Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 11Η

- Μετασχηματισμός Z

- Ως τώρα έχουμε αρκετά εργαλεία ανάλυσης σημάτων και συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας

- Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ακόμα τα εξής προβλήματα:

  1. Υπάρχουν σήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  2. Υπάρχουν συστήματα που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  3. Δεν έχουμε έναν εύκολο τρόπο να σχεδιάζουμε συστήματα

- Αυτό σημαίνει πως για τα μεν σήματα, δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, για τα δε συστήματα, δεν μπορούμε να τα μελετήσουμε!

- Μπορούμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό?

- Μπορούμε να ορίσουμε ένα γενικότερο μετασχηματισμό που να περιλαμβάνει και τέτοιου είδους σήματα και συστήματα?

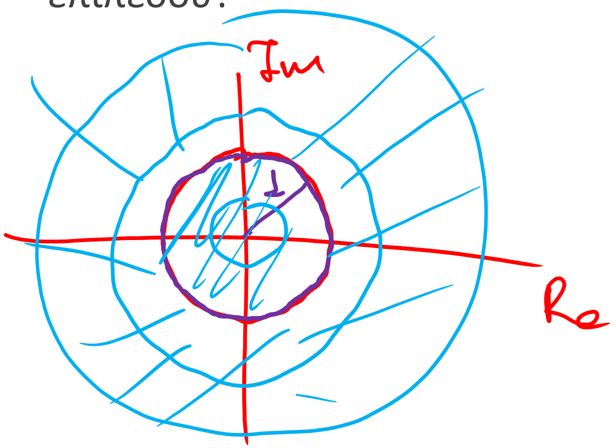
- Κάθε μετασχηματισμός Fourier αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους $e^{-j\omega n}$

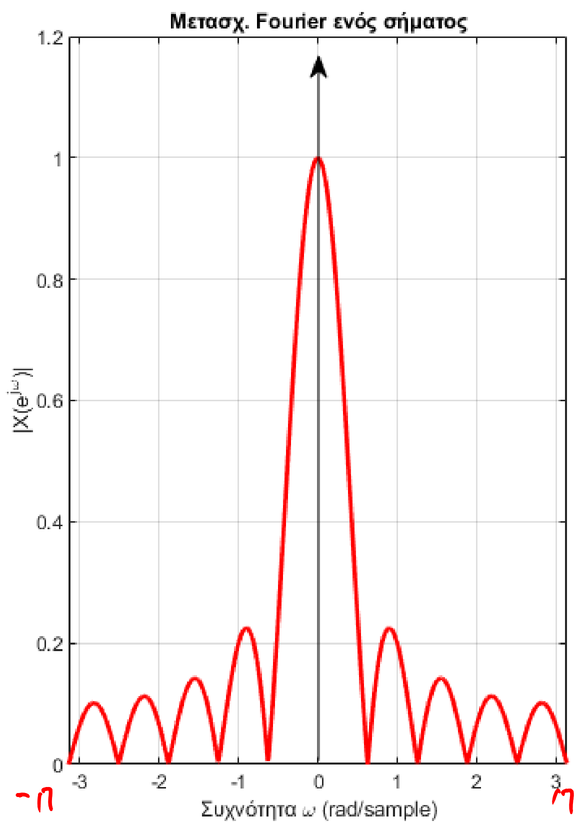
$F\{x[n]\} = \sum_n x[n]\, e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2k\pi)})$

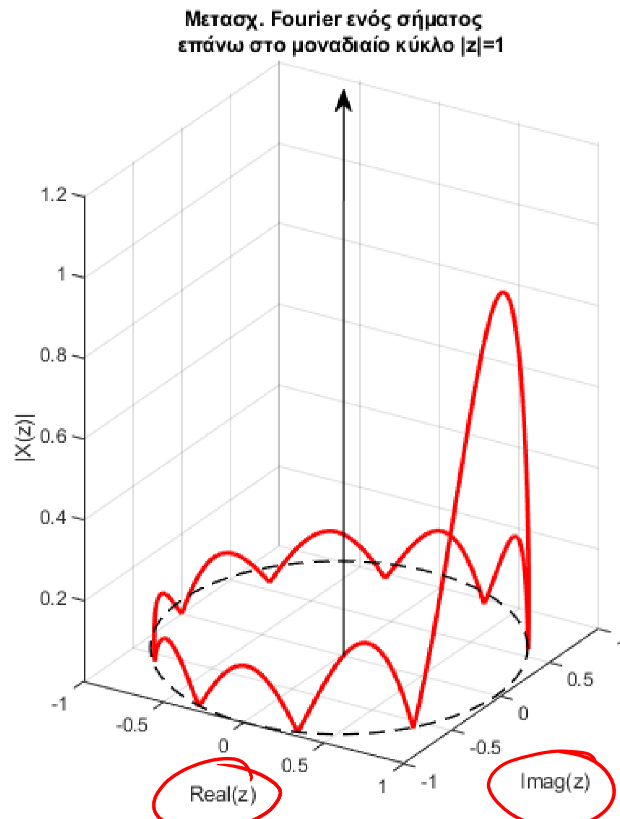
- Λόγω της περιοδικότητάς του, μπορούμε εναλλακτικά να τον φανταστούμε να «ζει» επάνω στον *μοναδιαίο* κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου

- Όλα τα σήματα που έχουμε συζητήσει έχουν μετασχ. Fourier που απεικονίζεται όπως στο σχήμα

- Κι αυτά τα σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier?
  - Μήπως «ζουν» επάνω σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου?







- Έστω το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n]$$

- Το σήμα αυτό δεν έχει μετασχ. Fourier

- