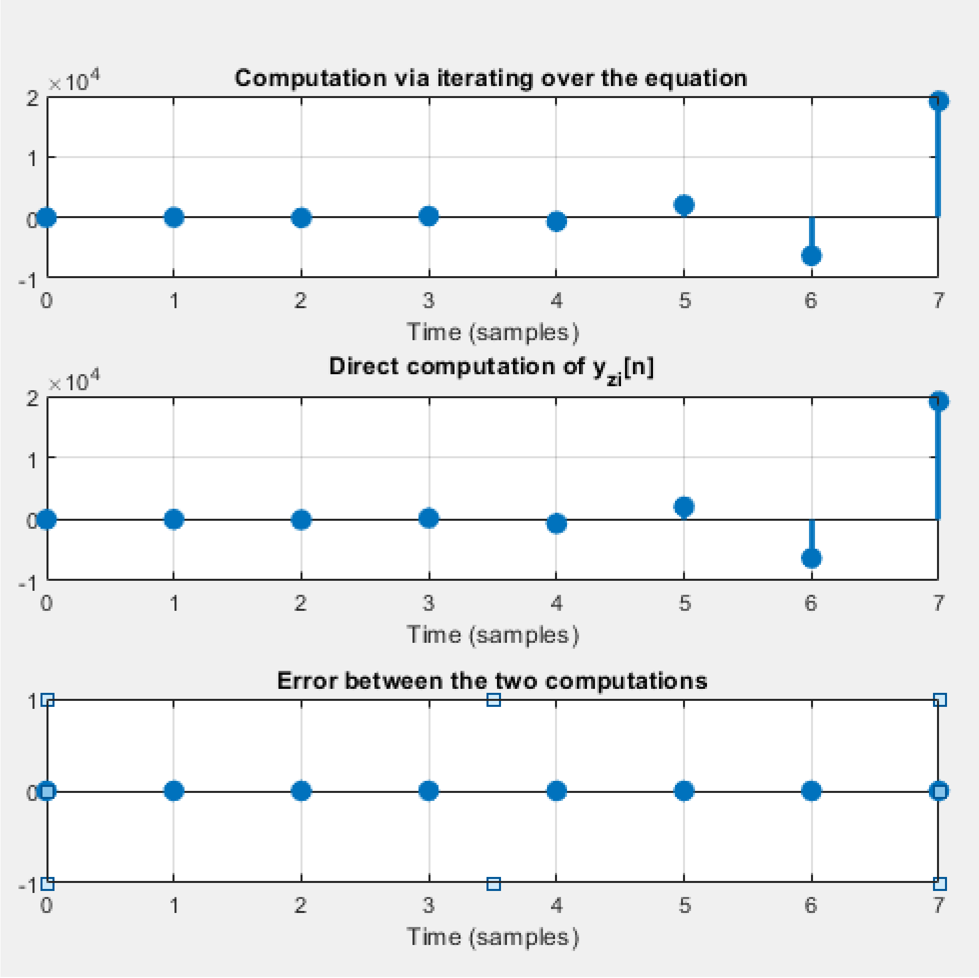
$$y_{zi}[n] = 4(-2)^n - 9(-3)^n , \; n \geq 0$$

$$= \left[4(-2)^n - 9(-3)^n\right] u[n]$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - MATLAB:

2 από αυτά θα «καταναλωθούν» στις αρχικές συνθήκες, άρα θα παράξω 8 δείγματα

```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω?
N = 10;

% Αρχικοποίηση
y = zeros(1,N);

% Αρχικές συνθήκες y[-2] = 0, y[-1] = 1
y(1) = 0;
y(2) = 1;

% Μετράω από n=3 θεωρώντας ότ το y(3) είναι το y[0]
for n=3:N
y(n) = -5*y(n-1) - 6*y(n-2);
end

% Προβολή
figure; subplot(311);
stem(0:N-3, y(3:end));
title('Computation via iterating over the equation');
xlabel('Time (samples)');

n = 0:7;
yzi = 4*(-2).^n - 9*(-3).^n;
subplot(312); stem(n, yzi);
title('Direct computation of y_{zi}[n]');
xlabel('Time (samples)');

error = yzi - y(3:end);
subplot(313); stem(n, error);
title('Error between the two computations');
xlabel('Time (samples)');
```



- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0.$

Είναι

$$y_{zi}[n] + \frac{7}{12}y_{zi}[n-1] + \frac{1}{12}y_{zi}[n-2] = 0 \longleftarrow \text{ο.ο. εξίσωση}$$

$$\downarrow$$

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = 0 \longleftarrow \text{χαρακτ. εξίσωση}$$

Ρίζες:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{3} \longleftarrow \text{χαρ. ρίζες}$$

Άρα

$$y_{zi}[n] = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Όμως

$$\left.\begin{aligned} y_{zi}[-2] = 1 &= c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \\ y_{zi}[-1] = 0 &= c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2\times 2$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

Λύνοντας, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$. Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (πολλαπλότητας ≥ 2), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

Αν

$$(\gamma - \gamma_1)^r(\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \ldots (\gamma - \gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i n^{i-1} \gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{N} c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \qquad n \geq 0$$

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**
  - Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος
  - Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
    - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία
  - Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
    - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα
  - Ποιο είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
    - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
    - Έχει “νόημα”: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
    - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{S_{\text{ΓΧΑ}}} \longrightarrow y[n] = h[n]$$

  - Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

  - Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα

  - Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα “θεωρήσουμε” ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$

  - Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

  - Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

  - Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1$$

$$a_0 h[0] + a_1 \cdot 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] = 1 \;\Leftrightarrow\; h[0] = \frac{1}{a_0}$$

  - Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!

  - Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \qquad n > 0$$

  - Ξέρουμε ότι

$$h[n] = c\gamma^n, \qquad n \geq 0$$

  - Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0\gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

  - Οπότε

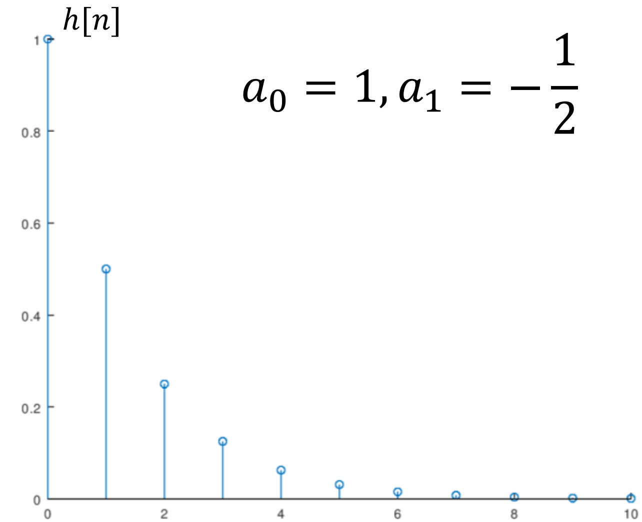
$$h[n] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

  - Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^0 = c = \frac{1}{a_0}$$

  - Άρα

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$



$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}$$

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Θα μπορούσαμε να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών, ανεξαρτήτως τάξης

  - Όμως σίγουρα κάτι τέτοιο είναι αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό
    - Υπάρχει κάποια ευκολότερη μέθοδος;

  - Με άλλα λόγια, αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  τότε τι κάνουμε για να βρούμε την κρουστική απόκριση εύκολα και γρήγορα?

  - Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απάντηση

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

  - Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$S_b\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$$

Το δεξί μέλος έχει ΜΟΝΟ x[n] !

με κρουστική απόκριση $h_b[n]$

  - Τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n]$$

θα είναι $h_0[n] = b_0 h_b[n]$

  - Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_{0^-}\colon \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n-l]$$

θα είναι $h_{0^-}[n] = b_0 h_b[n-l]$

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

- Ακολουθώντας την ίδια λογική, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

θα είναι

$$h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_b[n-l]$$

- Η ιδιότητα της γραμμικότητας (ομογένεια) μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, ενώ η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το δεύτερο στο τρίτο

- Η ιδιότητα της γραμμικότητας (αθροιστικότητα) μας επέτρεψε ξανά να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα

- Και οι δυο ιδιότητες (ΓΧΑ) μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενικότερη απάντηση που βλέπετε παραπάνω

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

$$\begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

$\|$

Θέτω $x[n] = \delta[n]$, οπότε $h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n]$ (1)

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6}$

— " — εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0$

— " — ρίζες: $\gamma_1 = -\frac{1}{3}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$

Άρα

$$h[n] = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

- $n=0$: $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $h[0] + \frac{5}{6}\cancel{h[-1]} + \frac{1}{6}\cancel{h[-2]} = 1 \Leftrightarrow \boxed{h[0] = 1}$ (0, 0)
- $n=1$: $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $h[1] + \frac{5}{6}\underbrace{h[0]}_{1} + \frac{1}{6}\underbrace{h[-1]}_{0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{h[1] = -\frac{5}{6}}$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Άρα $h[0] = 1 \Leftrightarrow c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$

