Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 14[Η]

- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Ζ

- **FIR συστήματα (επανάληψη…)**

$$X(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k z^{-k}$$

- **Συμπεράσματα**

$N_1 = 0$

▪ Ένα αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο (μόνο στο μηδέν)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > 0\}$

$N_2 = 0$

▪ Ένα αντι-αιτιατό FIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν (μόνο στο άπειρο)
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \infty\}$

▪ Ένα μη-αιτιατό FIR σύστημα θα έχει πόλους **και** στο μηδέν **και** στο άπειρο
  - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{0 < |z| < \infty\}$

- **IIR συστήματα (επανάληψη…)**
- Τα IIR συστήματα αποτελούνται από άπειρες σε διάρκεια κρουστικές αποκρίσεις
- Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως λόγος πολυωνύμων του z^{-1}
- Πόλοι και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1-b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}$$

- Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι
  - Ένα αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο άπειρο
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| > \max_k |c_k|\}$
  - Ένα αντι-αιτιατό IIR σύστημα **δεν** έχει πόλους στο μηδέν
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|z| < \min_k |c_k|\}$
  - Ένα μη-αιτιατό IIR σύστημα μπορεί να έχει πόλους **οπουδήποτε**
    - Πεδίο σύγκλισης της μορφής $\{|c_i| < |z| < |c_j|\}$

• ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών (επανάληψη…)

- Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

- Ας εφαρμόσουμε τον μετασχ. Z σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

$y[n-k] \longleftrightarrow z^{-k} Y(z)$

$$\Big\updownarrow z \qquad\qquad \Big\updownarrow z$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}$$

- Έτσι

συνάρτηση μεταφοράς

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

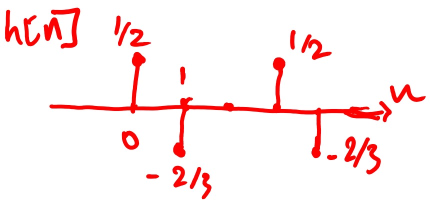
$= \sum_n h[n] z^{-n}$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

$\delta[n] \rightarrow \square \rightarrow h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4]$



FIR και αιτιατό.

$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-3}X(z) - \frac{2}{3}z^{-4}X(z) =$

$= X(z)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}\right) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}$

$|z| > 0$

Μηδενικά: 4

$z_1 = -1$

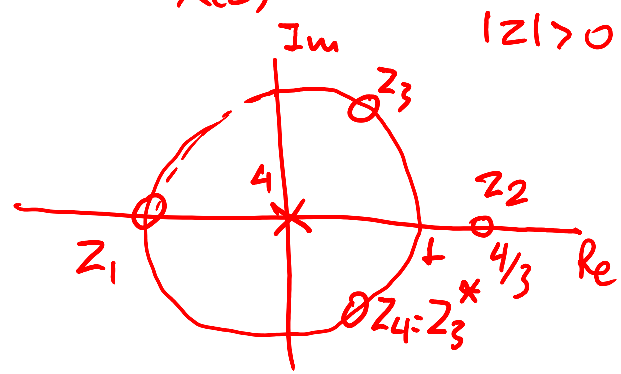
$z_2 = 4/3$

$z_3 = e^{j\pi/3}$

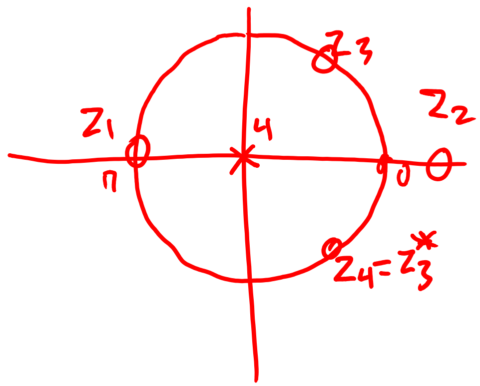
$z_4 = e^{-j\pi/3} = z_3^*$

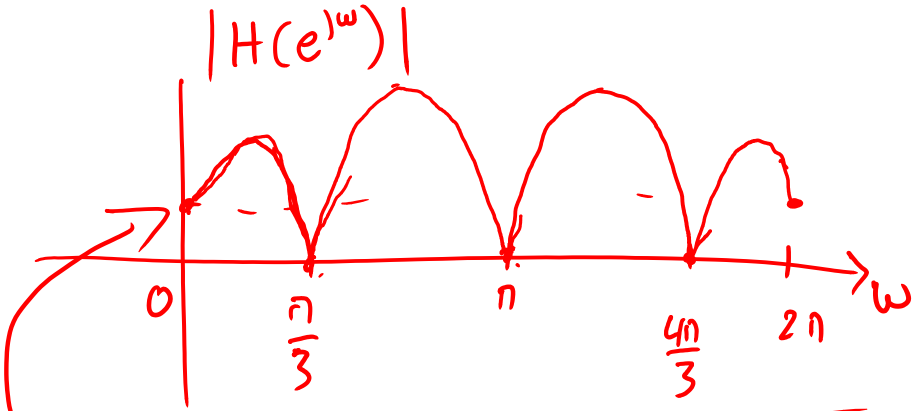
Πόλοι: 4

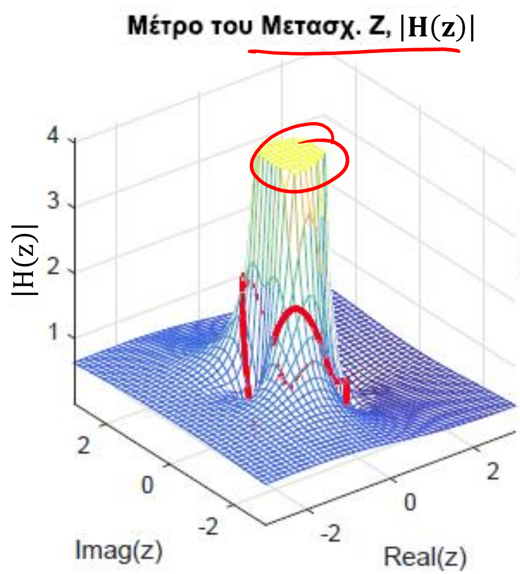
$z_{1,2,3,4} = 0$

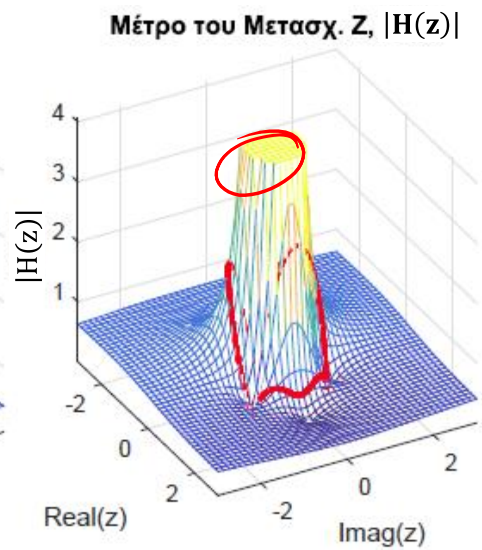


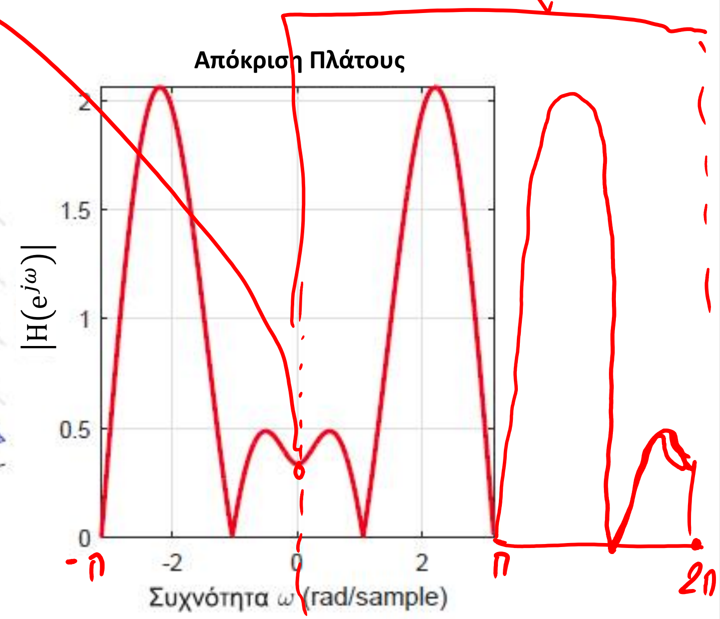
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:











- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το μη-αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, την κρουστική απόκριση, και σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, καθώς και την απόκριση πλάτους του

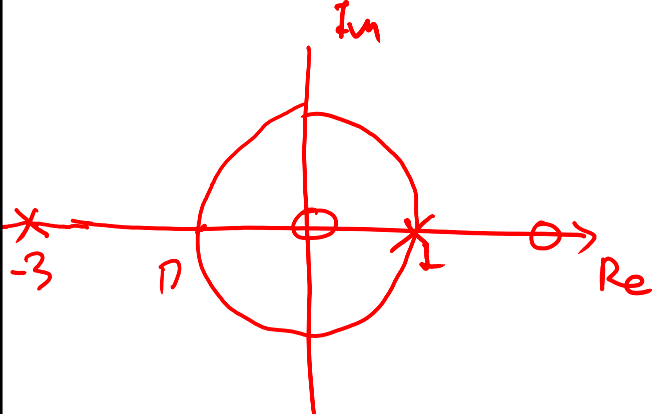
$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 3z^{-2}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) \Rightarrow$$

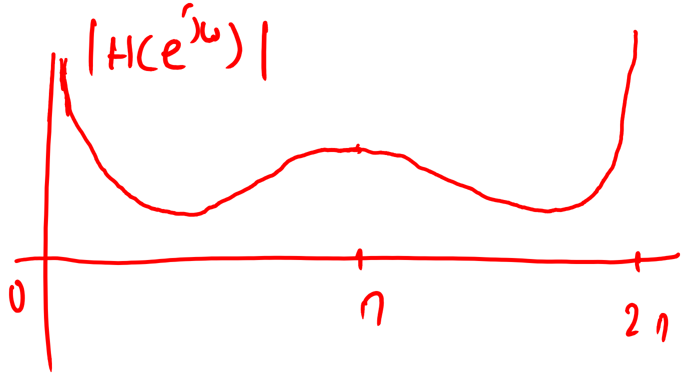
$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1+2z^{-1}-3z^{-2}} = \frac{z(z-2)}{z^2+2z-3}$$

Μηδενικά: $z_1 = 0$, $z_2 = 2$

Πόλοι: $z_1 = -3$, $z_2 = 1$

Περιοχή σύγκλισης $1 < |z| < 3$





- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1+2z^{-1}-3z^{-2}} = \frac{1-2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})} = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+3z^{-1}}$$

$$\boxed{1<|z|<3}$$

$$A = (1-z^{-1})H(z)\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

$$B = (1+3z^{-1})H(z)\Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5/3}{4/3} = \frac{5}{4}$$

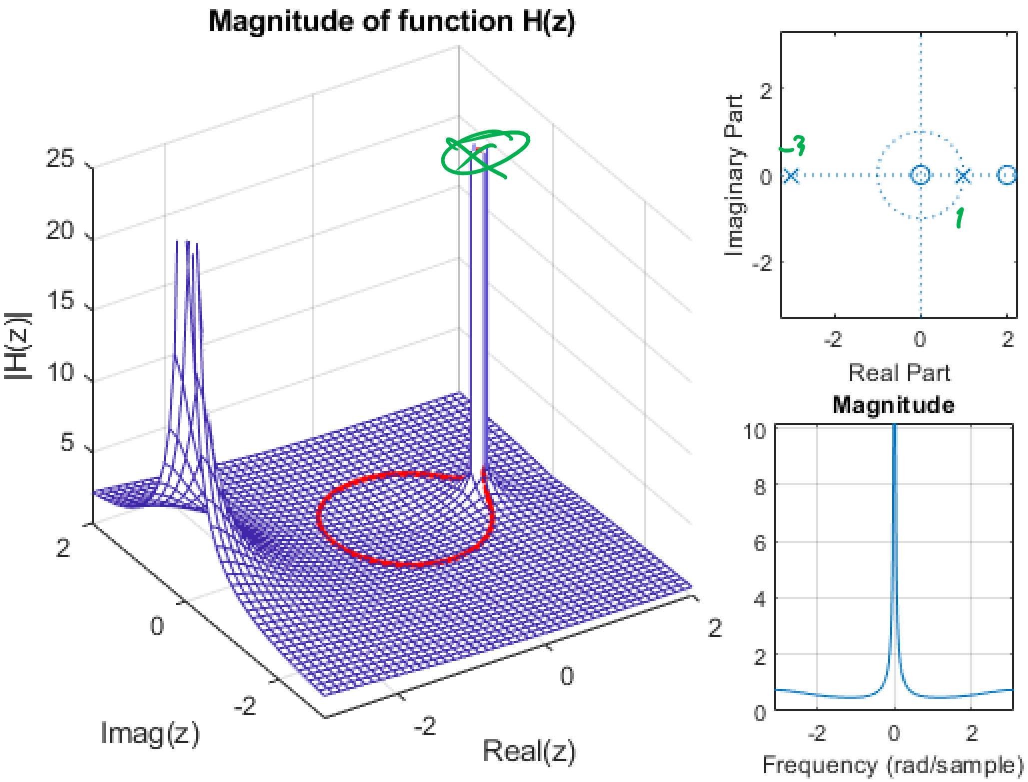
$$H(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{5}{4}\frac{1}{1+3z^{-1}} \Rightarrow h[n] = -\frac{1}{4}u[n] - \frac{5}{4}(-3)^n u[-n-1]$$

- $|z|>1$
- $|z|<1$

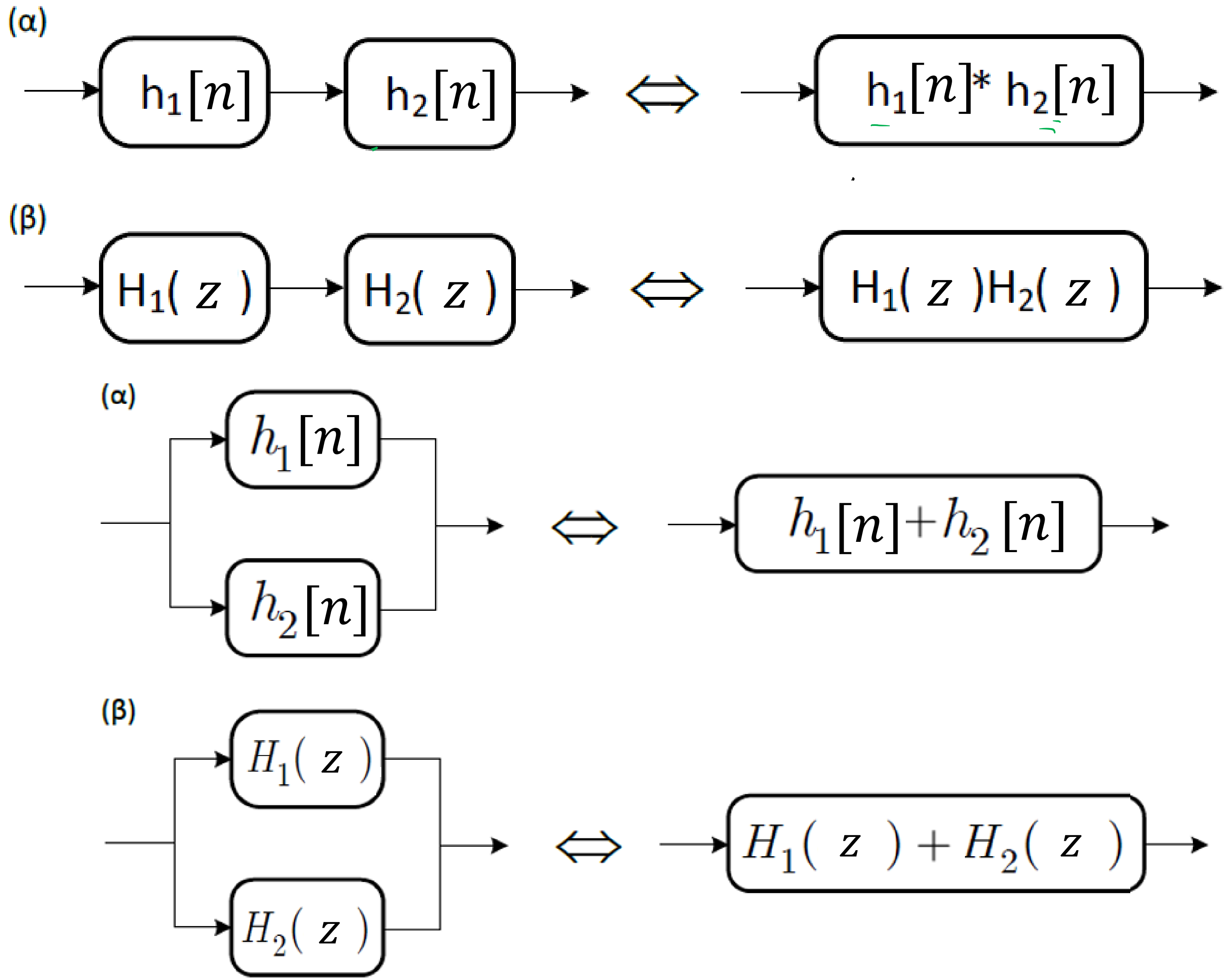
- $|z|>3$
- $|z|<3$

$$H(e^{j\omega}) = F\{h[n]\} = -\frac{1}{4}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\right) + \frac{5}{4}\frac{1}{1-3e^{-j\omega}}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Διατάξεις Συστημάτων**



- **Ευστάθεια στο χώρο του Ζ**
- Έχουμε δείξει ότι αν $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y$ τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$$\Updownarrow$$

- Αν $|\gamma_i| < 1, \forall\, i$, όπου γ_i οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος, τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$$\Updownarrow$$

- Αν ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές

$$\Updownarrow$$

- Αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο μετασχ. Fourier του $h[n]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall\, \omega$

$$\Updownarrow$$

- Αν ο μετασχ. Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε μπορούμε να τον υπολογίσουμε από το μετασχ. Ζ, αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

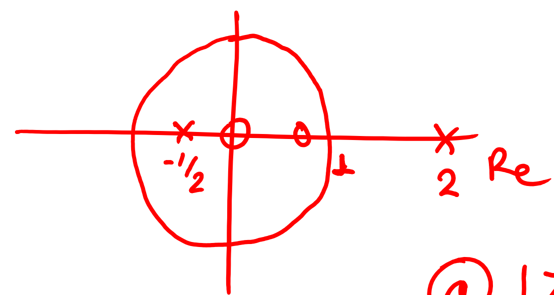
$2\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)$

$$H(z)=\frac{2-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-2z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι (α) ευσταθές, (β) αιτιατό. Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Δύο πόλους $z_1 = 2$, $z_2 = -1/2$

Δύο μηδενικά $z_1 = 0$, $z_2 = 3/4$



Επιλογές για ROC:

(α) $|z| > 2$ → αιτιατό

(β) $|z| < 1/2$

(γ) $\frac{1}{2} < z < 2$ ✓ μοναδ. κύκλο εντός της ROC

↳ Ευσταθές

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

αριστ.   δεξ

$\frac{1}{2} < |z| < 2$ για $\boxed{\text{ευστάθεια}}$

$$h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Για αιτιατότητα $|z| > 2$

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

δεξ.   δεξ.

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Z – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) - \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = 2X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\Rightarrow y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2}x[n-1]$$

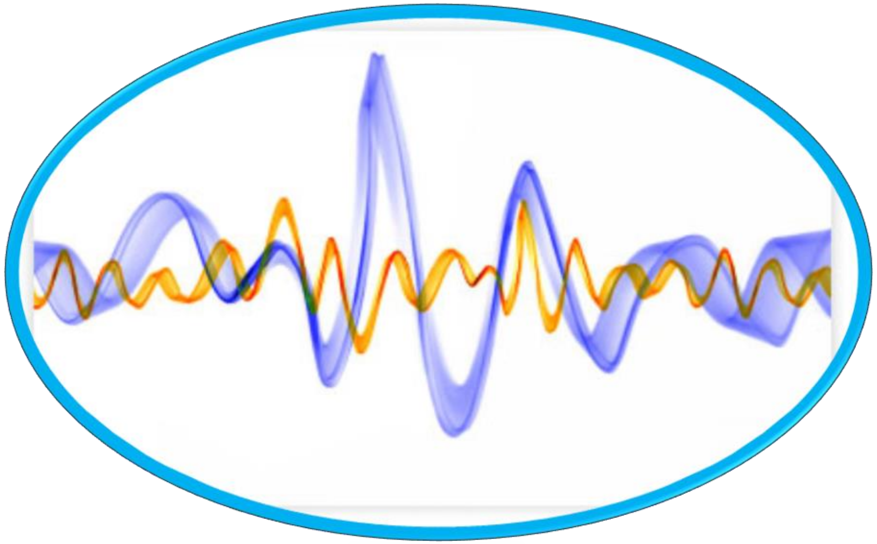
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + 3z^{-1})}, \quad R_H$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

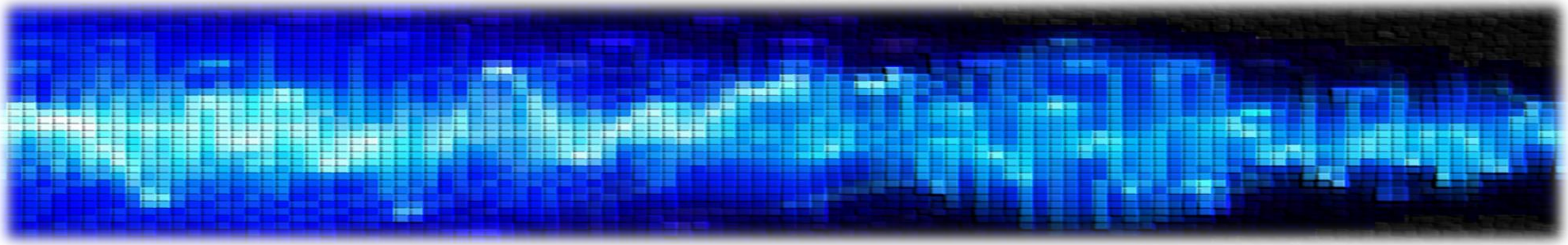
Θα το δείτε στο φροντιστήριο! ☺

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η



- Συστήματα στο χώρο του Z

- **Αντίστροφα Συστήματα**

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] \rightarrow \boxed{h_i[n]} \rightarrow x[n]$

- Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο
  - Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο $y[n] = x[n] * h[n]$, και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη
    - Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου
  - Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα $h_i[n]$ τέτοιο ώστε

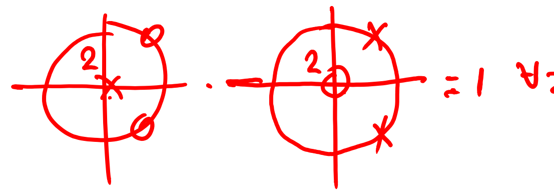
$$y[n] * h_i[n] = x[n] * \underbrace{h[n] * h_i[n]}_{\delta[n]} = x[n]$$

$\delta[n] = h[n] * h_i[n]$

δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο

  - Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$
  - Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του Ζ προκύπτει ότι

$$\boxed{H_i(z)H(z) = 1}, \quad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$



  - Το σύστημα $h_i[n]$ ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του $h[n]$
  - Στο χώρο του Ζ, αν

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

τότε

$$H_i(z) = \frac{1}{A}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - b_k z^{-1})}$$

$H(z) \cdot H_i(z) = 1 \Rightarrow H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$

$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \Rightarrow H_i(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$

Οι πόλοι του συστήματος γίνονται μηδενικά του αντιστρόφου και τα μηδενικά του συστήματος γίνονται πόλοι του αντιστρόφου

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:

$H(z) \cdot H_i(z)$., $R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$

○ Έστω $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, \underbrace{|z| > 0.8}_{R_H}$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

$$H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

- $|z|>0.5$ R_{H_i}
- $|z|<0.5$

Άρα $h_i[n] = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} - 0.8 Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\right\} \Rightarrow$

$|z|>0.5$

$$\Rightarrow h_i[n] = (0.5)^n u[n] - 0.8 (0.5)^{n-1} u[n-1]$$

$\left.\begin{array}{l} H(z) \\ H_i(z) \end{array}\right\}$ αιτιατά κ' ευσταθή

- **Αντίστροφα Συστήματα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω $H(z) = \frac{0.5-z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, |z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

R_H

$$H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{0.5-z^{-1}}$$

πόλος $z_1 = 2$

$|z| < 2$ ✓ $R_H \cap R_{H_i}$: $0.8<|z|<2$ (α)

$|z| > 2$ ✓ $R_H \cap R_{H_i}$: $|z|>2$ (β)

(α) εμπ. το μον. κύκλο => ευσταθές
Ζωνοπερατή => αμφίπλευρο => όχι αιτιατό

$$h_i[n] = Z^{-1}\{H_i(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{0.5-z^{-1}}\right\} - 0.8\, Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{0.5-z^{-1}}\right\} =$$

$0.8<|z|<2$

$$= -2(2)^n u[-n-1] - 1.6(2)^n u[-n]$$

(β) μον. κύκλος ΔΕΝ είναι στο πεδίο σύγκλισης => ασταθές
Εξωτερική ROC => Αιτιατό.

$$h_i[n] = 2\, 2^n u[n] - 1.6\, 2^{n-1} u[n-1]$$

• Αντίστροφα Συστήματα

- Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα

- Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό

- Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$
  - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του **<u>εντός</u>** του μοναδιαίου κύκλου, αφού το πεδίο σύγκλισης του είναι $\{|z| > \max|c_k|\}$ και $|c_k| < 1, \forall k$
  - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε

H(z) H_i(z)

- Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα $H(z)$ έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?

H(z) H_i(z)

- Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
  - **Άρα <u>όλα</u> τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται ΚΑΙ ΑΥΤΑ εντός του μοναδιαίου κύκλου**

ευσταθές κ αιτιατό

- Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **<u>Συστήματα Ελάχιστης Φάσης</u> – Minimum Phase**
  - θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα…

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ. Ζ ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Ζ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (== «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Ζ «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
  - Πώς?
    - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
    - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «διαισθητική»
- θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε *ακριβώς* πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

- Ας γράψουμε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και την καθυστέρηση ομάδας μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, όταν αυτή υπολογίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

$H(z) = A \dfrac{\prod_k (1-b_k z^{-1})}{\prod_\ell (1-a_\ell z^{-1})}$ $\Rightarrow H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{-j\omega}}$

❑ Απόκριση Πλάτους

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |A| \frac{\prod_{k=1}^{M}\left|1-b_k e^{-j\omega}\right|}{\prod_{l=1}^{N}\left|1-a_\ell e^{-j\omega}\right|}$$

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ (Π, Σ)

❑ Απόκριση Φάσης

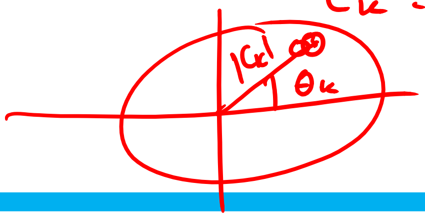
$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \angle A + \angle \prod_{k=1}^{M}\left(1-b_k e^{-j\omega}\right) - \angle \prod_{k=1}^{M}\left(1-a_k e^{-j\omega}\right)$$
$$= \angle A + \sum_{k=1}^{M} \angle\left(1-b_k e^{-j\omega}\right) - \sum_{k=1}^{M} \angle\left(1-a_k e^{-j\omega}\right)$$

