

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 20<sup>Η</sup>

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

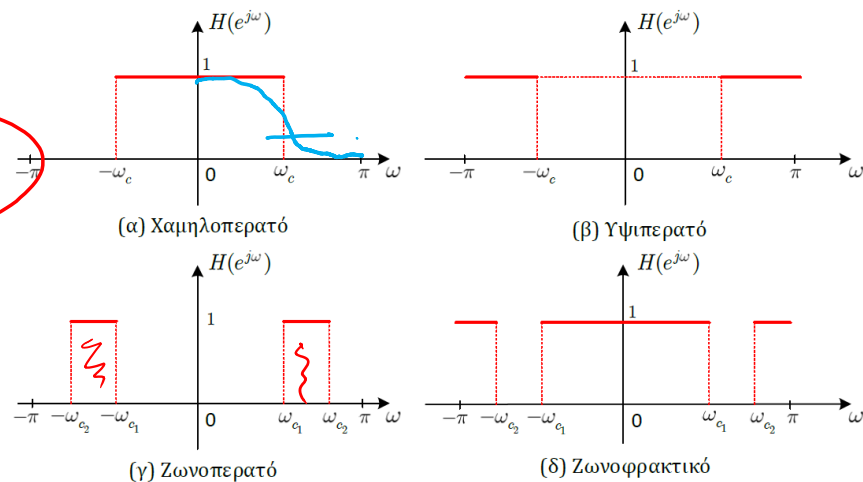
• Τα φίλτρα είναι μια πολύ σημαντική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων

• Έχουμε ήδη δει τα περίφημα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

- Περνούν συγκεκριμένες συχνότητες στην έξοδό τους
- Αποκόπτουν κάποιες άλλες

• Θα δώσουμε έμφαση στη σχεδίαση **αιτιατών** φίλτρων επιλογής συχνοτήτων (μη ιδανικών)

- Τα συμπεράσματα γενικεύονται και για μη αιτιατά φίλτρα



• Η σχεδίαση περιλαμβάνει τρία στάδια

1. Προδιαγραφές του συστήματος
2. Προσέγγιση προδιαγραφών από ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
3. Πραγματοποίηση του συστήματος σε υλικό ή λογισμικό

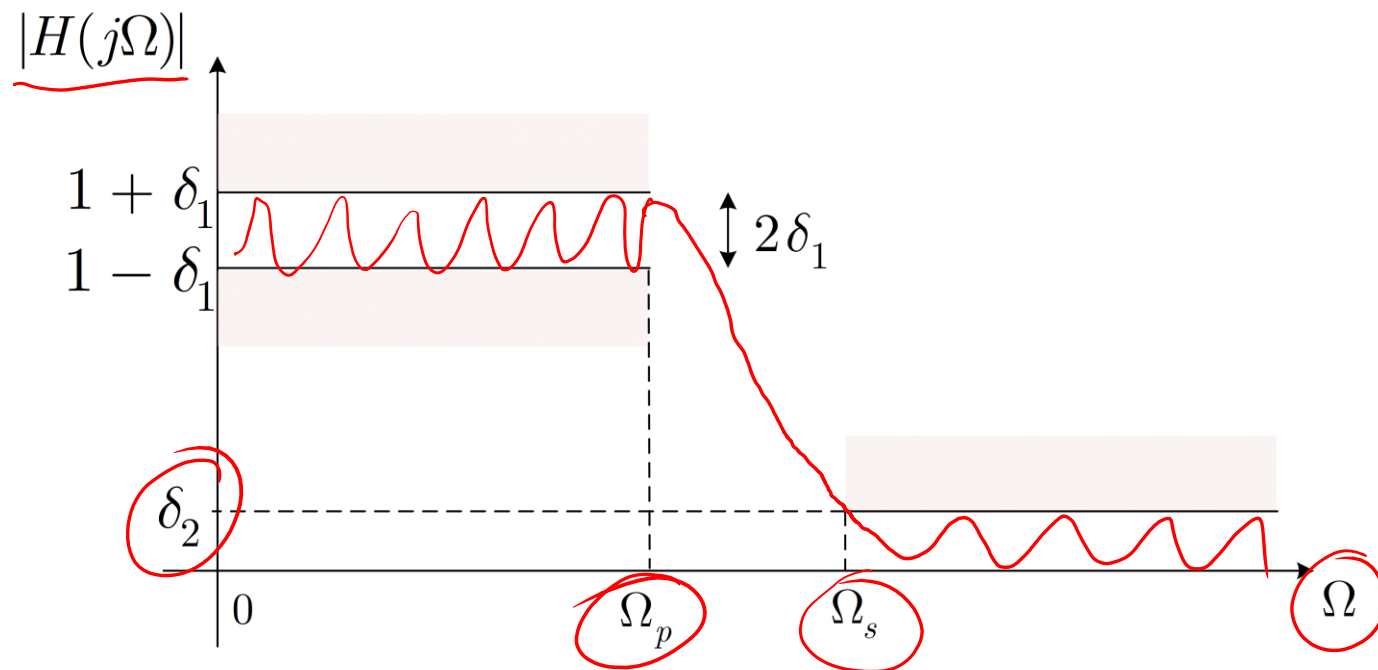
• Θα δώσουμε βάρος στο 1<sup>ο</sup> και στο 2<sup>ο</sup> βήμα

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Επειδή ο «αναλογικός» κόσμος προηγήθηκε αρκετά του «ψηφιακού» 😊 , υπάρχει συσσωρευμένη τεχνογνωσία για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων...
  - ... με την έννοια ότι αφορούν συστήματα συνεχούς χρόνου
- Μια ιδέα είναι να εκμεταλλευτούμε την τεχνογνωσία αυτή και να προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε ένα αναλογικό φίλτρο σε «ψηφιακό» (διακριτού χρόνου)
- Ας δούμε λοιπόν πρώτα πως θα γινόταν αυτή η διαδικασία στο συνεχή χρόνο
  - Δηλ. πώς θα σχεδιάζαμε ένα φίλτρο στο συνεχή χρόνο
- Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τις προδιαγραφές του στο χώρο της συχνότητας
- Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε μια γενική συνάρτηση στο χώρο της συχνότητας που τις ικανοποιεί
  - Θα λύσουμε κάποια συστήματα για να συγκεκριμενοποιήσουμε τη συνάρτηση αυτή
- Τέλος θα μετατρέψουμε το σύστημα στο χώρο του Laplace (! ∞ )

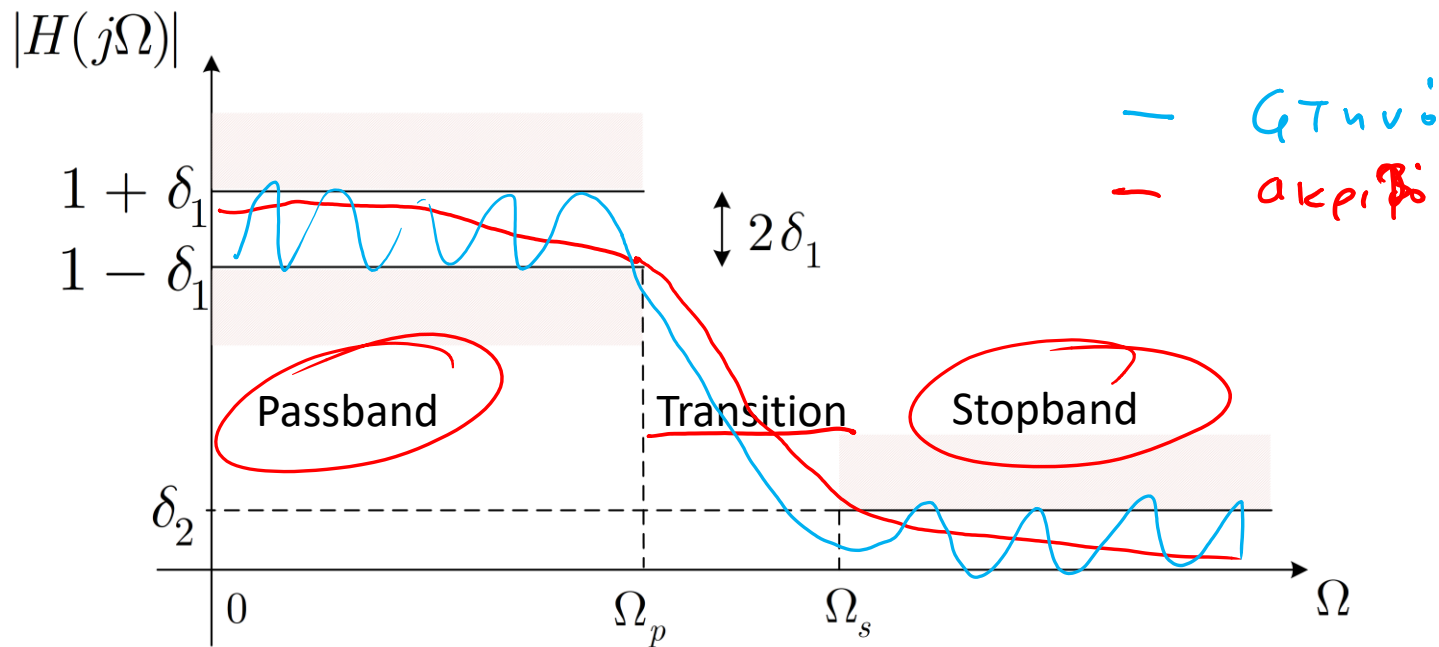
## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο στο συνεχή χρόνο
- Θα συμβολίσουμε τη συχνότητα που αντιστοιχεί στο συνεχή χρόνο με  $\Omega = 2\pi f$
- Ξεκινάμε με τις προδιαγραφές του φίλτρου



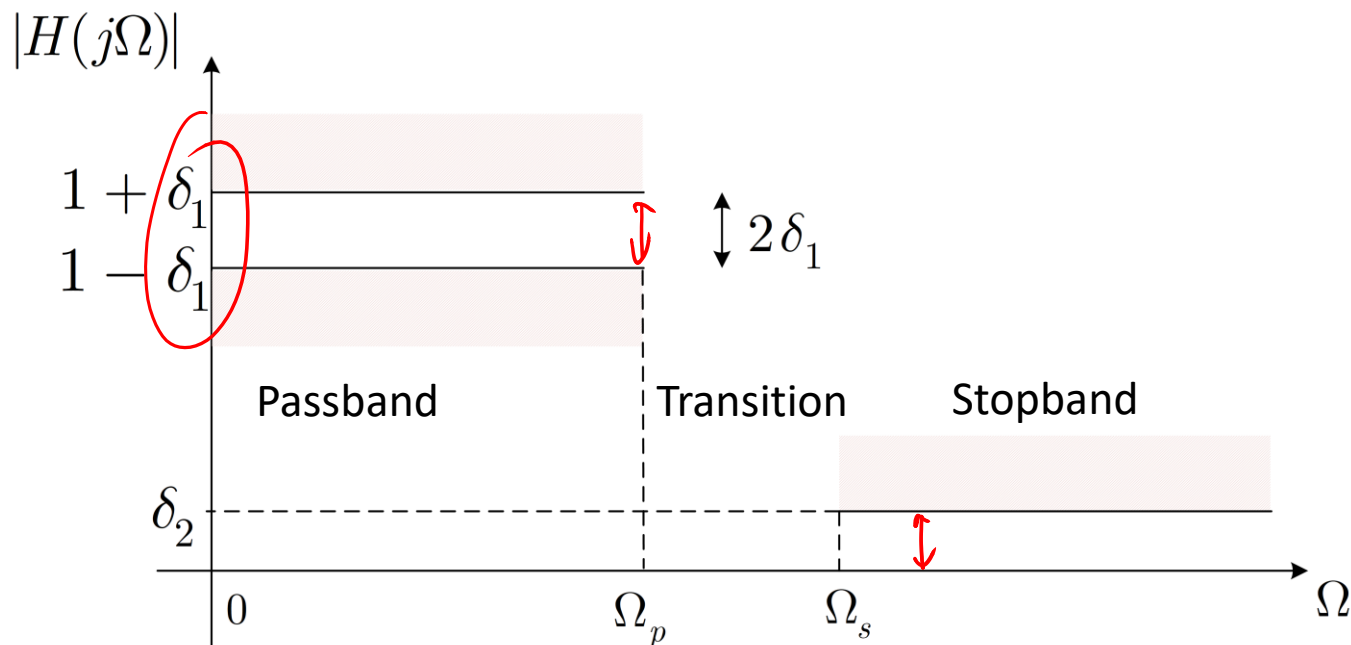
- $\Omega_p$ : pass-band cutoff frequency
- $\Omega_s$ : stop-band cutoff frequency

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



- $\Omega_p$ : pass-band cutoff frequency
- $\Omega_s$ : stop-band cutoff frequency
- Η ζώνη μεταξύ  $\Omega_p$  και  $\Omega_s$  ονομάζεται μεταβατική ζώνη (transition band)
- $\delta_1, \delta_2$  είναι κι αυτά προδιαγραφές του φίλτρου
- Παρατηρήστε ότι αφήνουμε «περιθώριο»  $\delta_1$  εκατέρωθεν της μονάδας γιατί δε γίνεται να κατασκευάσουμε ιδανικά φίλτρα (όμοια για το  $\delta_2$ )

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



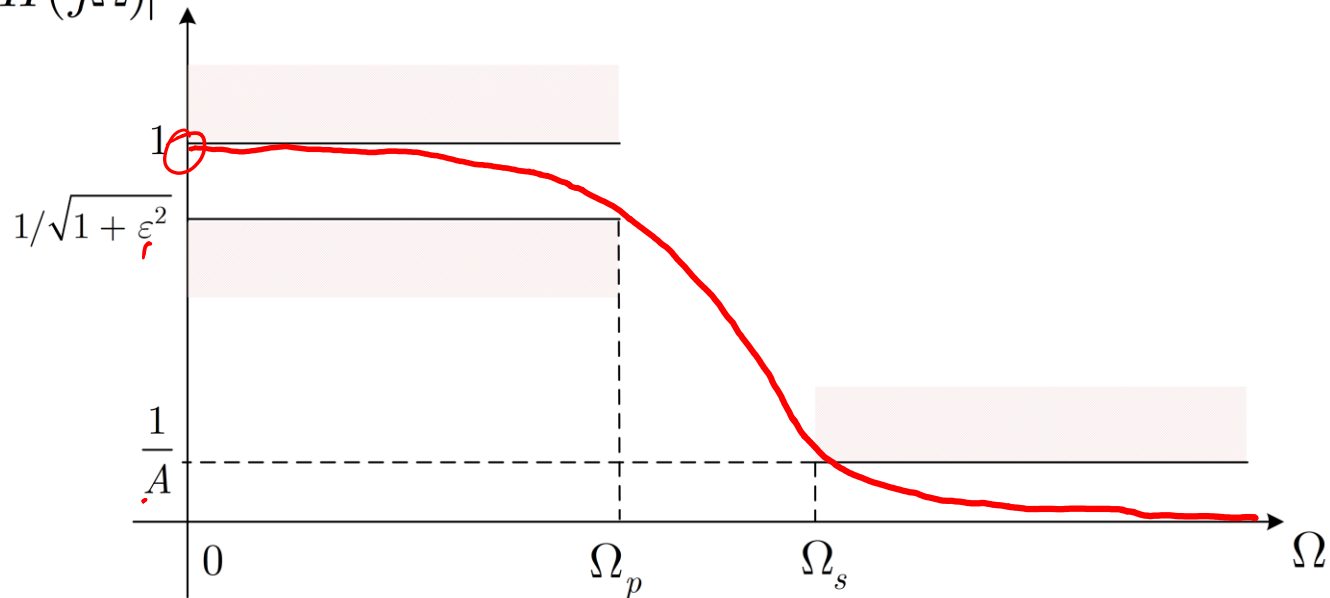
$$10^{-2} \quad 10 \log_{10} 10^{-2} = -20 \text{ dB}$$

- Έστω ότι  $\delta_1 = 0.01$ , άρα  $1 + \delta_1 = 1.01$  και  $1 - \delta_1 = 0.99$
- Επίσης, έστω ότι  $\delta_2 = 10^{-3}$
- Αυτές είναι οι προδιαγραφές μας, μαζί με επιλογή για τις  $\Omega_p, \Omega_s$
- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική σημειογραφία για τις προδιαγραφές

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε μια λίγο διαφορετική μορφή προδιαγραφών

$$|H(j\Omega)|$$



- Θέλουμε το φίλτρο μας να ξεκινά από τη μονάδα για  $\Omega = 0$  και να πέφτει πολύ λίγο ως τη pass-band cutoff frequency

- Στη stop-band cutoff frequency, η απόκριση πλάτους θέλουμε να έχει (μικρή) τιμή  $\frac{1}{A}$

- Μπορούμε να ψάξουμε για μια απόκριση πλάτους (συνάρτηση) που να είναι μονότονη

- Ζητάμε λοιπόν μια εξίσωση που να μπορεί να δεχθεί τις προδιαγραφές μας! 😊

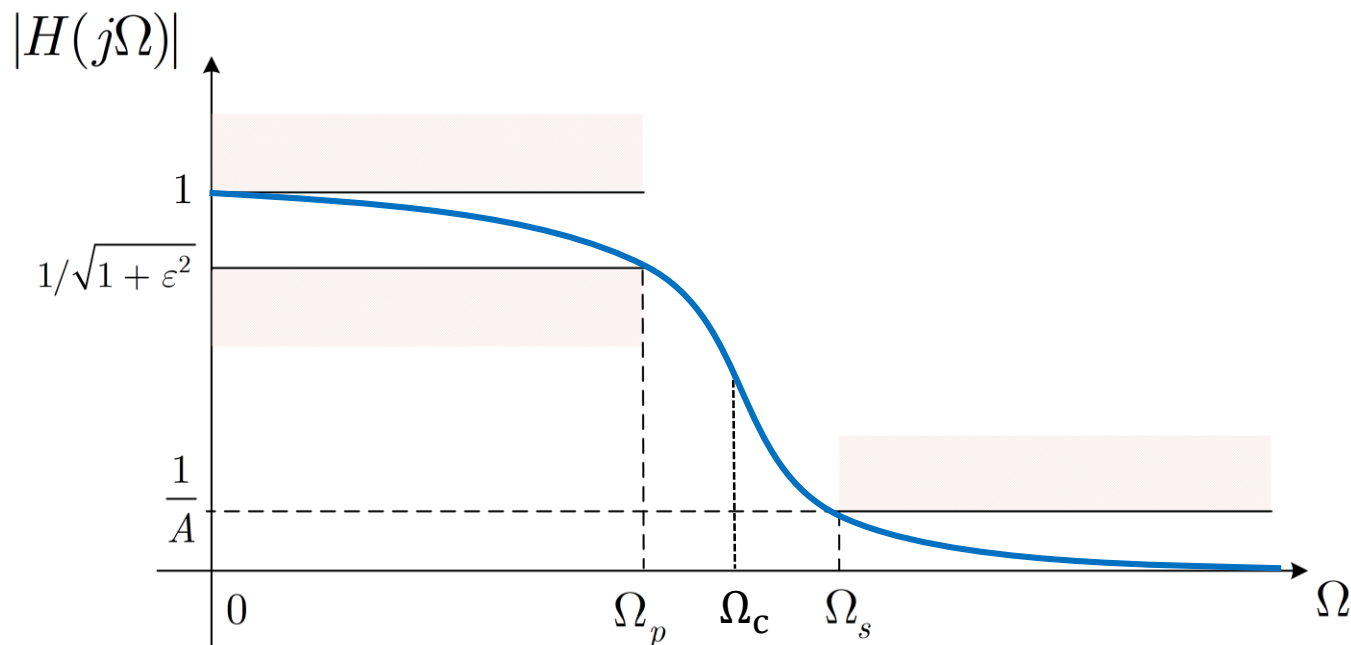
## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Το περίφημο φίλτρο Butterworth είναι μονότονο και δίνεται από τη σχέση

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

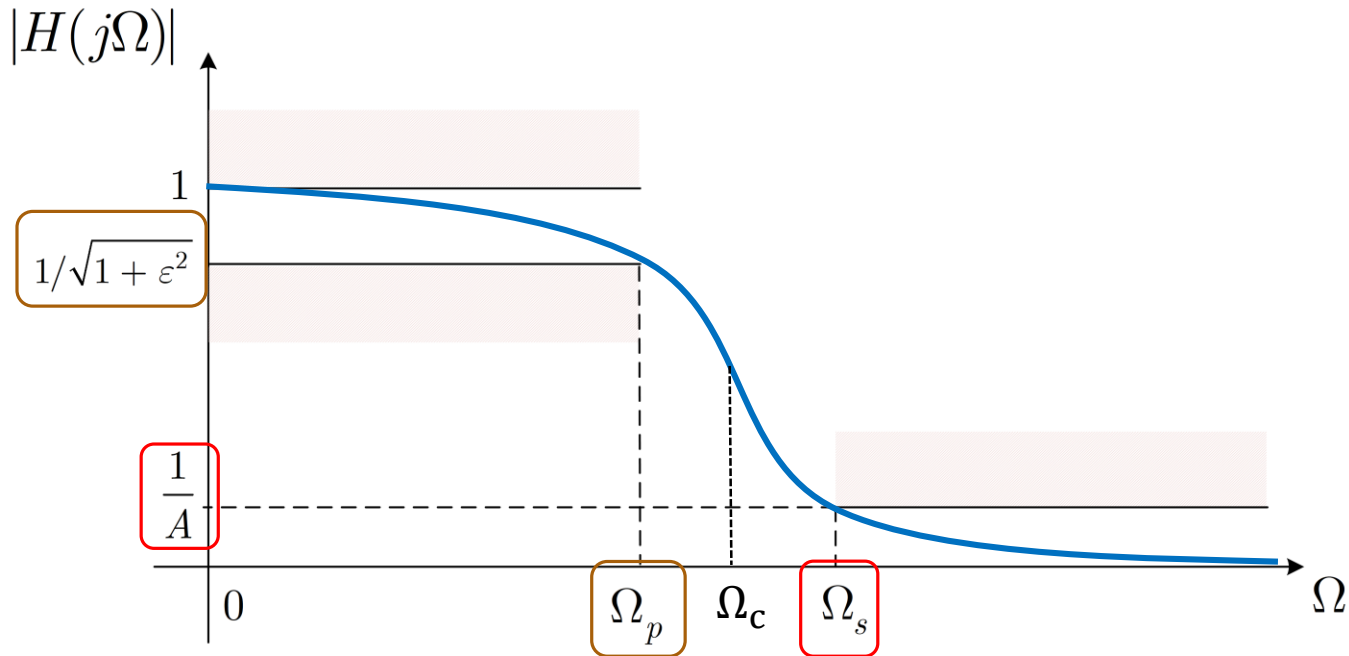
με  $\Omega_c$  τη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου και  $N$  την τάξη του φίλτρου

- Ζητάμε τα  $\Omega_c, N$  που να ικανοποιούν τις προδιαγραφές μας:  $A, \varepsilon, \Omega_p, \Omega_s$





- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων



- Θέλουμε

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

- Έχουμε ένα 2x2 σύστημα ως προς  $N, \Omega_c$

- Αν (για ευκολία) θέσουμε  $\kappa = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$  και  $\kappa_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$ , τότε λύνοντας ως προς  $N$ :

$$N = \frac{\log\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)}{\log\left(\frac{1}{\kappa}\right)}$$

- Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απαραίτητα ακέραιος αριθμός!

- Επιλέγουμε το άνω ακέραιο μέρος (αν  $N=5.36 \rightarrow N=6$ )

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

① ✓

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

②

• Για  $N = 6$ , βρίσκουμε το  $\Omega_c$  και έχουμε την πλήρη μορφή του φίλτρου Butterworth που ικανοποιεί τις προδιαγραφές μας!

• Όμως το φίλτρο είναι της μορφής  $|H(j\Omega)|^2$ , εμείς θέλουμε την απόκριση πλάτους

• Έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

$s = \sigma + j\omega$   
 $\sigma = 0$

• Άρα

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Το σύστημα γράφεται ως

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

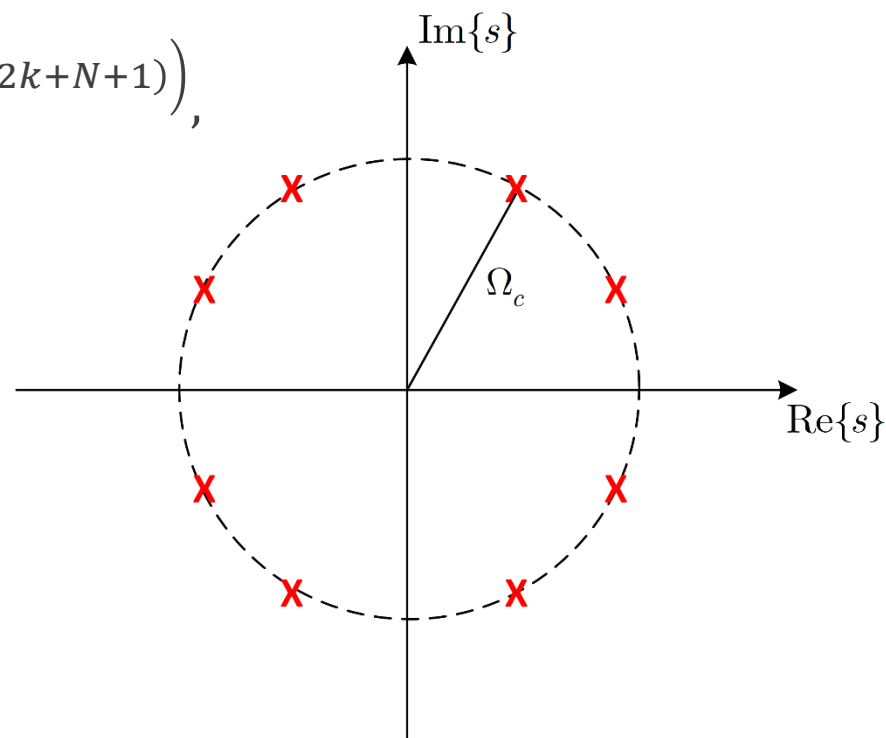
κι έχει μόνο πόλους στο μιγαδικό επίπεδο!

- Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)\right)},$$

με  $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$

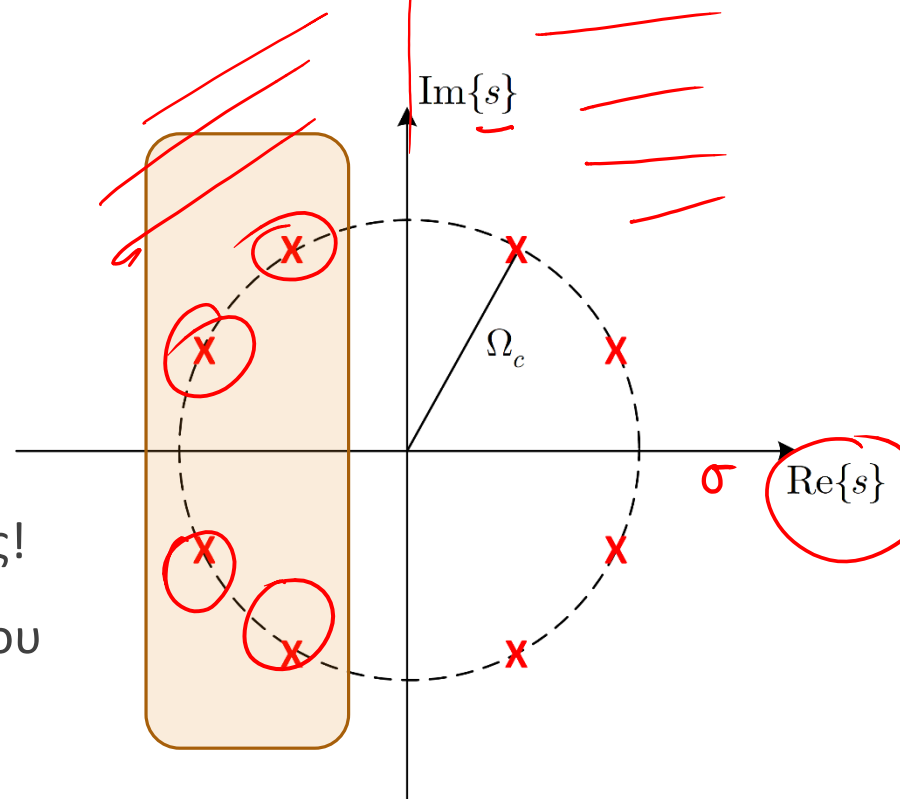
- Οι πόλοι βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας  $\Omega_c$ !



## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους που αντιστοιχούν στο  $H(s)$
- Θέλουμε φυσικά ένα σύστημα που να είναι ευσταθές και αιτιατό
- Για να είναι τέτοιο, πρέπει οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο
- Έτσι, ξέρουμε τους πόλους και τη συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$ !

$$H(s) = \Omega_c^N \prod_{k: \operatorname{Re}\{s_k\} < 0} \frac{1}{(s - s_k)}$$



- Οπότε υπολογίσαμε το σύστημα συνεχούς χρόνου με βάση κάποιες προδιαγραφές
- Μα εμάς μας ενδιαφέρει ο διακριτός χρόνος!
- Μπορούμε να φέρουμε το  $H(s)$  στο χώρο του μετασχ. Z??? 😊

$\hookrightarrow H(z)$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Μπορούμε να φέρουμε το  $H(s)$  στο χώρο του μετασχ. Z ???
- ΝΑΙ! 😊
- Και μάλιστα με δυο διαφορετικές μεθόδους

### • Μέθοδος Impulse Invariance

- a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης  $h(t)$  συνεχούς χρόνου

$$H(s) \rightarrow h(t) \rightarrow \sum_n \delta(t - nT_d)$$

### • Μέθοδος Bilinear Transformation

- a.k.a «συμπίεση» του άξονα  $0 \leq \Omega \leq +\infty$  στο  $0 \leq \omega \leq \pi$  !!

- Ας τις δούμε μια-μια...

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Έστω ότι έχουμε μια κρουστική απόκριση  $h(t)$  η οποία περιγράφει ένα επιθυμητό σύστημα στο συνεχή χρόνο
- Αν τη δειγματοληπτήσουμε με περίοδο  $T_d$  τότε παίρνουμε ένα δειγματοληπτημένο σήμα

$$h(nT_d) = h(t) \Big|_{t=nT_d}$$

$$\leftrightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j(\Omega - k\Omega_d))$$

$$T_d = \frac{1}{f_d}$$

$$\Omega_d = 2\pi f_d$$

$$= \frac{2\pi}{T_d}$$

- Αυτή είναι μια έκφραση του μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου με όρους μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου! 😊
- Ξέρουμε ότι κατά τη δειγματοληψία

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_d} = \frac{\Omega}{f_d} = \Omega T_d \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

Το ίδιο ακριβώς!

- Άρα

$$h[n] = T_d h(nT_d) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} - k \frac{2\pi}{T_d}\right)\right)$$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Βήμα 1: Ορίζουμε προδιαγραφές για το φίλτρο μας στον «ψηφιακό» χώρο
- Βήμα 2: Μετατρέπουμε τις προδιαγραφές στον «αναλογικό» χώρο συχνοτήτων

$$\Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

- Βήμα 3: Βρίσκουμε το σύστημα  $H(s)$  που αντιστοιχεί στις προδιαγραφές μας: έστω ότι

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \leftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k$$

- Βήμα 4: Δειγματοληπούμε την κρουστική απόκριση  $h(t)$  :

$$t = nT_d$$

$$h[n] = T_d h(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT_d} u(nT_d) = T_d \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T_d})^n u[n]$$

- Βήμα 5: Εφαρμόζουμε μετασχ. Z στην κρουστική απόκριση  $h[n]$  :

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

$$A a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{A}{1 - az^{-1}}$$



## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k T_d}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

• Παρατηρήστε ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση των πόλων στο χώρο του Laplace με το χώρο του Z

• Ξεκάθαρα, κάθε πόλος  $s_k$  αντιστοιχεί σε έναν πόλο  $e^{s_k T_d}$ !!!

• Είναι

$$z_k = e^{s_k T_d} = e^{(\sigma_k + j\Omega_k) T_d} = e^{\sigma_k T_d} e^{j\Omega_k T_d} = \underbrace{e^{\sigma_k T_d}}_{\omega_k} \underbrace{e^{j\omega_k}}_{\omega = \underline{\sigma} \cdot T_d}$$

• Παρατηρήστε ότι:

Αν  $\sigma_k > 0$ , τότε  $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| > 1$

Αν  $\sigma_k = 0$ , τότε  $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| = 1$

Αν  $\sigma_k < 0$ , τότε  $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| < 1$

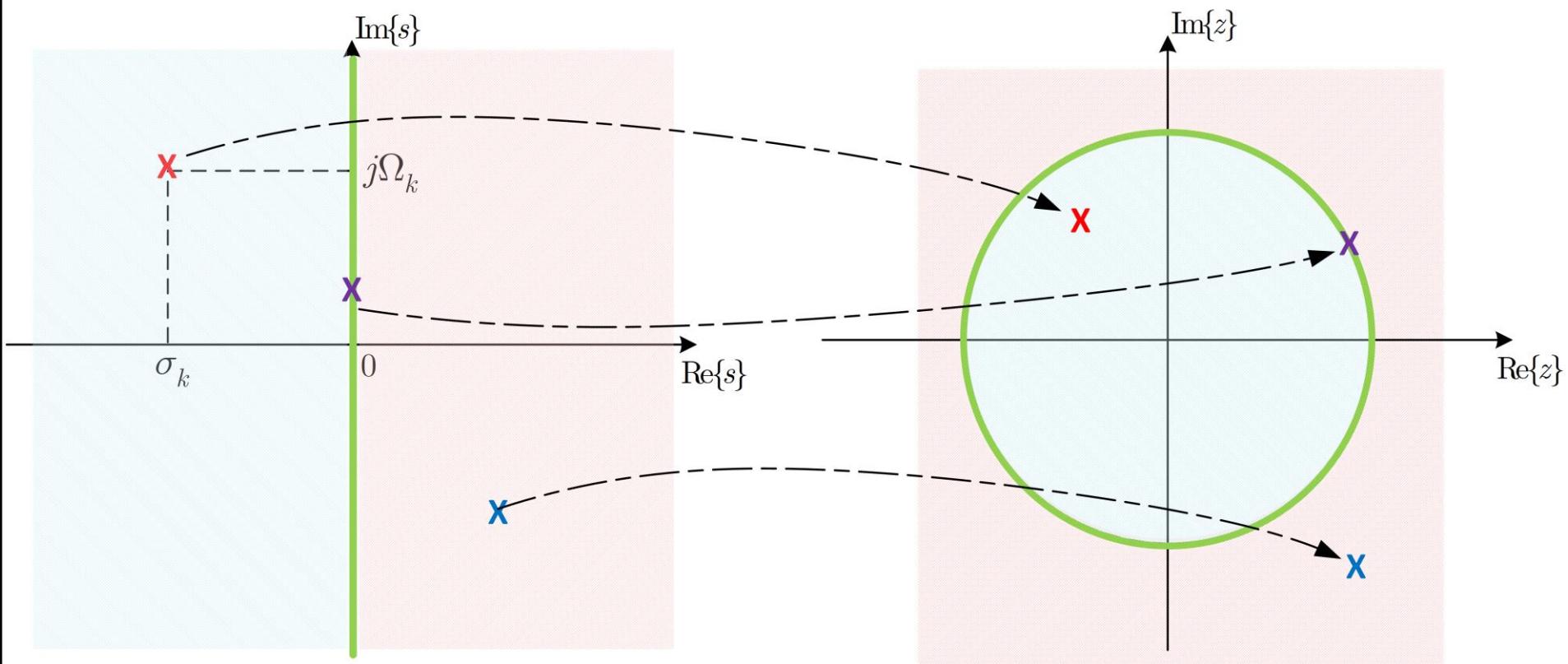
εκτός του κύκλου  
πάνω στον μον. κύκλο  
εντός του μον. κύκλου

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

☐ Αν  $\sigma_k > 0$ , τότε  $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| > 1$

☐ Αν  $\sigma_k = 0$ , τότε  $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| = 1$

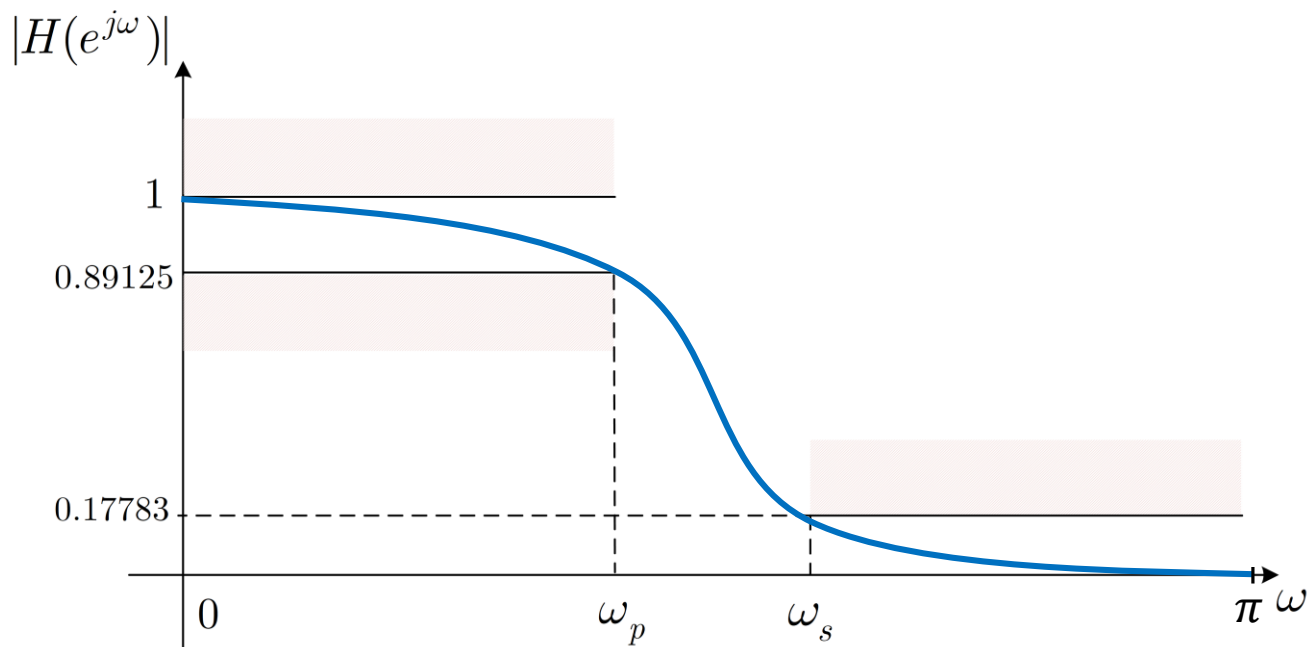
☐ Αν  $\sigma_k < 0$ , τότε  $|z_k| = |e^{\sigma_k T_d}| < 1$



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε ένα φίλτρο όπως στο σχήμα - ας πούμε ένα lowpass Butterworth



με  $\omega_p = 0.2\pi$ ,  $\omega_s = 0.3\pi$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

### • Προδιαγραφές:

$$\left. \begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \right\}$$

### • Μπορεί κανείς να δείξει ότι η παράμετρος $T_d$ δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση

- Θέτουμε  $T_d = 1$  (δείτε το παράρτημα στο τέλος της διάλεξης)

### • Μετατρέπουμε τις «ψηφιακές» συχνότητες σε «αναλογικές»: $\Omega = \frac{\omega}{T_d} = \omega$

- $\Omega_p = 0.2\pi$ ,  $\Omega_s = 0.3\pi$

### • Οι προδιαγραφές γίνονται

$$\left. \begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(j\Omega)| \leq 1 : 0 \leq \Omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(j\Omega)| : 0.3\pi \leq \Omega \leq \pi \end{aligned} \right\}$$

### • Οι προδιαγραφές γράφονται

$$\begin{aligned} 0.89125 &= |H(j\Omega_p)| = |H(j0.2\pi)| \\ 0.17783 &= |H(j\Omega_s)| = |H(j0.3\pi)| \end{aligned}$$



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Αντικαθιστώντας την εξίσωση του φίλτρου Butterworth και λύνοντας το 2x2 σύστημα καταλήγουμε στο  $N = 5.8858$ ,  $\Omega_c = 0.70474$

- Θέλουμε ακέραιο  $N \Rightarrow N = 6$

- Υπολογίζουμε ξανά τη συχνότητα  $\Omega_c = 0.7032$  για  $N = 6$

- Με αυτά τα νούμερα μπορούμε να δείξουμε ότι οι προδιαγραφές μας ικανοποιούνται ακριβώς στη μια συχνότητα ( $\Omega_p$  ή  $\Omega_s$ ) ενώ υπερκαλυπτόμαστε στην άλλη ( $\Omega_p$  ή  $\Omega_s$ )!

- Χρειάζεται να βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  ενός αιτιατού και ευσταθούς συστήματος

- Ξανά

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.7032}\right)^{12}} = \frac{(j0.7032)^{12}}{s^{12} + (j0.7032)^{12}}$$

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032 e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

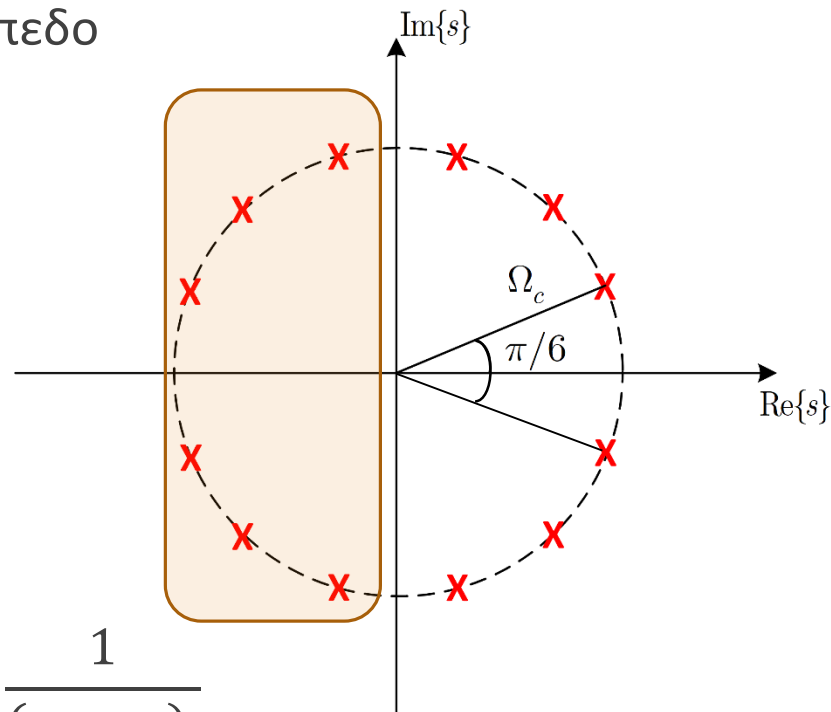
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = 0.7032e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0,1,2, \dots, 11$$

- Κρατούμε μόνο αυτούς στο αριστερό ημιεπίπεδο

- Δίνουν ευσταθές και αιτιατό σύστημα



- Το σύστημα δίνεται ως

$$H(s) = \Omega_c^6 \prod_{k=1}^6 \frac{1}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.36s + 0.49)(s^2 + 0.99s + 0.49)(s^2 + 1.35s + 0.49)}$$

$$= \sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{(s - s_k)}$$

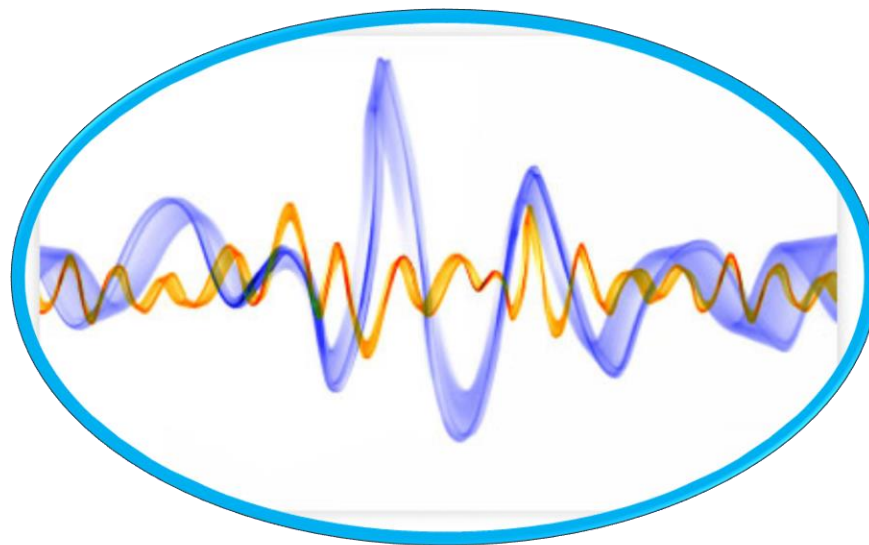
- Για κάθε όρο  $\frac{A_k}{s - s_k}$  βάζουμε έναν όρο  $\frac{A_k}{1 - e^{s_k}z^{-1}}$  στο χώρο του Z

$$H(z) = \frac{0.28 - 0.44z^{-1}}{1 - 1.29z^{-1} + 0.69z^{-2}} + \frac{-2.14 + 1.14z^{-1}}{1 - 1.06z^{-1} + 0.36z^{-2}} + \frac{1.85 - 0.63z^{-1}}{1 - 0.99z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

- Προσέξτε ότι δεν κάναμε ρητά δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης συνεχούς χρόνου! Ούτε καν την υπολογίσαμε!
- Ξέρουμε ότι η μέθοδος απλά κάνει pole mapping  $s_k \rightarrow e^{s_k}$ !

# Παράρτημα

(σχετικά με την παράμετρο  $T_d$ )

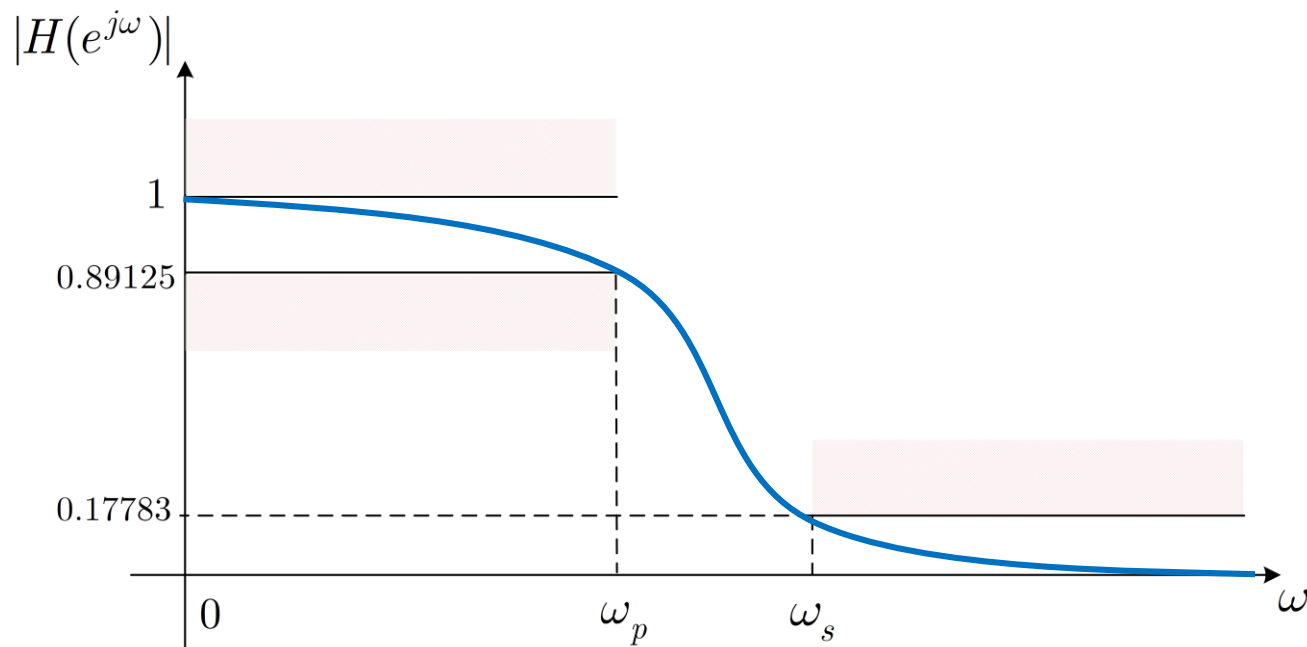




- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Ας δούμε ένα πλήρες παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε ένα φίλτρο όπως στο σχήμα - ας πούμε ένα lowpass Butterworth



με  $\omega_p = 0.2\pi$ ,  $\omega_s = 0.3\pi$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

### • Προδιαγραφές:

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 & : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \\ 0.17783 &\geq |H(e^{j\omega})| & : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

### • Μετατρέπουμε τις «ψηφιακές» συχνότητες σε «αναλογικές»: $\Omega = \frac{\omega}{T_d}$

$$\bullet \Omega_p = \frac{0.2\pi}{T_d}, \Omega_s = \frac{0.3\pi}{T_d}$$

### • Οι προδιαγραφές γίνονται

$$\begin{aligned} 0.89125 &\leq |H(j\Omega)| \leq 1 & : 0 \leq \Omega \leq \frac{0.2\pi}{T_d} \\ 0.17783 &\geq |H(j\Omega)| & : \frac{0.3\pi}{T_d} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T_d} \end{aligned}$$

### • Οι προδιαγραφές γράφονται

$$\begin{aligned} (0.89125)^2 &= |H(j\Omega_p)|^2 = \left| H\left(\frac{j0.2\pi}{T_d}\right) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}} \\ (0.17783)^2 &= |H(j\Omega_s)|^2 = \left| H\left(\frac{j0.3\pi}{T_d}\right) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}} \end{aligned}$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Αντικαθιστώντας την εξίσωση του φίλτρου Butterworth και λύνοντας το 2x2 σύστημα καταλήγουμε στο  $N = 5.8858, \Omega_c T_d = 0.70474$

- Θέλουμε ακέραιο  $N \Rightarrow N = 6$

- Υπολογίζουμε ξανά το  $\Omega_c T_d = 0.7032 \Rightarrow \Omega_c = \frac{0.7032}{T_d}$

- Χρειάζεται να βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  ενός αιτιατού και ευσταθούς συστήματος

- Ξανά

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left( \frac{s}{j \frac{0.7032}{T_d}} \right)^{12}}$$

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

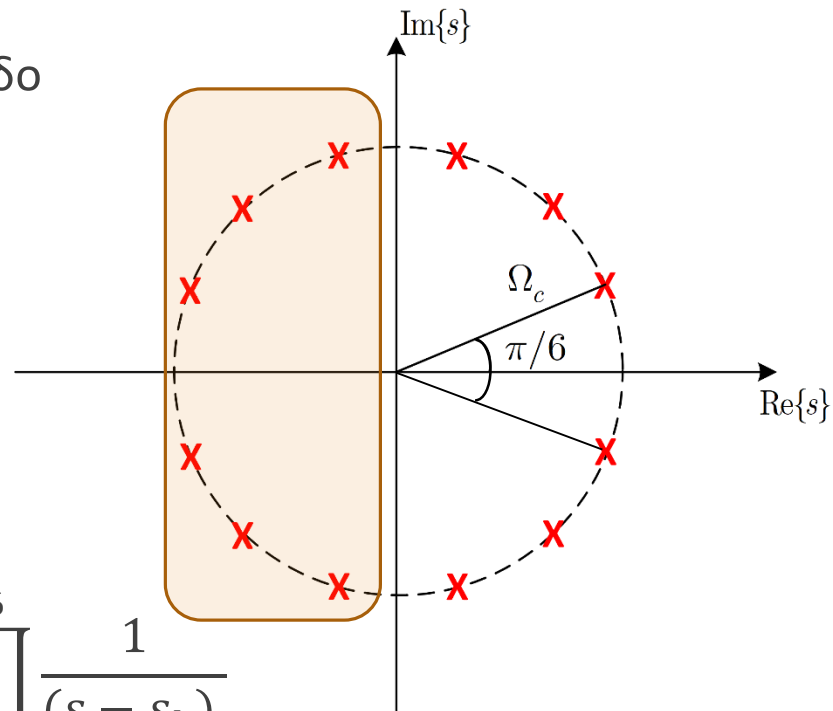
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

- Οι πόλοι του συστήματος είναι

$$s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11$$

- Κρατούμε μόνο αυτούς στο αριστερό ημιεπίπεδο

- Δίνουν ευσταθές και αιτιατό σύστημα



- Το σύστημα δίνεται ως

$$H(s) = \left(\frac{\Omega_c}{T_d}\right)^6 \prod_{k=1}^6 \frac{1}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = \frac{\left(\frac{0.7032}{T_d}\right)^6}{\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j7\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j9\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j11\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j13\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j15\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j17\pi}{12}}\right)}$$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Impulse Invariance Method

$$H(s) = \frac{\left(\frac{0.7032}{T_d}\right)^6}{\left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j7\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j9\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j11\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j13\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j15\pi}{12}}\right) \left(s - \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j17\pi}{12}}\right)}$$

• Μερικά κλάσματα: για κάθε όρο  $\frac{A_k}{s-s_k}$  βάζουμε ένα όρο  $\frac{A_k T_d}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}}$  στο χώρο του Z

• Βλέπετε ότι οι πόλοι  $s_k = \frac{0.7032}{T_d} e^{\frac{j\pi}{12}(2k+5)}$ ,  $k = 1, \dots, 6$  πολλαπλασιάζονται με  $T_d$  όταν μεταφέρονται στο χώρο του Z

• Άρα η τιμή του  $T_d$  δεν έχει σημασία!

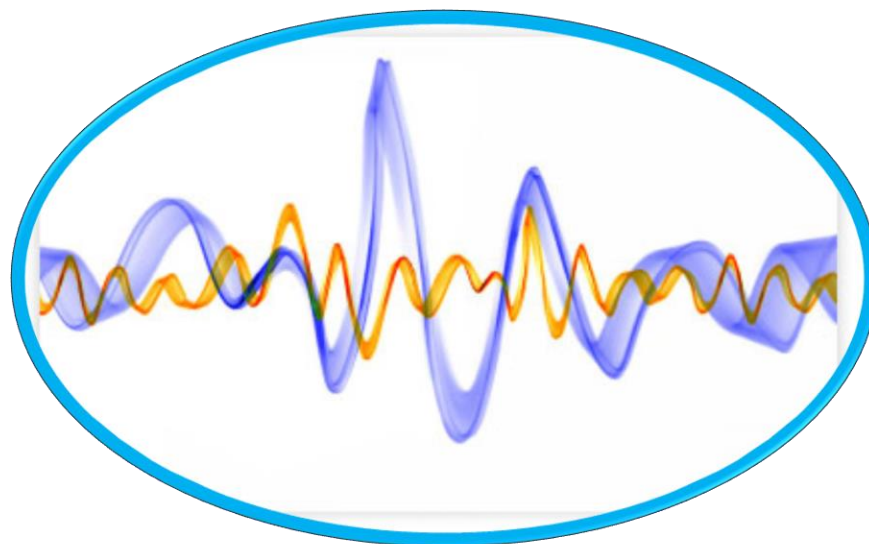
• Άρα

$$H(z) = \frac{0.28 - 0.44z^{-1}}{1 - 1.29z^{-1} + 0.69z^{-2}} + \frac{-2.14 + 1.14z^{-1}}{1 - 1.06z^{-1} + 0.36z^{-2}} + \frac{1.85 - 0.63z^{-1}}{1 - 0.99z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

• Προσέξτε ότι δεν κάναμε ρητά δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης συνεχούς χρόνου! Ούτε καν την υπολογίσαμε!

• Ξέρουμε ότι η μέθοδος απλά κάνει pole mapping  $s_k \rightarrow e^{s_k T_d}$ !

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



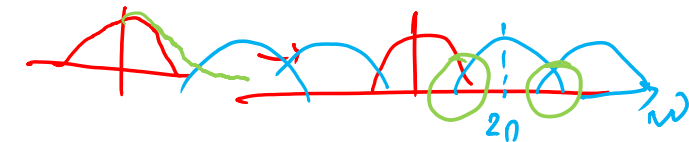
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 21<sup>Η</sup>

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Έχουμε ήδη δει μια μέθοδο σχεδίασης ψηφιακών-από-αναλογικά φίλτρα
  - Τη Μέθοδο Impulse Invariance



- Ποιο είναι το βασικό πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο?

- Ότι το αναλογικό φίλτρο δεν είναι band-limited

- Δεν «ζει» μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων γύρω από το μηδέν

- Θυμηθείτε την ιδιότητα της κλιμάκωσης στο χρόνο για το μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου

- «Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, τότε είναι άπειρης διάρκειας στη συχνότητα, και το αντίστροφο»

- Η ιδιότητα αυτή μας λέει ότι ένα πεπερασμένης διάρκειας σήμα στο συνεχή χρόνο (όπως είναι όλα τα σήματα «εκεί έξω» 😊) θα έχει άπειρου πλήθους μη μηδενικές συχνότητες, δηλ. ΔΕ θα είναι band-limited

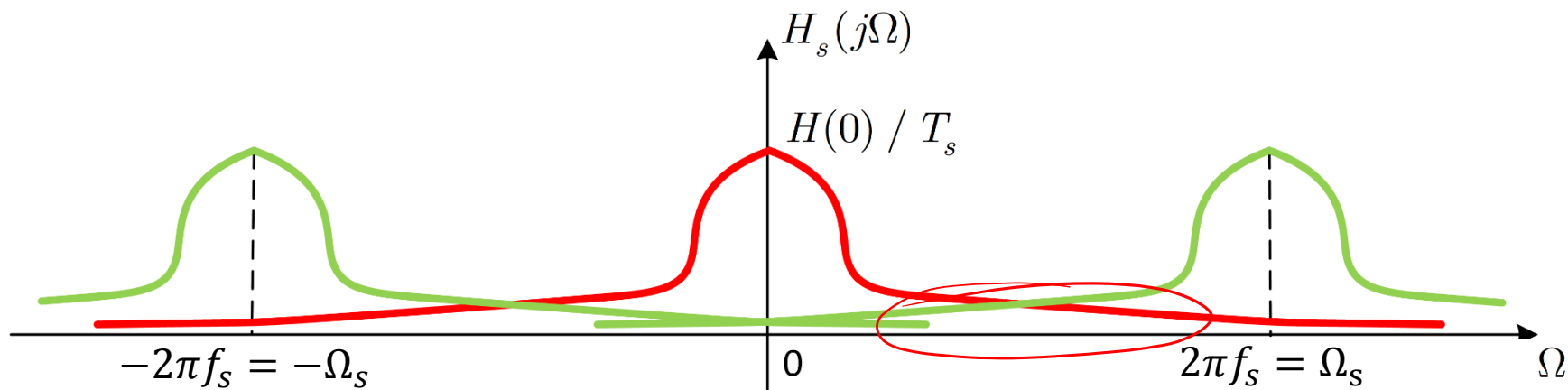
- Άρα κατά τη δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης, θα υπάρχει πάντα το φαινόμενο του aliasing!

- Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος ανά  $k\Omega_s$  θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!



## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Οι «ρέπλικες» του κεντρικού φάσματος θα έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους!