$h[1] = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = -\frac{5}{6}$

Λύνοντας,

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 3$$

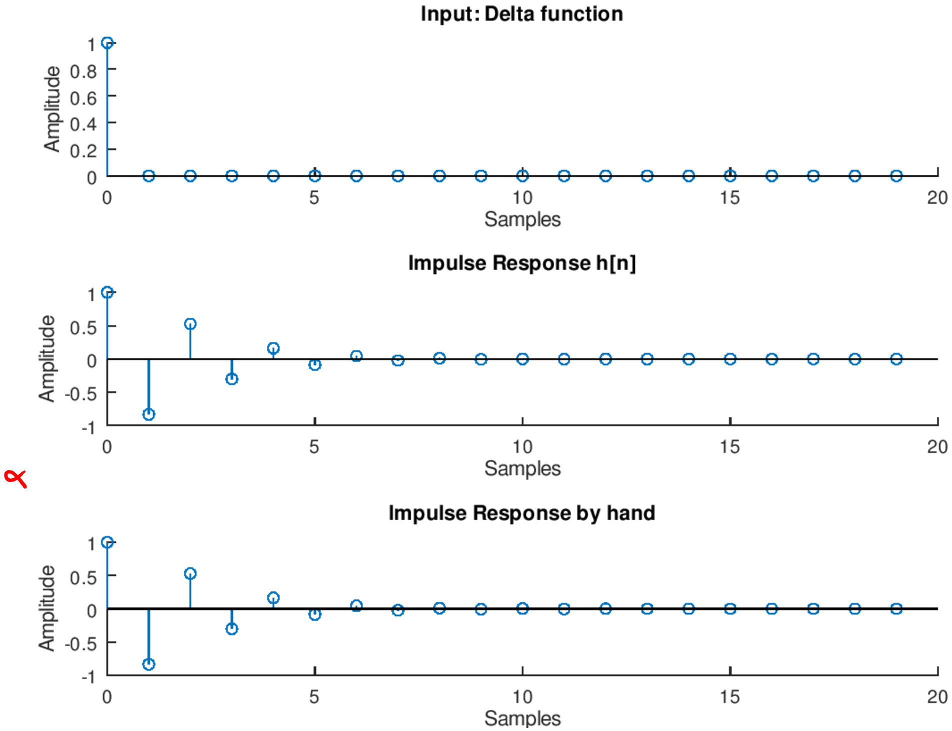
Άρα

$$h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$= \left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n].$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημά μας έχει στο δεξί μέλος μόνο $x[n]$, άρα δε χρειάζεται κάτι περισσότερο στην απάντησή μας.

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - MATLAB:




```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω;
N = 20;

% Αρχικοποίηση
h = zeros(1, N);

% "Ψευδοαρχικές" συνθήκες
h(1)  = 1;
h(2)  = -5/6;

% Είσοδος: συνάρτηση Δέλτα
x = [1, zeros(1,N-1)];

% Μετράω από n=3
for n=3:N
  h(n) = -5/6*h(n-1) - 1/6*h(n-2); % το x[n] δε χρειάζεται εδώ (είναι πάντα 0)
end

% Γραφήματα
figure; subplot(311);
stem(0:N-1, x); title('Input: Delta function');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

subplot(312); stem(0:N-1, h); title('Impulse Response h[n]');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

n = 0:N-1;
h_hand = -2*(-1/3).^n + 3*(-1/2).^n;
subplot(313); stem(n, h_hand); title('Impulse Response by hand');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');
```

$h[0]=1$, $h[1]=-5/6$ στη θεωρία

$\rightsquigarrow n=2$ στη θεωρία

↳ για $n>0$

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

  - Παρατηρήσεις:

1. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 2x[n]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 2h[n] = 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

2. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 4x[n] - 2x[n-2]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 4h[n] - 2h[n-2]$$

$$= 4\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] - 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]u[n-2]$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = \overbrace{x[n] + 2x[n-1]}^{!!}$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση.

Θεωρώ το απλούστερο σύστημα

$$S_b : \; y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] \longleftarrow \; !!$$

Θέτω $x[n] = \delta[n]$, άρα $y[n] = h_b[n]$ και θα είναι

$$h_b[n] + \frac{2}{3}h_b[n-1] + \frac{1}{9}h_b[n-2] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Χαρακτ. πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{9}$

$\longrightarrow$ εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{9} = 0 \xrightarrow{\text{ρίζες}} \gamma_1 = -\frac{1}{3}$, διπλή ρίζα! (πολλαπλότητα 2)

Άρα

$$h_b[n] = c_0\gamma_1^n + n c_1 \gamma_1^n, \quad n \geq 0$$

$$= c_0\left(-\frac{1}{3}\right)^n + n c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

Ισχύει $h_b[0] + \frac{2}{3}\cancel{h_b[-1]} + \frac{1}{3}\cancel{h_b[-2]} = \delta[0] = 1 \iff \boxed{h_b[0] = 1}$

και $h_b[1] + \frac{2}{3}\cancel{h_b[0]} + \frac{1}{9}\cancel{h_b[-1]} = \delta[1] = 0 \iff \boxed{h_b[1] = -\frac{2}{3}}$

Άρα $h_b[0] = c_0\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + 0\cdot c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1$

και $h_b[1] = c_0\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + 1\cdot c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow c_1 = 1$

Οπότε
$$h_b[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n + n\left(-\frac{1}{3}\right)^n = (n+1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \; n \geq 0$$
$$= \left[(n+1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

Όμως η κρουστική απόκριση του αρχικού συστήματος θα είναι:

$$h[n] = h_b[n] + 2h_b[n-1] =$$
$$= (n+1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1].$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