❑ Καθυστέρηση Ομάδας

$\dfrac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$

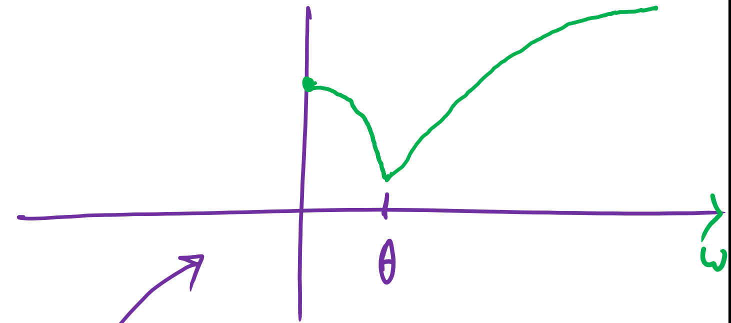
$$\tau_g\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=1}^{M} \frac{d}{d\omega} \angle\left(1-a_k e^{-j\omega}\right) - \sum_{k=1}^{M} \frac{d}{d\omega} \angle\left(1-b_k e^{-j\omega}\right)$$

$c_k = |c_k| \cdot e^{j\theta_k}$



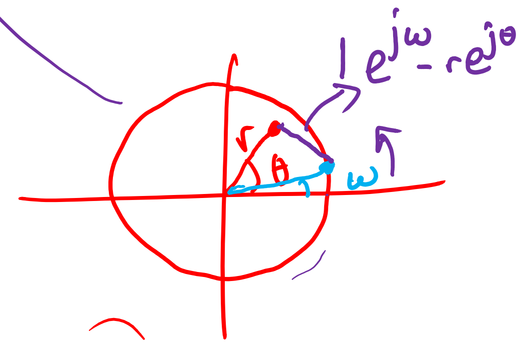
- Κοινό στοιχείο: όροι της μορφής $\boxed{\left(1-c_k e^{-j\omega}\right)!!}$

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**
- Ας θεωρήσουμε τον όρο $1 - ce^{-j\omega}$, με $c \in \mathbb{C}$



- Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις
  - Το c είναι πόλος
  - Το c είναι μηδενικό
- Θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις επάνω στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης
- Ξεκινώντας από τη θεώρηση του $c = re^{j\theta}$ ως **μηδενικό**:

$$H(z) = 1 - cz^{-1} = 1 - re^{j\theta}z^{-1}$$

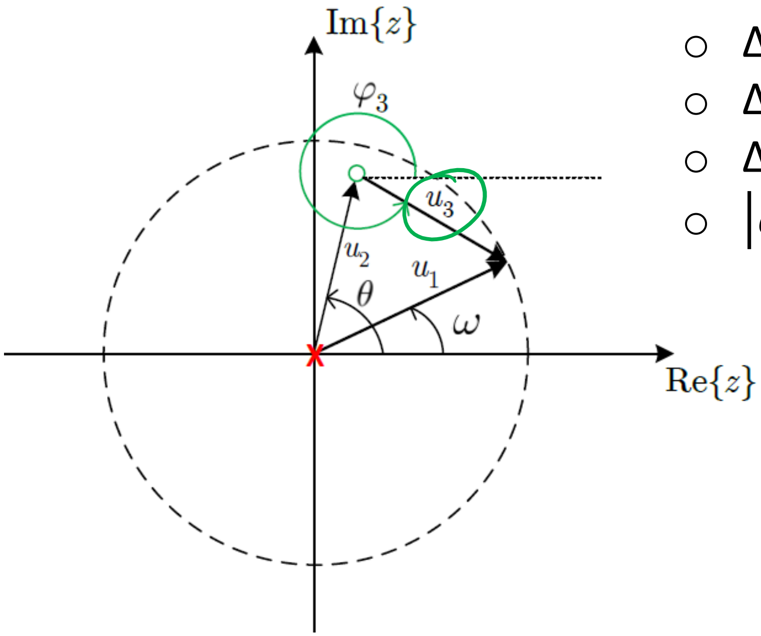


- Οπότε:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = \left|e^{-j\omega}\right|\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right| = \left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|$$

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = \left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|$$



- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από Ο ως το μηδενικό
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από μηδενικό ως το μοναδ. κύκλο
- $\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right| = |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{u}_3|$

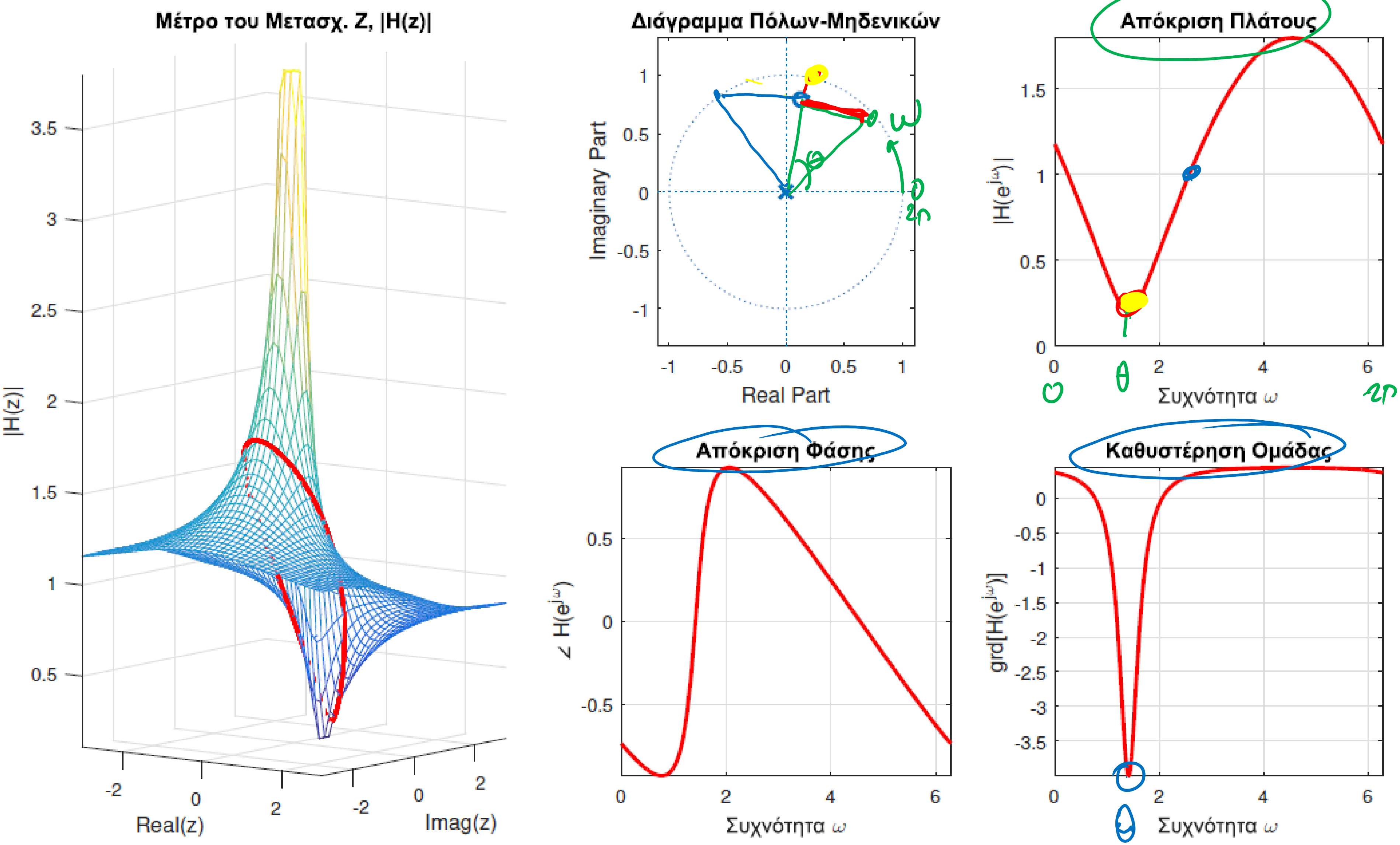
Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το μήκος του $\vec{u}_3$!!