- Η τεχνική που θα συζητήσουμε στη συνέχεια αποφεύγει το πρόβλημα του aliasing χρησιμοποιώντας έναν αλγεβρικό μετασχηματισμό μεταξύ των μεταβλητών  $s$  και  $z$
- Τι ακριβώς κάνει αυτός ο μετασχηματισμός?
- Προσπαθεί να «χωρέσει» τον άξονα  $-\infty \leq \underline{\Omega} \leq +\infty$  στον άξονα  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  !
- Ως εκ τούτου, η αντιστοίχιση των μεταβλητών  $\underline{\Omega} \rightarrow \omega$  **δεν** είναι γραμμική, όπως ήταν στην προηγούμενη μέθοδο του Impulse Invariance
- Άρα η τεχνική αυτή, που ονομάζεται **Bilinear Transformation**, είναι κατάλληλη όταν αυτή η «αναδίπλωση» (warping) του άξονα «αναλογικής» συχνότητας είναι αποδεκτή

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται ως

$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

δηλ.

$$H(z) = H_c \left[ \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right] = H_c(s)$$

- Κι εδώ έχουμε την παράμετρο  $T_d$ , όπως και στην προηγούμενη μέθοδο
- Κι εδώ όμως μπορούμε να δείξουμε ότι η παράμετρος αυτή δεν παίζει ρόλο στη σχεδίαση
  - Θα την κρατήσουμε για λόγους πληρότητας

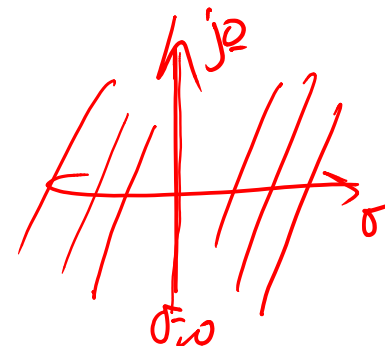
- Λύνοντας ως προς  $z$ :

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right)s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$

$$s = \sigma + j\Omega$$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

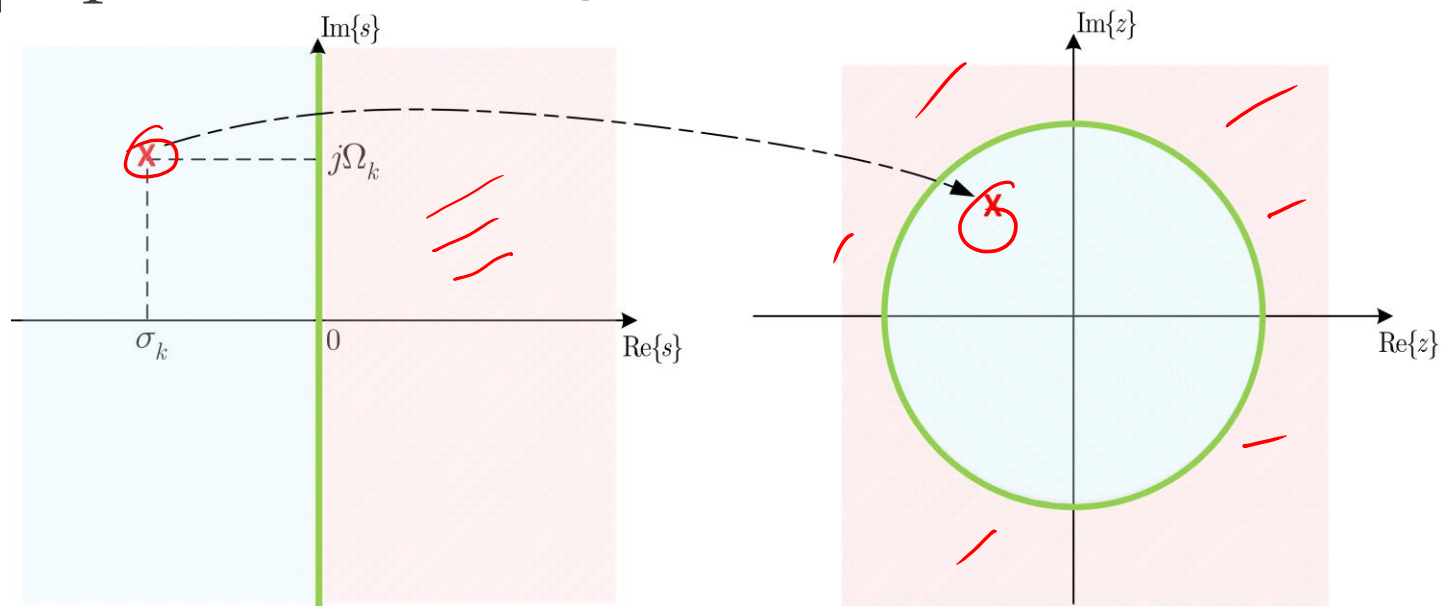
$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right) s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right) s} = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + \frac{j\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - \frac{j\Omega T_d}{2}}$$



• Παρατηρήστε ότι:

- Αν  $\sigma < 0$ , τότε  $|z| < 1$
- Αν  $\sigma > 0$ , τότε  $|z| > 1$
- Αν  $\sigma = 0$ , τότε  $|z| = 1$

Ίδια «ιδέα» με την αντιστοίχιση της προηγούμενης μεθόδου, Impulse Invariance (όχι σαν αλγεβρική αντιστοίχιση όμως)



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε πως μπορούμε να συσχετίσουμε τις μεταβλητές  $\Omega$ ,  $\omega$

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \right) = \frac{2j}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$z = e^{j\omega}$$

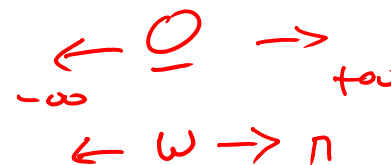
$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

- Οπότε

$$\sigma = 0, \quad \Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

ή

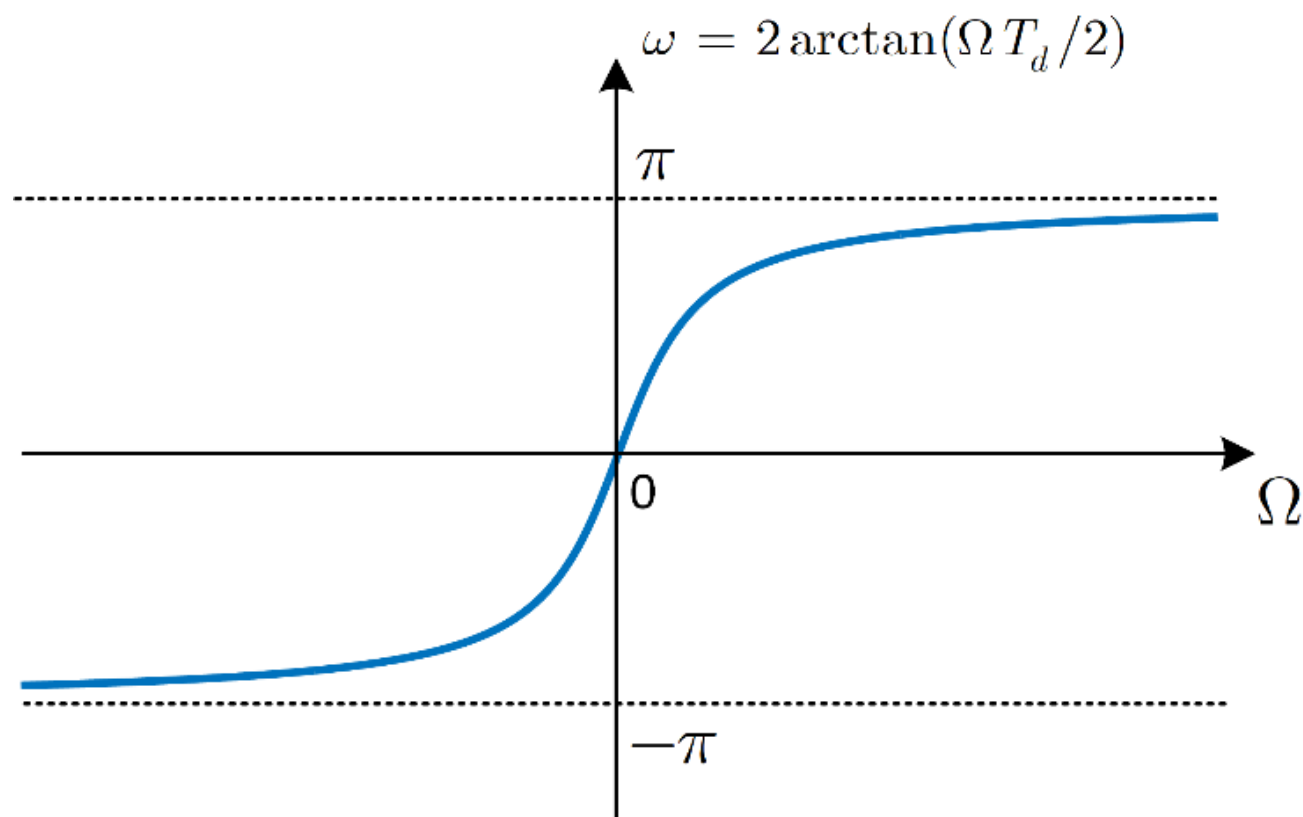
$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



- Πώς μοιάζει αυτή η μη γραμμική αντιστοίχιση των δυο συχνοτήτων?
- Πώς αντιστοιχίζεται η «αναλογική» απόκριση πλάτους στην «ψηφιακή»?

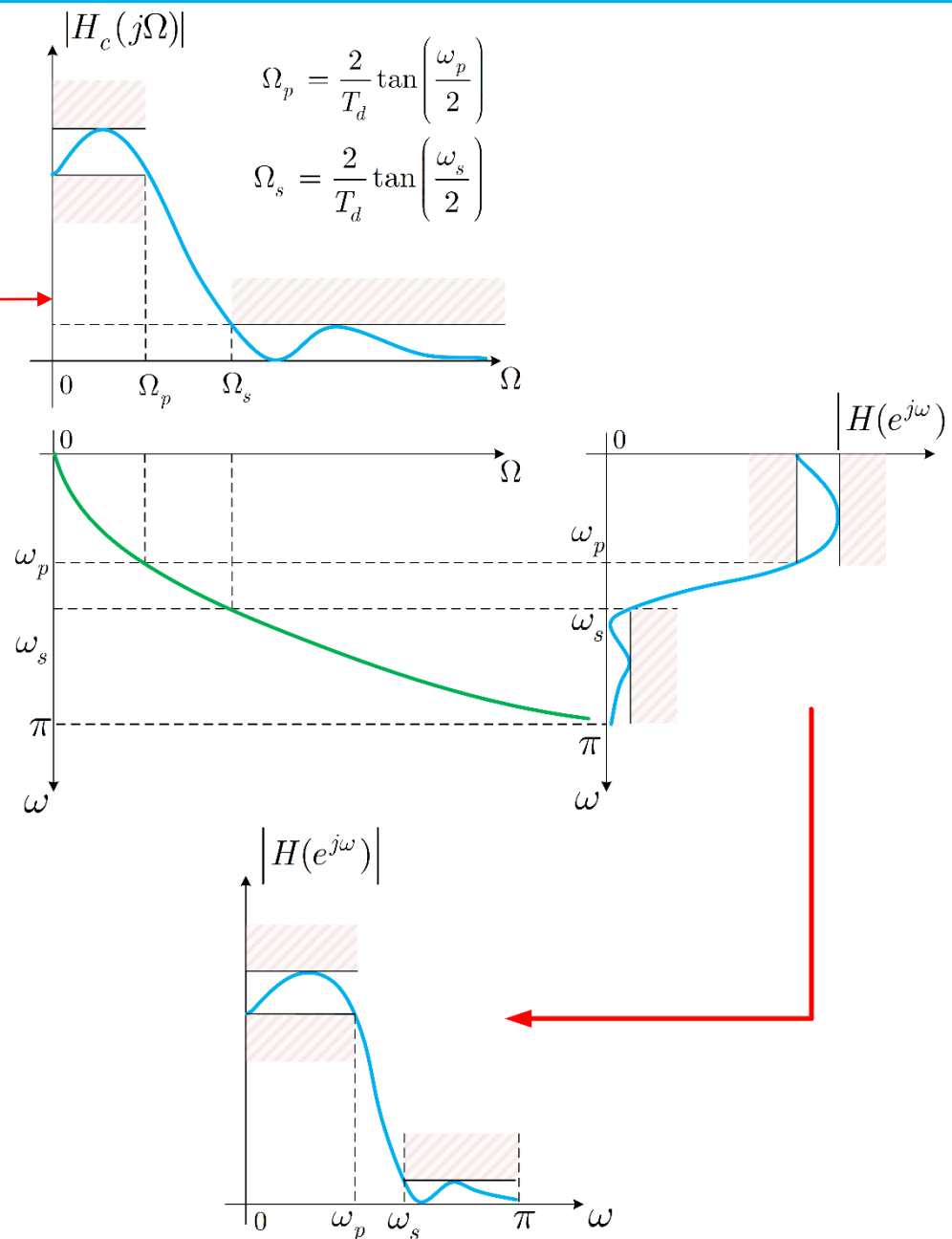
- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right)$$



