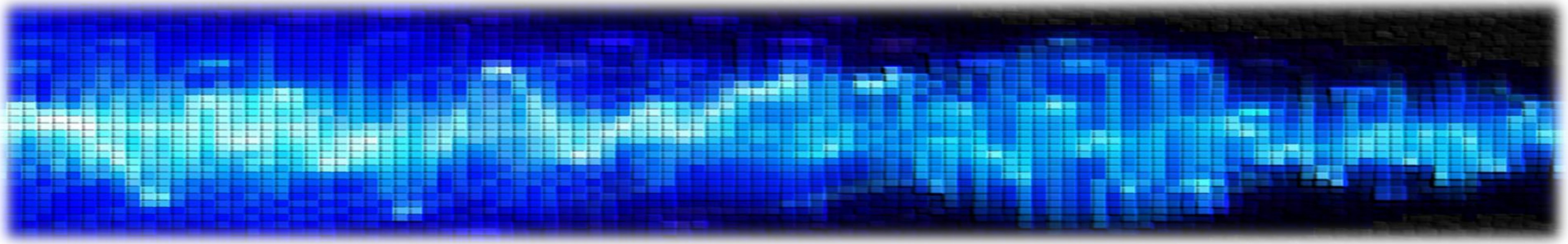
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 14Η



- Πόλοι και Μηδενικά
- Συστήματα στο χώρο του Ζ

Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών

- Γνωρίζουμε ήδη (διαισθητικά) τη σημασία των πόλων και των μηδενικών στο μετασχ. Z

- Η αναπαράσταση των πόλων και μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο συνιστά το **περίφημο διάγραμμα πόλων-μηδενικών**

- Ας μιλήσουμε λίγο περισσότερο για αυτό το διάγραμμα

- Έστω ότι έχουμε ένα ρητό μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ \dots + b_N z^{-N}} = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{z^M + a_1/a_0 z^{M-1} + \dots + a_M}{z^N + b_1/b_0 z^{N-1} + \dots + b_N}$$

- Παραγοντοποιώντας

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} \boxed{z^{N-M}} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - \xi_k)}{\prod_{l=1}^{N}(z - \psi_l)}$$

o ×

- Προφανώς, τα ξ_k, ψ_l είναι τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα
  - Είναι εμφανές ότι υπάρχουν M μηδενικά και N πόλοι

- Όμως υπάρχει και ο όρος z^{N-M}! Ας τον δούμε…

- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{l=1}^{N}(z-\psi_l)}$$

$N=5$
$M=3$ $\quad z^{5-3} = z^2$

- Αν $\mathrm{N} > \mathrm{M}$ τότε υπάρχουν επιπλέον N-M μηδενικά στο $z = 0$
- Αν $\mathrm{N} < \mathrm{M}$ τότε υπάρχουν επιπλέον M-N πόλοι στο $z = 0$

$M=5$
$N=3$ $\quad z^{3-5} = z^{-2} = \boxed{\frac{1}{z^2}}$

- Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Ζ έχει τον **ίδιο αριθμό πόλων και μηδενικών**!

- Αν τώρα

z^{-1}

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-\xi_k)}{\prod_{l=1}^{N}(z-\psi_l)} = \frac{a_0}{b_0} z^{M-N} \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-\frac{\xi_k}{z}\right)}{\prod_{l=1}^{N}\left(1-\frac{\psi_l}{z}\right)}$$

τότε

- Αν $\mathrm{N} > \mathrm{M}$, τότε $\lim_{z\to\infty} X(z) = 0$, οπότε υπάρχουν επιπλέον N-M μηδενικά στο $z = \infty$
- Αν $\mathrm{N} < \mathrm{M}$, τότε $\lim_{z\to\infty} X(z) = \infty$, οπότε υπάρχουν επιπλέον M-N πόλοι στο $z = \infty$

- Ξανά, **όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά**!

- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**
  - Παράδειγμα:
  - Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$M = 1$

$N = 2$

$\boxed{N > M}$

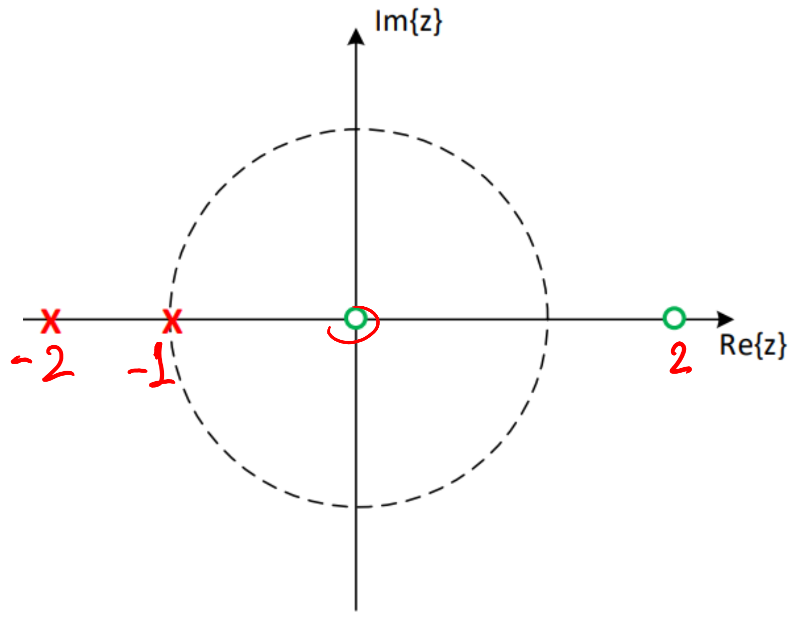
$$X(z) = \frac{z^{-1}(z-2)}{z^{-2}(z^2+3z+2)} = \frac{z(z-2)}{z^2+3z+2} = \frac{z(z-2)}{(z+1)(z+2)}$$

Πόλοι: $z_1 = -1$

$z_2 = -2$

Μηδενικά: $z_1 = 2$

$z_2 = 0$



- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$M = 2$

$N = 2$

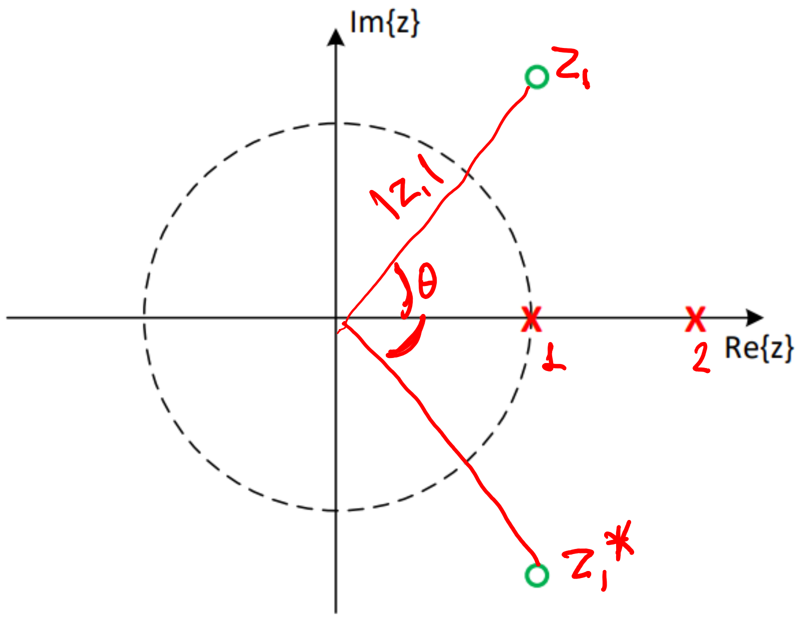
$$X(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2} = \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z-2)(z-1)}$$