- Για την απόκριση φάσης

$$\angle\left(1 - re^{j\theta}e^{j\omega}\right) = \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) - \angle e^{j\omega} = \phi_3 - \omega$$

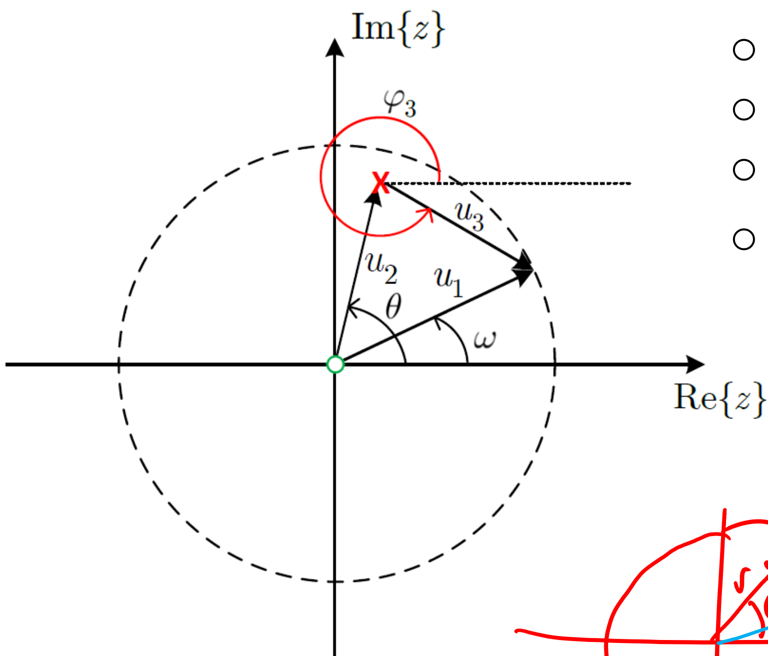
Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\phi_3 - \omega$!!

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**



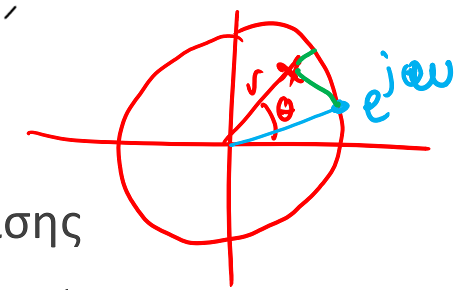
- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|}$$

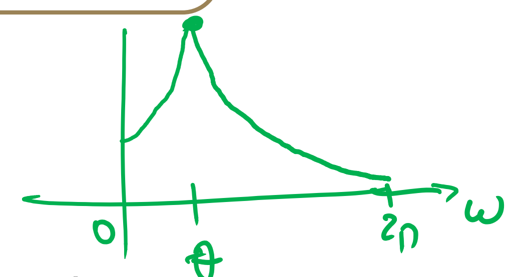


- Διάνυσμα $\vec{u}_1$: διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_2$: διάνυσμα από O ως τη θέση του $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα $\vec{u}_3$: διάνυσμα από $re^{j\theta}$ ως το μοναδ. κύκλο
- $\frac{1}{|e^{j\omega}-re^{j\theta}|} = \frac{1}{|\vec{u}_1-\vec{u}_2|} = \frac{1}{|\vec{u}_3|}$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το (αντίστροφο) μήκος του $\vec{u}_3$!!