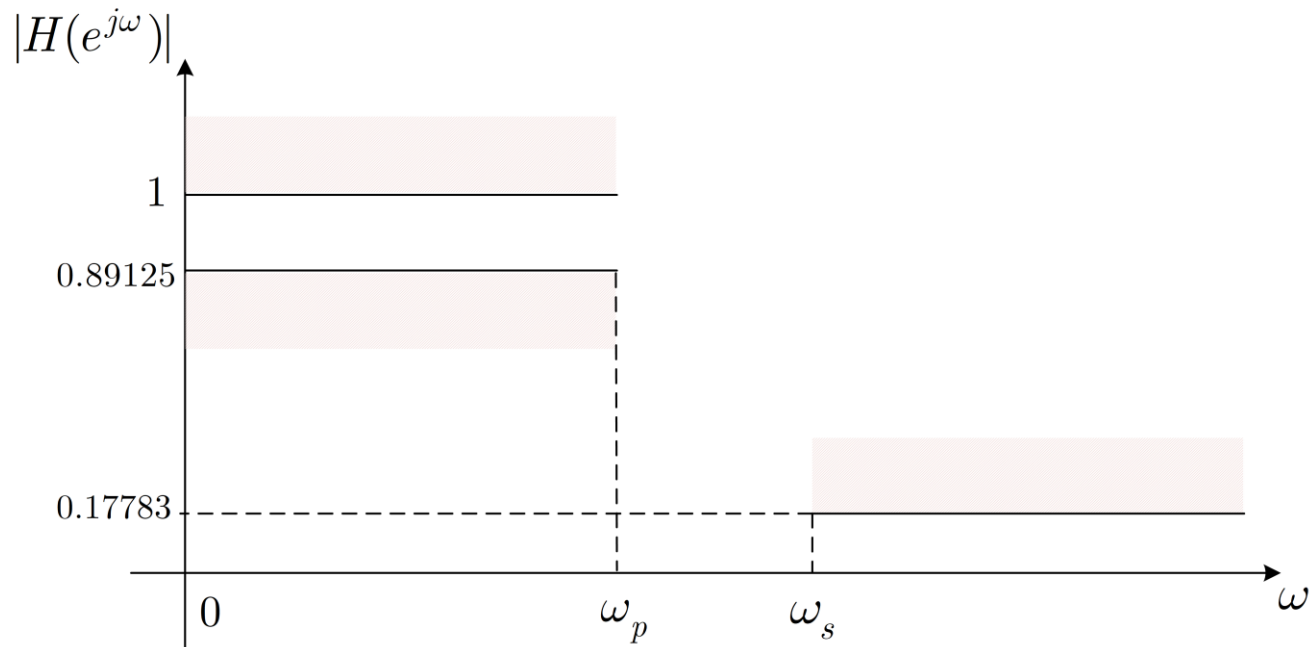
## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

Προδιαγραφές  $\omega_p, \omega_s$  στο  
διακριτό χρόνο  
μετατρέπονται στο **συνεχή**  
χρόνο



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Ας δούμε ένα παράδειγμα σχεδίασης (ίδιο με την προηγ. μέθοδο)



- Ας ζητήσουμε  $\omega_p = 0.2\pi$ ,  $\omega_s = 0.3\pi$  και ας θεωρήσουμε  $T_d = 1$

- Προδιαγραφές:

$$0.89125 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 : 0 \leq \omega \leq 0.2\pi$$

$$0.17783 \geq |H(e^{j\omega})| : 0.3\pi \leq \omega \leq \pi$$

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

- Μετασχηματίζουμε τις προδιαγραφές μας από  $\omega \rightarrow \Omega = 2 \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$ :

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 : 0 \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)$$

$$0.17783 \geq |H(j\Omega)| : 2 \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leq \Omega \leq 2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

- Θέλουμε ξανά μια εξίσωση που να δέχεται τις προδιαγραφές μας!
  - Ας επιλέξουμε ξανά το φίλτρο Butterworth

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Εφαρμόζουμε προδιαγραφές:

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{2 \tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2$$



- **Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation**

- Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε  $N = 5.305 \rightarrow N = 6, \Omega_c = 0.766$
- Για να βρούμε ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα συνεχούς χρόνου, έχουμε

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) \Rightarrow |H(s)|^2 \Big|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

- Οι πόλοι του συστήματος

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j0.766}\right)^{12}}$$

δίνονται ως

$$s_k = 0.766e^{j\frac{\pi}{12}(2k+5)}, \quad k = 0, 1, \dots, 11$$

- Πρέπει να επιλέξουμε τους πόλους οι οποίοι μας δίνουν ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα  $H(s)$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Bilinear Transformation

• Επιλέγω τους πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο

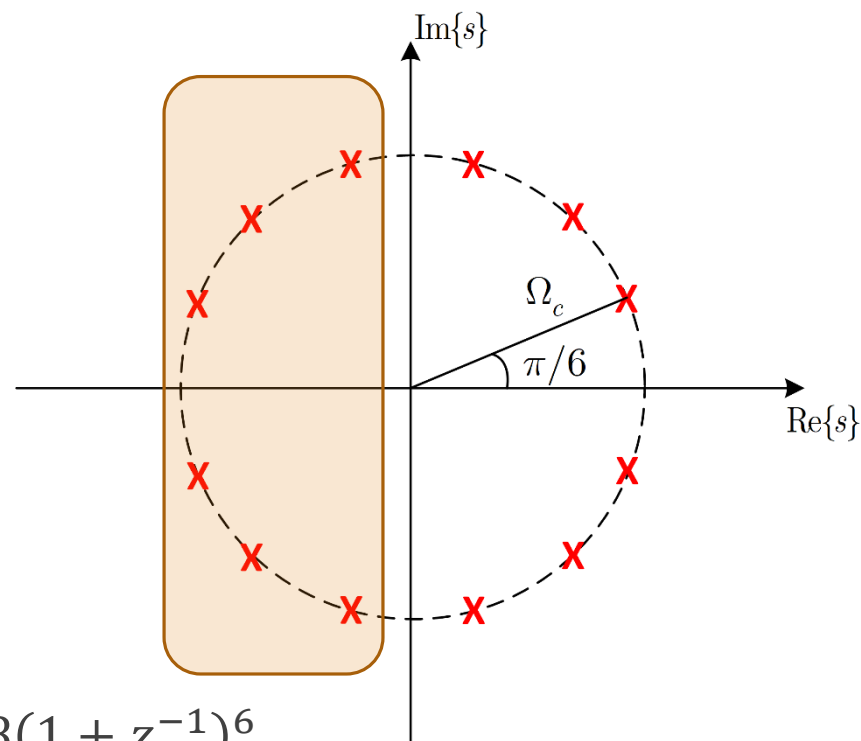
• Τότε το σύστημά μας θα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{\Omega_c^6}{(s^2 + 0.39s + 0.58)(s^2 + 1.08s + 0.58)(s^2 + 1.48s + 0.58)}$$

• Ο Bilinear Transformation δίνει:

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow s = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

• Το σύστημά μας στο χώρο του μετασχ. Z θα είναι:



$$H(z) = \frac{0.000738(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.26z^{-1} + 0.72z^{-2})(1 - 1.01z^{-1} + 0.35z^{-2})(1 - 0.90z^{-1} + 0.21z^{-2})}$$

## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Υπάρχουν πολλές εξισώσεις (φίλτρα) στις οποίες μπορούμε να θέσουμε τις προδιαγραφές μας

- Chebyshev (I, II)

- Elliptic

- Butterworth

- Bessel

- Optimum "L"

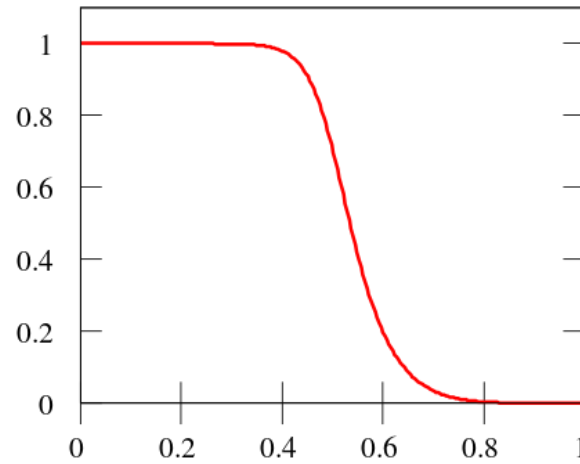
- Gaussian

- Hourglass

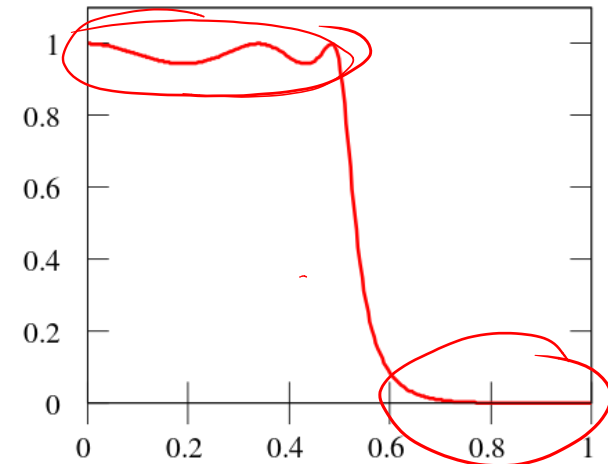
- Raised-cosine

- και πολλά άλλα! 😊

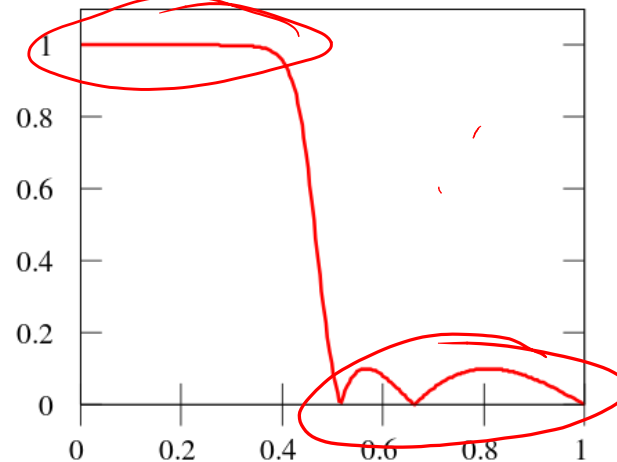
Butterworth



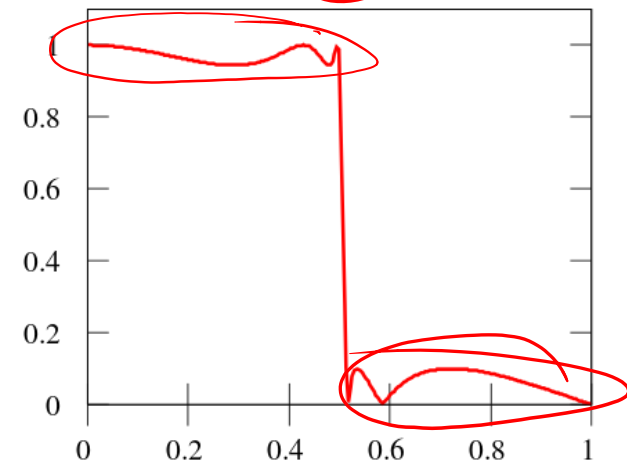
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



