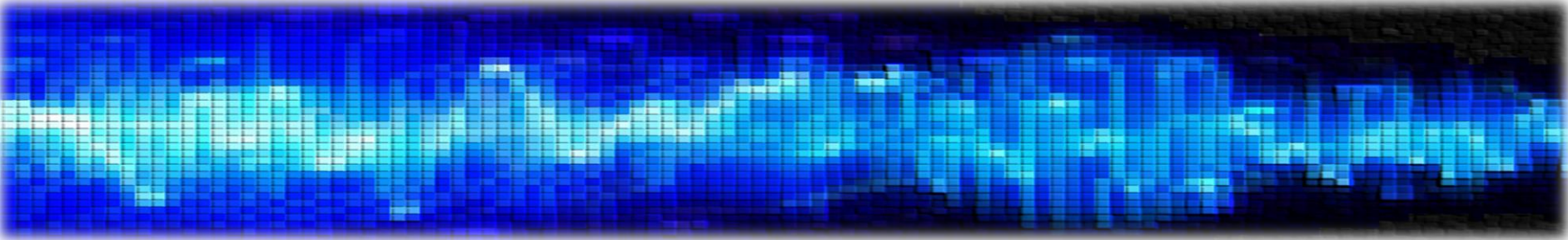


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 13<sup>Η</sup>

- 
- Πόλοι & Μηδενικά
  - Συστήματα στο χώρο του Z

- Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$z = r e^{j\omega}$$

- Πεδίο Σύγκλισης: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

- Σχέση μετασχ. Z με μετασχ. Fourier

#### Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

- (α') Ο μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$  ενός σήματος  $x[n]$  μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z  $X(z)$  αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
- (β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας  $|z| = 1$ .
- (γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων  $|X(z)|$  και  $\phi(z)$  επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

- Ιδιότητες Μετασχ. Z (επανάληψη)

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$	$X(z)$	$R_x$
	$y[n]$	$Y(z)$	$R_y$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το $R_x$
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R_x$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το $R_x$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z  > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z  > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

## • Ιδιότητες Μετασχ. Z

$$\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{z^{n_0}} \cdot \begin{cases} n_0 > 0, |z| > 0 & (\text{πόλος στο } |z|=0) \\ n_0 < 0, |z| < \infty & (\text{πόλος στο } |z|=\infty) \end{cases}$$

- Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα  $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$ . Υπολογίστε το Μετασχ. Z του.

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_n x[n] z^{-n}$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_n x[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0} \sum_n x[n] z^{-n} = z^{-n_0} X(z)$$

$$\text{γινώσκ. } \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] = 3^2 \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]}_{y[n+2]} =$$

$$= 9 y[n+2] \Rightarrow X(z) = 9 \left( z^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right)$$

$$|z| > \frac{1}{3}$$

$$X(z) = 9 \frac{z^2}{z^{-1} \left( z - \frac{1}{3} \right)} = 9 \frac{z^3}{z - \frac{1}{3}}$$

Μυδενικά  $z=0$  τρία  $z$ , Άρα 3 μυδενικά

Πόλοι  $z_1 = \frac{1}{3}$ , 2 πόλους στο  $\infty$ , Άρα 3 πόλοι  
 $\frac{1}{3} < |z| < \infty$

## • Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα  $x[n] \in \mathbb{R}$  με ρητό μετασχ. Z που έχει  $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$
- Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση  $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$
- Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση  $z = \sqrt{2} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

Βρείτε μια μορφή για το  $X(z)$

$$\rightarrow x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(z) = X^*(z^*) \Rightarrow \text{πόλοι & μηδενικά του } X(z) \text{ βρίσκονται σε συζυγία } z_0, z_0^*, z_p, z_p^*$$

$$z_p = e^{-j\frac{\pi}{8}} \Rightarrow z_p^* = e^{j\frac{\pi}{8}} \text{ θα είναι επίσης πόλος}$$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \Rightarrow z_0^* = \sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ θα είναι επίσης μηδενικό.}$$

$$\text{Άρα } X(z) = A \frac{(1 - \sqrt{2} e^{j\pi/4} z^{-1})(1 - \sqrt{2} e^{-j\pi/4} z^{-1})}{(1 - e^{-j\pi/8} z^{-1})(1 - e^{j\pi/8} z^{-1})}$$

## • Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα  $x[n] = (2)^n u[n]$ ,  $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ . Βρείτε τη συνέλιξή τους

$$\begin{array}{l} x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad R_x \\ y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z), \quad R_y \end{array} \quad \left| \quad x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \cdot Y(z), \quad R_x \cap R_y \right.$$

$$x[n] = 2^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

$$y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{l} X(z) \cdot Y(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{A \rightsquigarrow 8/9}{1-2z^{-1}} + \frac{B \rightsquigarrow 1/9}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{8/9}{1-2z^{-1}} + \frac{1/9}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \\ \downarrow \\ |z| > 2 \end{array}$$

$$A = \left. \left\{ (1-2z^{-1}) X(z) \cdot Y(z) \right\} \right|_{z=2}$$

- Ιδιότητες Μετασχ. Z  $|z| > a, \frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} a^n u[n]$
- Συνέλιξη στο χρόνο:

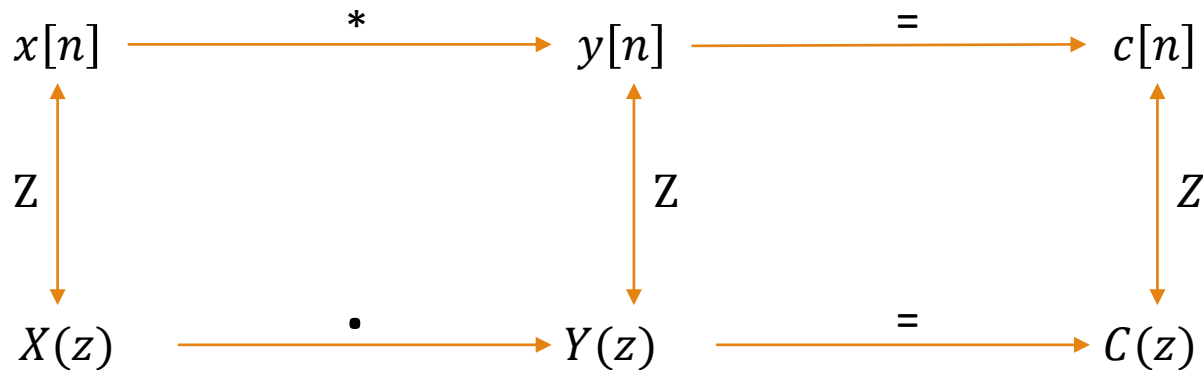
$$X(z)Y(z) = \frac{8/9}{1-2z^{-1}} + \frac{1/9}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow x[n] * y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{8/9}{1-2z^{-1}}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1/9}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\right\}$$

$$|z| > 2$$

$$\text{Άρα } x[n] * y[n] = \frac{8}{9} 2^n u[n] + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

## • Ιδιότητες Μετασχ. Z

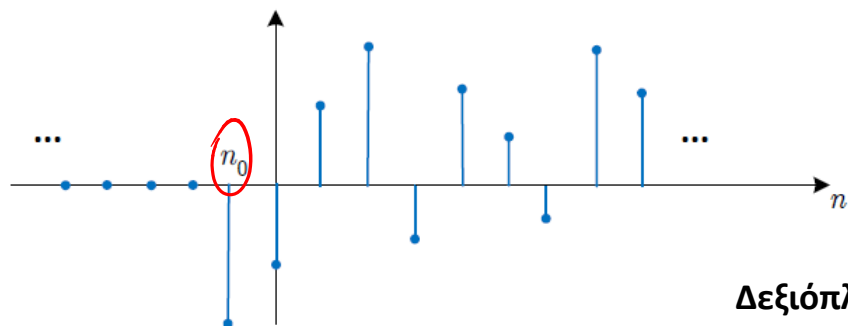
- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του Μετ. Z είναι:



- Θα θυμάστε παρόμοια διαδικασία από τον DTFT
  - Μόνο που τώρα καλύπτουμε μεγαλύτερη «γκάμα» σημάτων ☺
  - Ξανά, αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