$$\frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|}$$

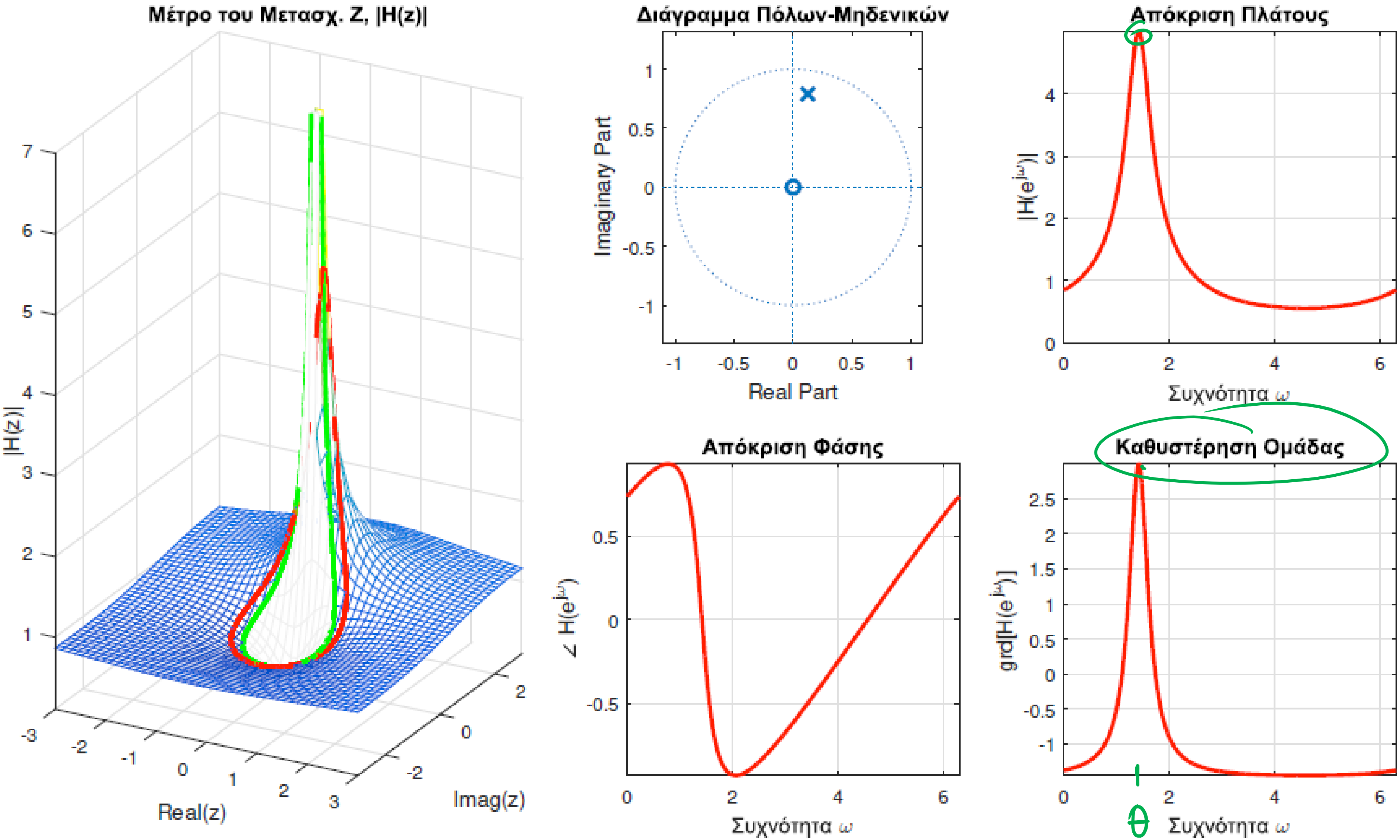


- Για την απόκριση φάσης

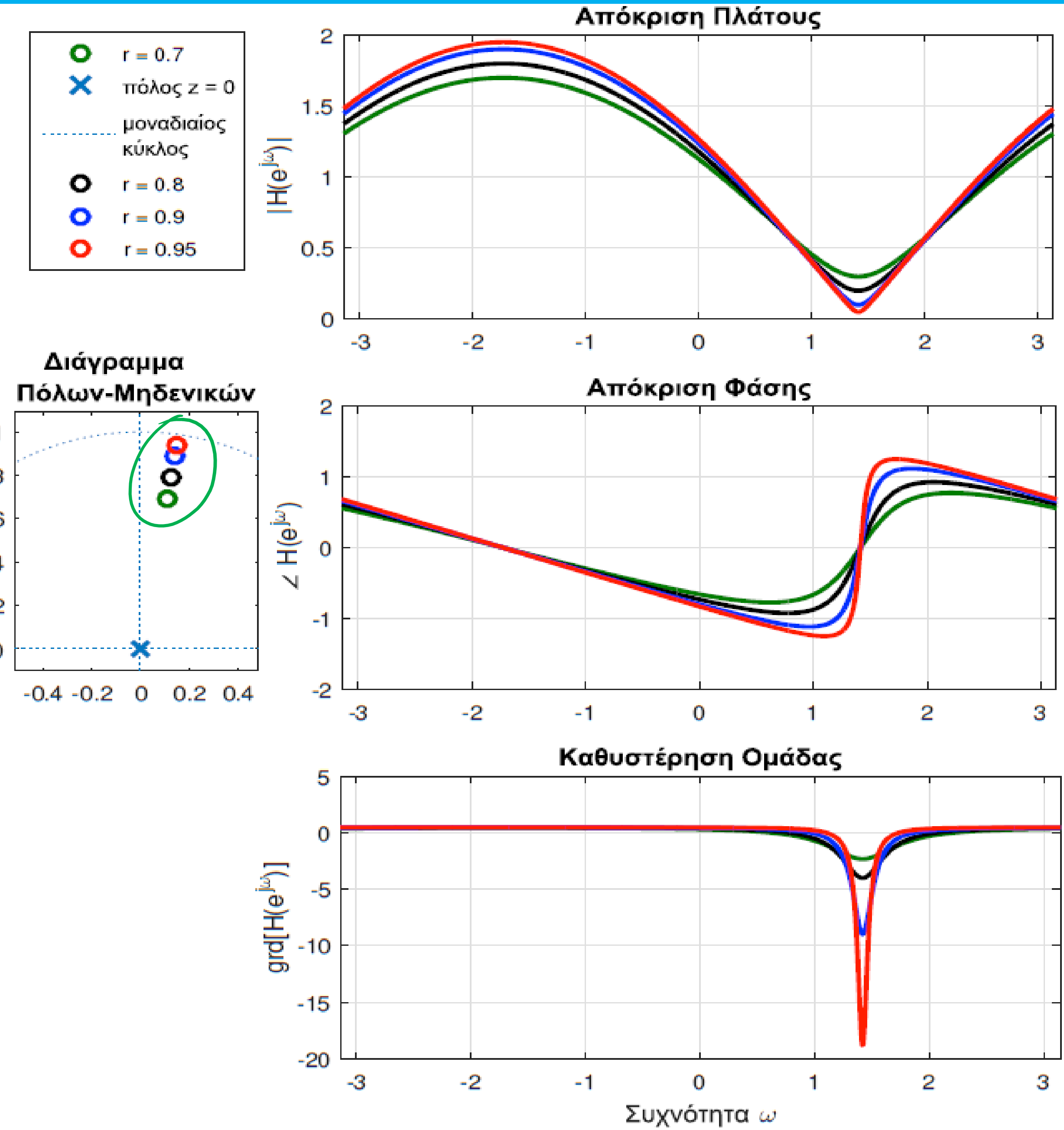
$$\angle\frac{1}{(1-re^{j\theta}e^{j\omega})} = \angle e^{j\omega} - \angle\left(e^{j\omega} - re^{j\theta}\right) = \omega - \phi_3$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\omega - \phi_3$!!

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

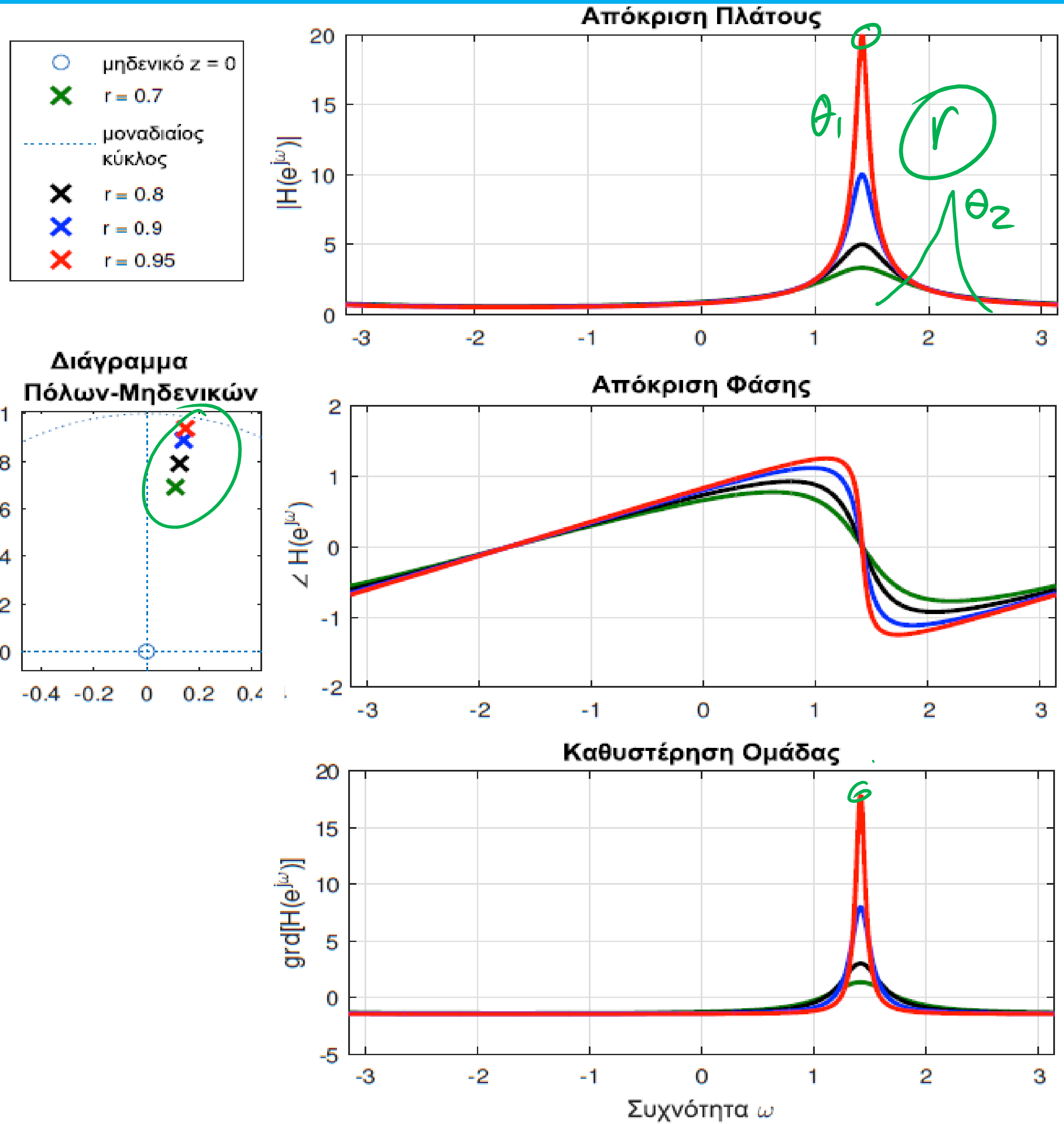


- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

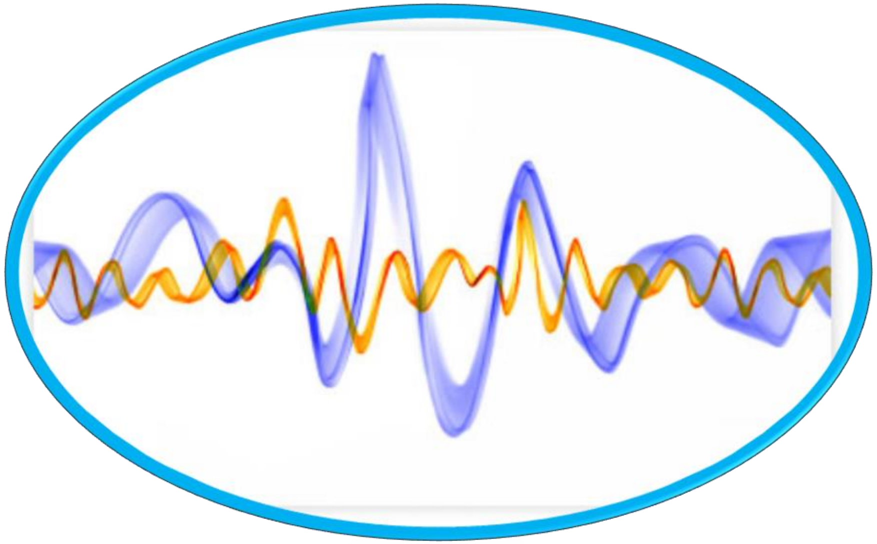


- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

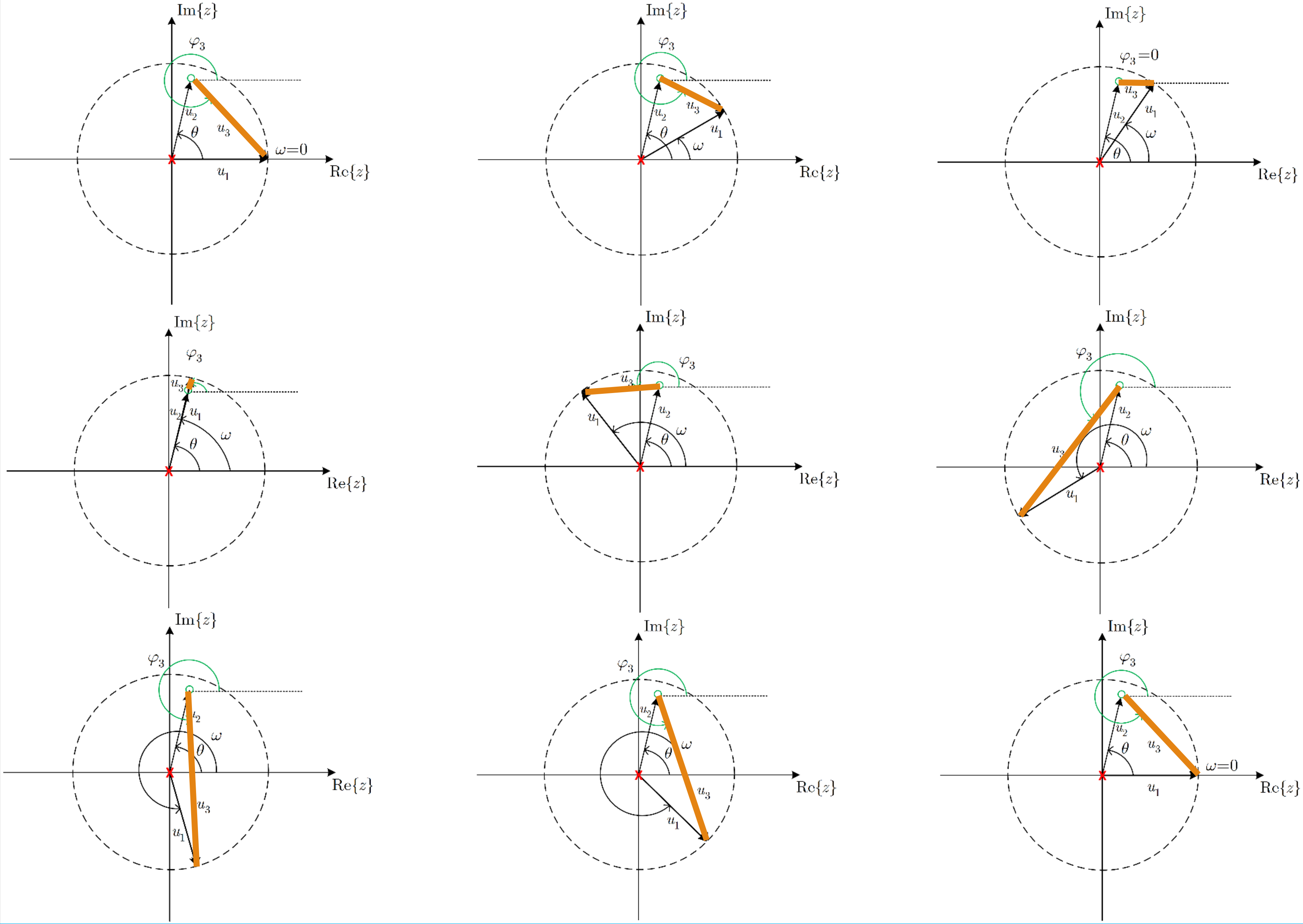
$r \cdot e^{j\theta}$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



• Διάγραμμα Διανυσμάτων



- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**