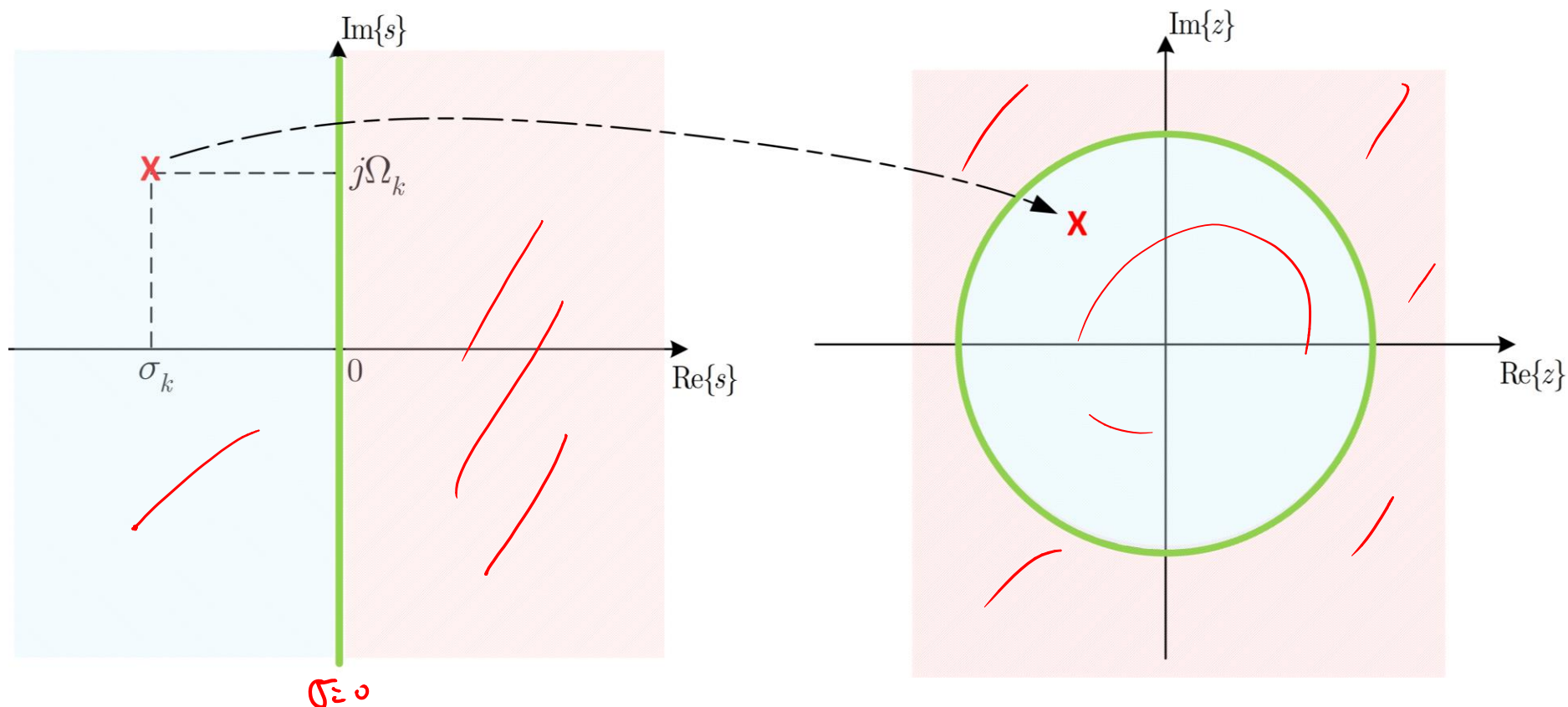
Elliptic



## • Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων - Σύνοψη

- Έχουμε δει ήδη δυο μεθόδους κατασκευής ψηφιακών φίλτρων IIR μέσω του πεδίου του συνεχούς χρόνου
  - ... και του μετασχ. Laplace
- Μέθοδος Impulse Invariance
  - a.k.a δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης  $h(t)$  συνεχούς χρόνου
  - Γραμμική αντιστοιχία συχνότητας  $\Omega$  σε  $\omega$
  - Η διαδικασία αυτή αντιστοιχίζει κάθε πόλο  $s_k$  στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο  $e^{s_k T_d}$  στο χώρο του μετασχ. Z
- Μέθοδος Bilinear Transformation
  - a.k.a «συμπίεση» του άξονα  $0 \leq \Omega \leq +\infty$  στο  $0 \leq \omega \leq \pi$  !!
  - Μη γραμμική αντιστοιχία της αναλογικής με την ψηφιακή συχνότητα
  - Η διαδικασία αντιστοιχίζει κάθε πόλο  $s_k$  στο χώρο του Laplace σε έναν πόλο  $\frac{1 + \frac{T_d s_k}{2}}{1 - \frac{T_d s_k}{2}}$  στο χώρο του μετασχ. Z

- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων – Σύνοψη
- Και οι δυο μέθοδοι αντιστοιχίζουν πόλους από το μιγαδικό επίπεδο  $s$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$

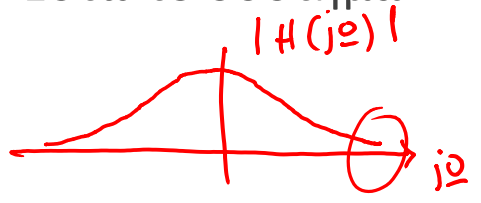


- Μήπως αντιστοιχίζονται με παρόμοιο τρόπο και τα μηδενικά?
- Γενικά, πως εφαρμόζονται οι μέθοδοι για ένα τυχαίο σύστημα στο χώρο του  $s$ ?

• Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

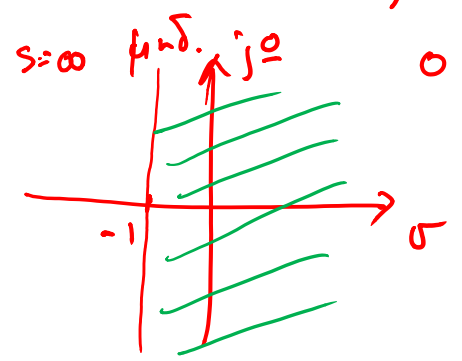
• Παράδειγμα:

○ Έστω το σύστημα



$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \mathcal{R}\{s\} > -1$$

•  $s+1=0 \Rightarrow s=-1$  πόλος,  $\sigma > -1$   
 •  $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0 \Rightarrow s=\infty$  μηδ.  $j\omega$  0 άπειρο



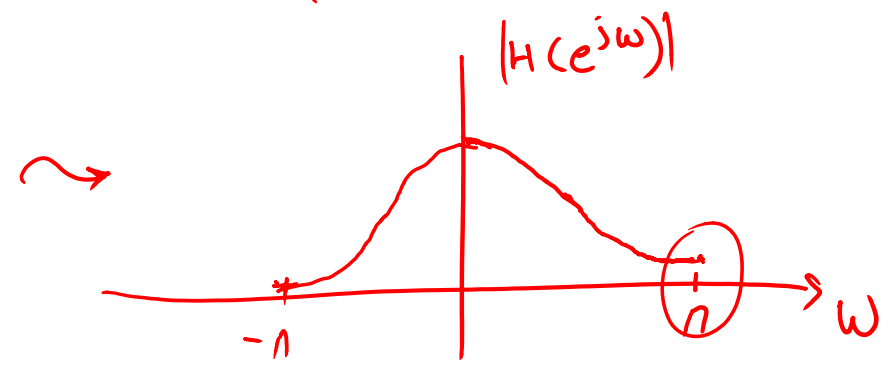
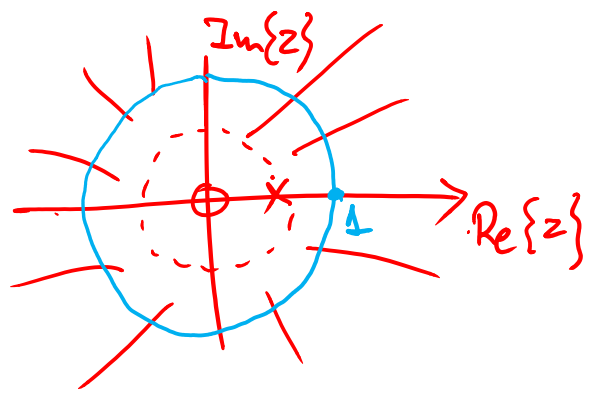
Εφαρμόστε τις μεθόδους που μάθατε για να βρείτε το μετασχ. Z ενός φίλτρου διακριτού χρόνου που το υλοποιεί

1) Μέθοδος Impulse Invariance

$$s_k \rightarrow e^{s_k} \quad \frac{A_k}{s-s_k} \rightarrow \frac{A_k}{1-e^{s_k}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-1}}$$

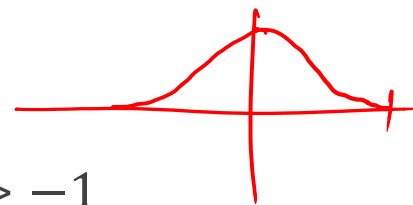
→ πόλο  $z_k = e^{-1}$   
 μηδ. 0



- Σχεδίαση Ψηφιακών Φίλτρων

- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$



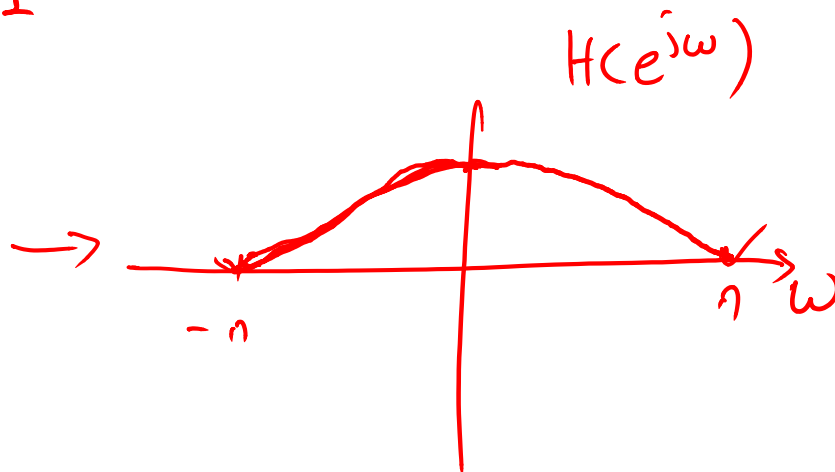
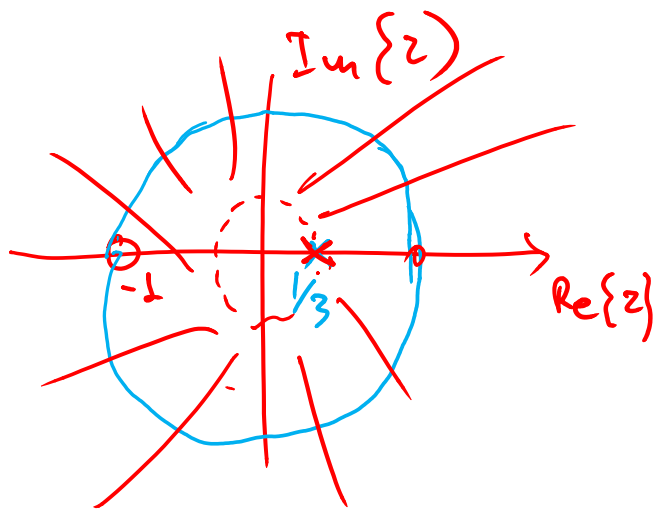
## 2) Bilinear Transform

$$s \rightarrow 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}}$$

$\sigma_0 > \frac{1}{3}$   
 $\mu_0 < -1$



# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