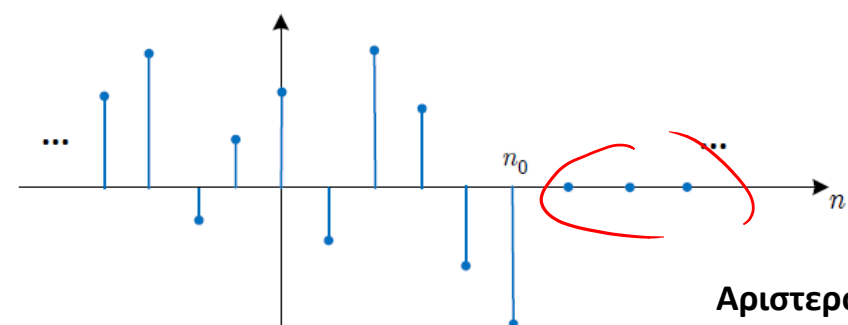
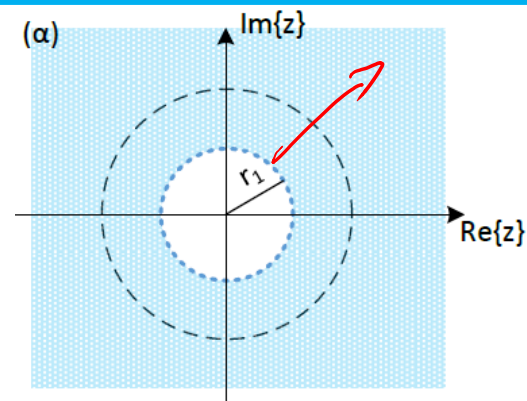


• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης



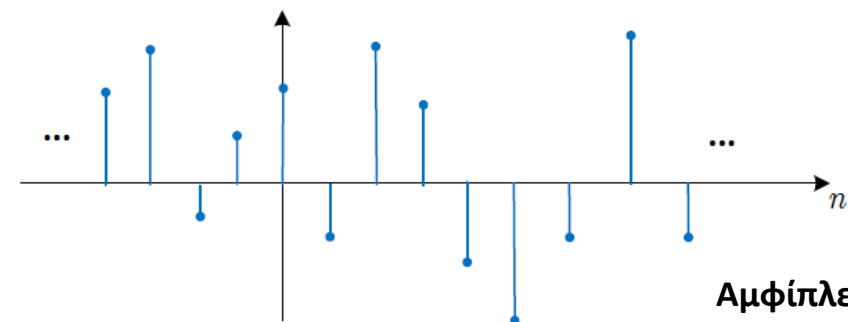
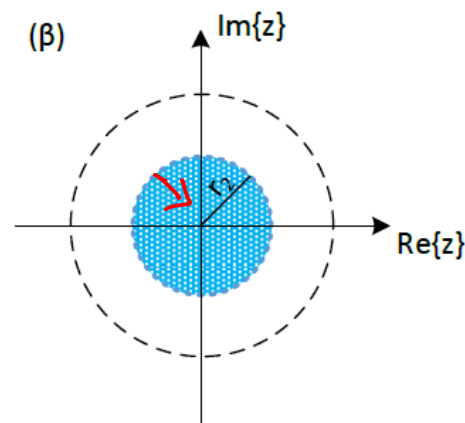
$$x[n] = 0, \\ n < n_0$$