όπου $z_1 = 1 + j\sqrt{2}$

Πόλοι: $z_1 = 2$, $z_2 = 1$

Μηδενικά: $z_1 = 1 + j\sqrt{2}$, $z_2 = 1 - j\sqrt{2}$

$$z_1^* = |z_1| \cdot e^{-j\theta}$$

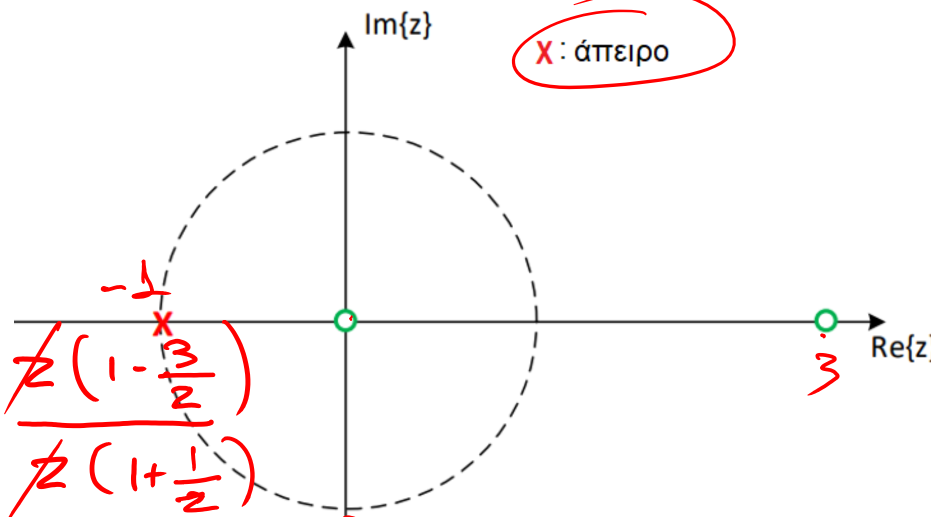


- **Διάγραμμα Πόλων – Μηδενικών**
  - Παράδειγμα:
    - Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z + 1}$$

$M = 2$

$N = 1$



$$X(z) = \frac{z(z-3)}{z+1}$$

Μηδενικά: $z_1 = 0$, $z_2 = 3$

Πόλοι: $z_1 = -1$, $z_2 = ?$

$$X(z) = z\,\frac{\cancel{z}\left(1 - \frac{3}{z}\right)}{\cancel{z}\left(1 + \frac{1}{z}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} z\,\frac{1 - 3/z}{1 + 1/z} = \infty$$

Άρα, υπάρχει ένας πόλος στο ∞

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Ορισμός:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- Στα πλαίσια των σημάτων και συστημάτων χρησιμοποιούνται εναλλακτικά τρεις τρόποι υπολογισμού του αντιστρόφου

1. Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρές
2. Τη μακρά διαίρεση
3. Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Θα επικεντρωθούμε μόνο στην τελευταία, καθώς σχετίζεται στενά με τα ΓΧΑ συστήματα και την ιδιότητα της συνέλιξης

- Για κάθε μέθοδο μπορείτε να δείτε τις σημειώσεις σας

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Η γενική μορφή ενός μετασχ. Z των σημάτων που είδαμε είναι

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

- Μπορούμε να διασπάσουμε το παραπάνω κλάσμα ως

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k\neq i}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{L} \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

όπου

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

$$C_m = \frac{1}{(L-m)!(-d_i)^{L-m}} \left\{ \frac{d^{L-m=L}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Ζ του

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}, \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

$M=2$

$N=2$

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$\begin{array}{l|l} 1+2z^{-1}+\cancel{z^{-2}} & 1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2} \\ \hline -2+3z^{-1}-\cancel{z^{-2}} & 2 \\ \hline -1+5z^{-1} & \end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = 2 + \frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = 2 + \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

$$A = \cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(\frac{-1+5z^{-1}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1-z^{-1}\right)}\right)\Bigg|_{z^{-1}=2} = \frac{-1+5z^{-1}}{1-z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1}=2} = -9$$

$$B = \frac{-1+5z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1}=1} = 8$$

$$X(z) = 2 + \frac{-9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ**
  - Παράδειγμα:

$$X(z) = 2 + \underbrace{\frac{-9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{\substack{\cdot\ |z|>\frac{1}{2} \\ \cdot\ |z|<\frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{8}{1-z^{-1}}}_{\substack{\cdot\ |z|>1 \\ \cdot\ |z|<1}} \quad , \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{2\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{8}{1-z^{-1}}\right\} =$$

$$= 2\cdot\delta[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 8\,u[-n-1]$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1, \ \forall z \\ -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-az^{-1}}, \\ \qquad |z|<|a| \end{array}\right.$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε τον αντίστροφο Μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{2}(1-z^{-1})}, \qquad |z|>1$$

$$X(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{C_1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{C_2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{4}{1-z^{-1}} + \frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

$$A = (1-z^{-1})X(z)\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\Big|_{z^{-1}=1} = 4$$

$$C_2 = \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z)\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{1-z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=2} = -1$$

$$C_1 = \frac{1}{(2-1)!\left(-\frac{1}{2}\right)^{(2-1)}} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{-1}} \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z)\Big|_{z^{-1}=2} = -\frac{2}{(1-z^{-1})^2}\Big|_{z^{-1}=2} = -2$$

$$= -2\frac{d}{dz^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} = -2\frac{\cancel{1'(1-z^{-1})}^{0} - 1(1-z^{-1})'}{(1-z^{-1})^2} = -2\frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ**
  - Παράδειγμα:

$$X(z) = \frac{4}{1-z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \qquad |z|>1$$

z^{-1}

- $|z|>1$
- $|z|<1$

- $|z|>\frac{1}{2}$
- $|z|<1/2$

- $|z|>\frac{1}{2}$
- $|z|<1/2$

$$a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

$$n a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}, \quad |z|>|a|$$

$$\boxed{x[n] = 4\,u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}\cdot 2z}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = 2z\,\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

$\rightarrow n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

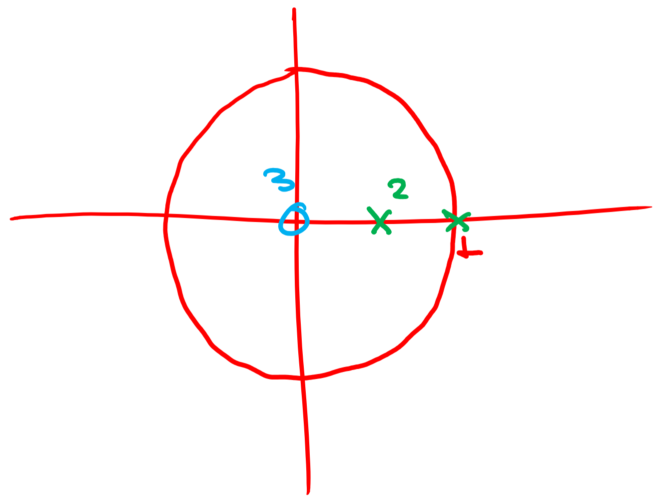
$\rightarrow (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z**
  - Παράδειγμα:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\left(z-1\right)}$$

Πόλοι: $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = 1$

Μηδενικά: $z_{1,2,3} = 0$



- Ο Μετασχ. Ζ είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αναπαράστασης σημάτων

- Η εμπειρία σας ως τώρα ίσως σας έχει αποκαλύψει τη χρήση του για ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων…
  - …μέσω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο → γινόμενο στο χώρο του Ζ

- Ας «πλεύσουμε» στο χώρο των συστημάτων με τον ίδιο τρόπο που κάναμε και στο Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ξεκινάμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης και ιδιοτιμής!
  - Μπορούμε να δείξουμε εύκολα (do it! ☺) ότι το σήμα $\boxed{x[n] = Az^{-n}}$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Η ιδιοτιμή του δίνεται από την εξίσωση

μοναδιαία απόκριση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

η οποία βλέπετε ότι αποτελεί το Μετασχ. Ζ της κρουστικής απόκρισης του ΓΧΑ συστήματος

- Ο μετασχ. Ζ της κρουστικής απόκρισης

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}}$$

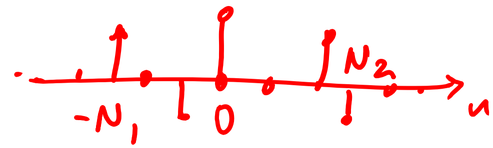
δε θα μπορούσε να μην έχει κι αυτός το δικό του όνομα: **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)**

- Η «έκδοση» του μετασχ. Ζ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα**, όπως ήδη γνωρίζετε

- Θα θυμάστε ίσως ότι τα ΓΧΑ συστήματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:

  - **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR)**
  - **Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR)**

- **FIR συστήματα**
- Περιγράφονται από την κρουστική απόκριση



$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k], \qquad N_1, N_2 > 0$$

$\delta[n] \xrightarrow{z} 1$

$\delta[n-k] \xrightarrow{z} z^{-k}$

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k}$$

- Βλέπετε ότι αποτελείται από θετικές και αρνητικές δυνάμεις του z
- Μπορούμε να το γράψουμε ως

$$H(z) = \frac{1}{z^{N_2}} \sum_{k=0}^{N_1+N_2} b_{k-N_1} z^{N_1+N_2-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} (z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρήστε ότι έχει N_2 πόλους στο $z = 0$ και N_1 πόλους στο άπειρο
  - ROC: $\{0 < |z| < \infty\}$

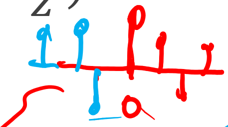
$N_1 + N_2$ πόλοι

- Επίσης έχει $N_1 + N_2$ μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

- **FIR συστήματα**

$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k]$

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2}(z - c_k)}{z^{N_2}} = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1+N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$



$\delta[n-n_0]$ -
$n_0 > 0$, $|z| > 0$
$n_0 < 0$, $|z| < \infty$

- Αν $N_1 = 0$, τότε έχουμε ένα αιτιατό FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{N_2}(z - c_k)}{z^{N_2}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_2 πόλους στο $z = 0$
  - ROC: $\{|z| > 0\}$
- Επίσης έχει N_2 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο
- Αν $N_2 = 0$, τότε έχουμε ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα

$$H(z) = \sum_{k=-N_1}^{0} b_k z^{-k} = b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} (z - c_k) = z^{N_1} b_{-N_1} \prod_{k=1}^{N_1} \left(1 - \frac{c_k}{z}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι έχει μόνο N_1 πόλους στο $z = \infty$
  - ROC: $\{|z| < \infty\}$
- Επίσης έχει N_1 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο

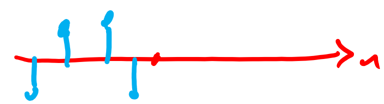
- **FIR συστήματα**

- **Συμπεράσματα**

  - Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$

$\delta[n-n_0] \rightarrow n_0 > 0, \ |z| > 0$

  - Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$



$\delta[n-n_0], \ n_0 < 0, \ |z| < \infty$

  - Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$

- **IIR συστήματα**
- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1-b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι

- Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$
- Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$
- Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

  - Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Ζ σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$$x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}$$

  - Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

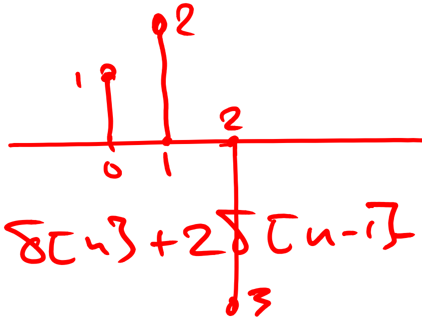
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

$$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z)$$

$$= X(z)\left(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}\right) \Rightarrow$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \rightarrow h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$$

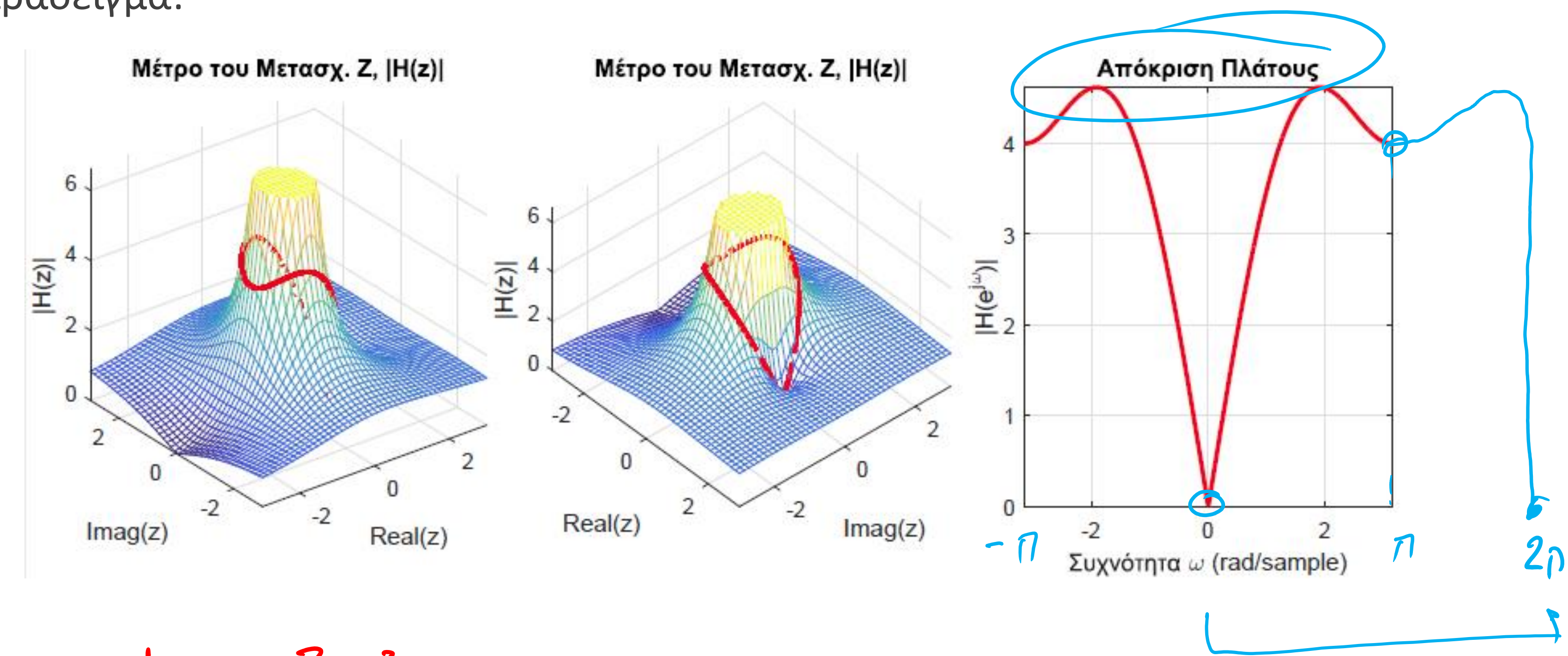
$$= \frac{(z+3)(z-1)}{z^2}$$

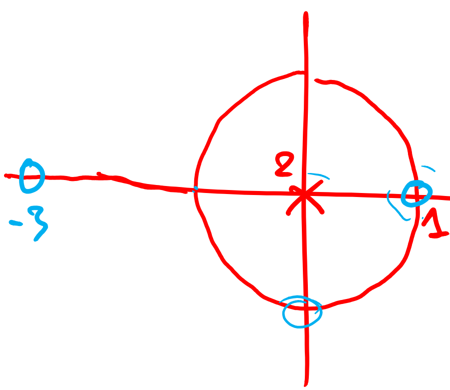
Άρα έχει: Μηδενικά $z_1 = -3$, $z_2 = 1$

Πόλοι $z_{1,2} = 0$

$|z| > 0$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:





$z_1 = -3$
$z_1 = 1$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