Δεξιόπλευρο → Εξωστρεφές ROC

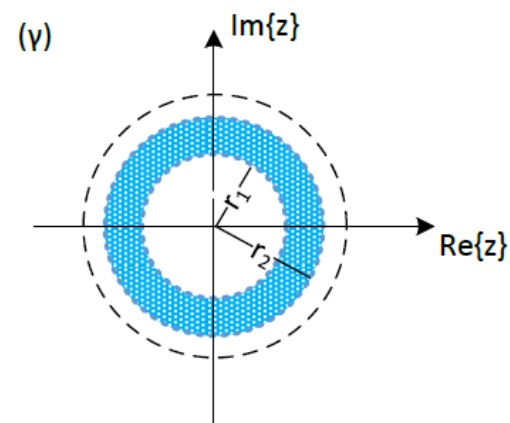


$$x[n] = 0, \\ n > n_0$$

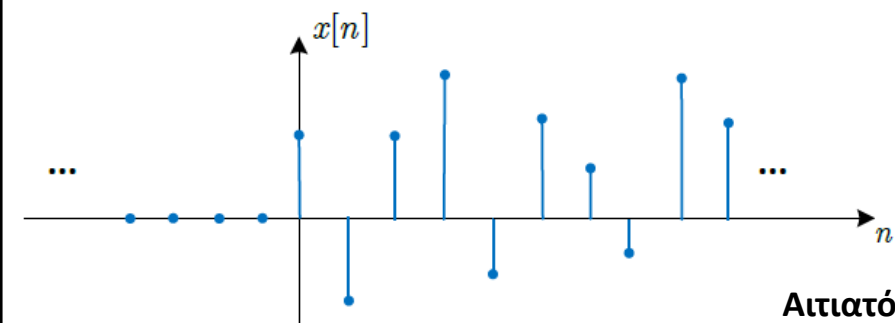
Αριστερόπλευρο → Εσωστρεφές ROC



Αμφίπλευρο → Δακτυλιοειδές ROC

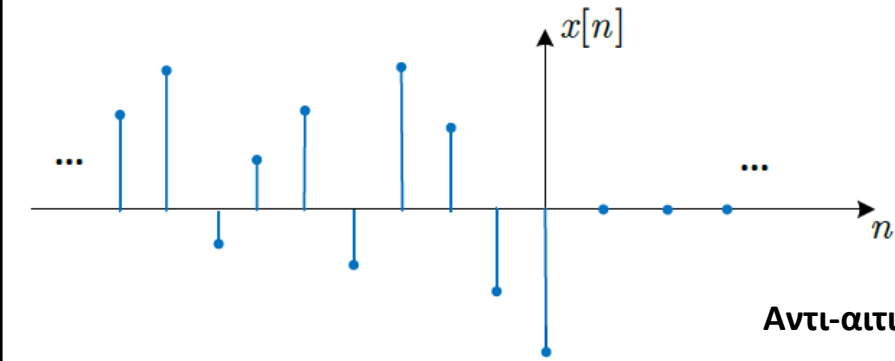
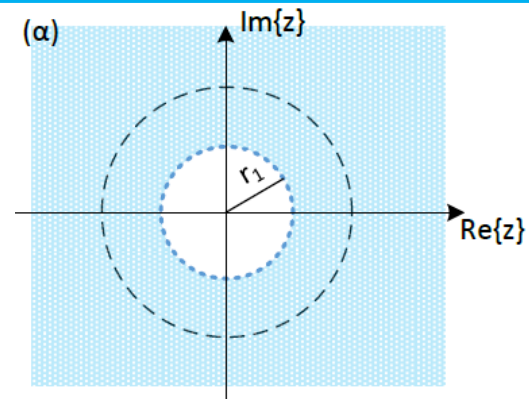


• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης



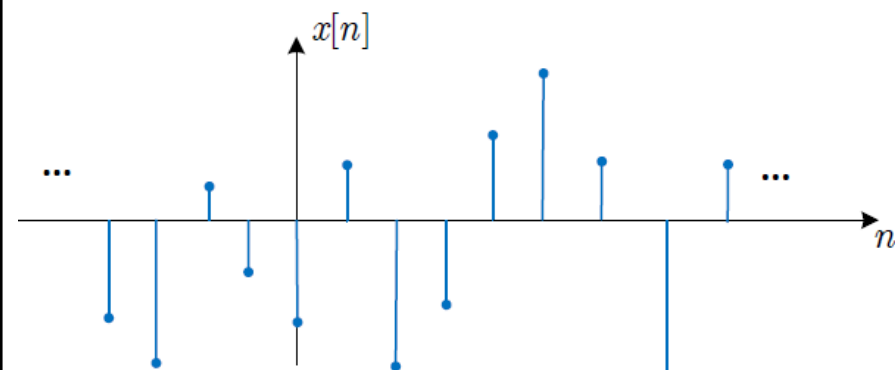
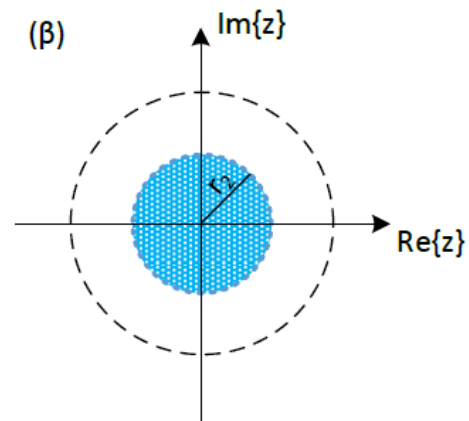
$$x[n] = 0, \\ n < 0$$

Αιτιατό → Εξωστρεφές ROC

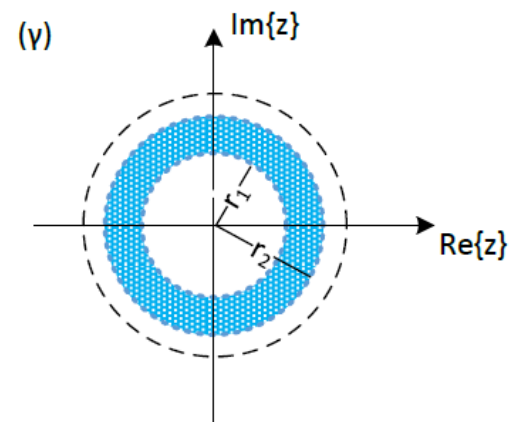


$$x[n] = 0, \\ n > 0$$

Αντι-αιτιατό → Εσωστρεφές ROC



Μη αιτιατό → Δακτυλιοειδές ROC

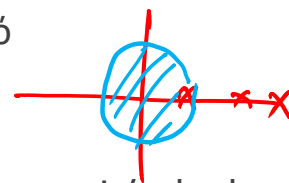
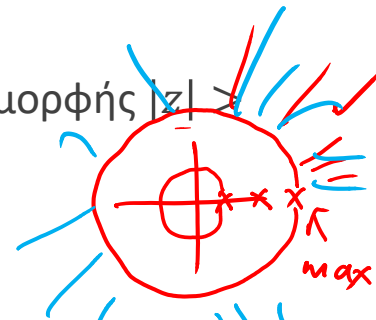
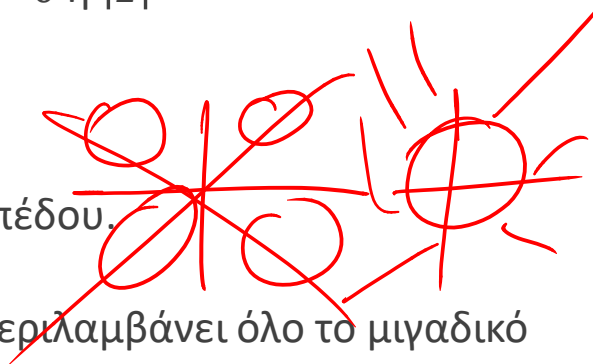


## • Ζεύγη Μετασχηματισμών Z

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$ ✓	1	όλο το z	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n - n_0], n_0 > 0$ ✓	$z^{-n_0}$	$z \neq 0$	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n + n_0], n_0 > 0$	$z^{n_0}$	$z \neq \infty$	πεπερασμένης διάρκειας
$u[n]$ ✓	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$-u[-n - 1]$ ✓	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$	αντι-αιτιατό
$a^n u[n]$ ✓	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$ ✓	$ z  >  a $ ✓	αιτιατό
$-a^n u[-n - 1]$ ✓	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$ ✓	$ z  <  a $ ✓	αντι-αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  < 1$	αντι-αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$ ✓	$ z  >  a $	αιτιατό
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $	αντι-αιτιατό
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $	αιτιατό
$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $	αιτιατό

## • Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

1. Το ROC μπορεί να είναι α) ένας δακτύλιος, β) μια περιοχή εκτός ενός κυκλικού δίσκου, γ) ένας κυκλικός δίσκος, (δ) όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός ίσως των  $|z| = 0$  ή  $|z| = \infty$
2. Το ROC **δεν** πρέπει να περιέχει πόλους!
3. Το ROC πρέπει να είναι μια συνεκτική περιοχή του μιγαδικού επιπέδου.
4. Αν το σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο, τότε το ROC περιλαμβάνει όλο το μιγαδικό επίπεδο, πλην ίσως των σημείων  $z = 0$  ή  $z = \infty$
5. Αν το σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το ROC του είναι εξωστρεφές, δηλ. της μορφής  $|z| > \max|p_k|$ , με  $p_k$  τους πόλους του σήματος
  - a) Το  $z = \infty$  δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αιτιατό
  - b) Το  $z = \infty$  περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αιτιατό
6. Αν το σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το ROC του είναι εσωστρεφές, δηλ. της μορφής  $|z| < \min|p_k|$ , με  $p_k$  τους πόλους του σήματος
  - a) Το  $z = 0$  δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αντι-αιτιατό
  - b) Το  $z = 0$  περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αντι-αιτιατό
7. Αν το σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το ROC του είναι ένας δακτύλιος, δηλ. της μορφής  $|p_i| < |z| < |p_j|$ , με  $p_i, p_j$  δυο πόλους του σήματος με  $|p_i| < |p_j|$ 
  - Πρέπει ασφαλώς να ικανοποιείται η ιδιότητα 2.



• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

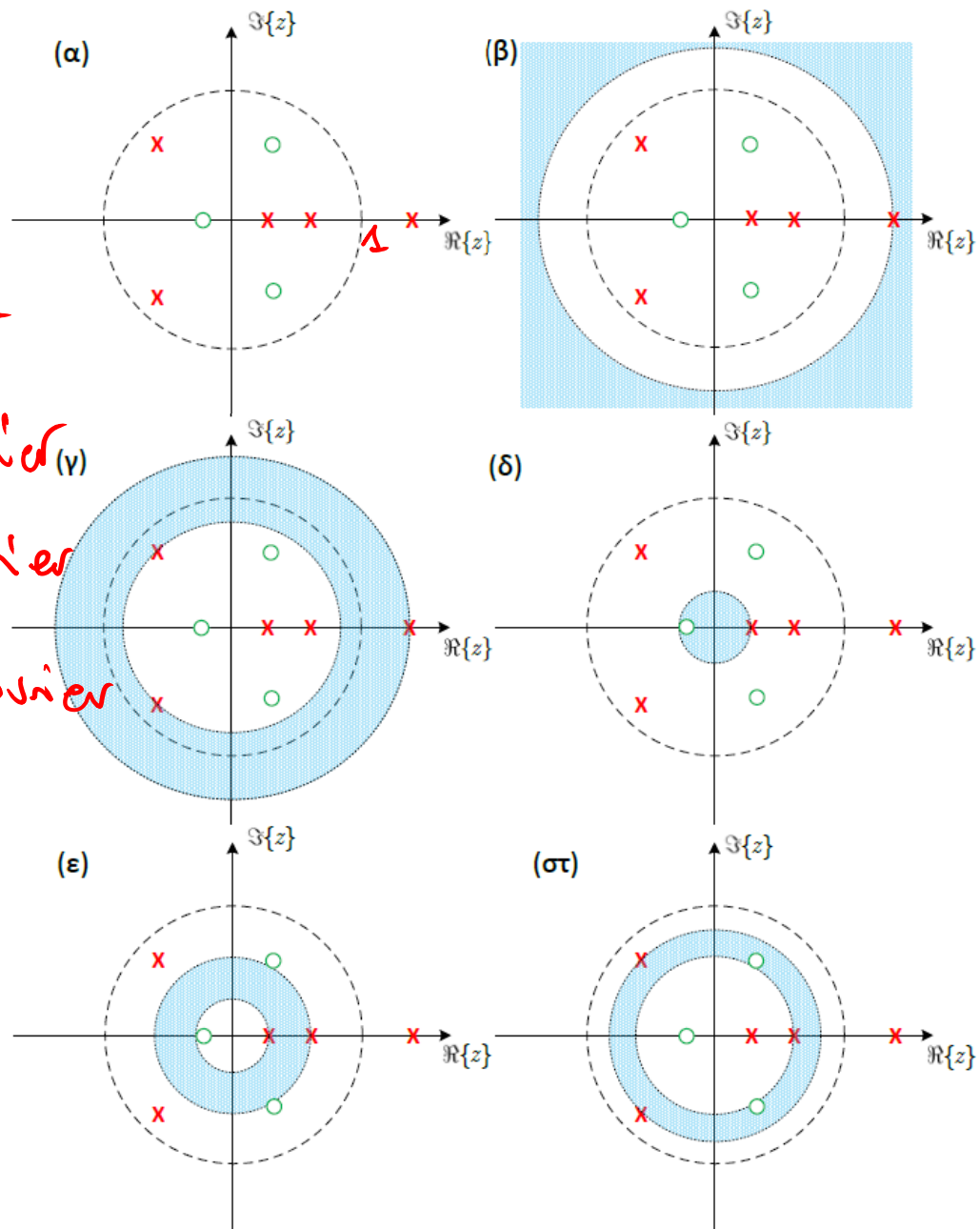
β) Αιτιατό  $|z| > \max |p_k|$   
χωρίς μ.στ. Fourier

γ) Αφαιρη. με μ.στ. Fourier

δ) Μη-αιτιατό, χωρίς μ.στ. Fourier (ν)

ε) Αφαιρησερ., χωρίς μ.στ. Fourier

στ) Αμγ., χωρίς μ.στ. Fourier



Συνεχίζεται... 😊

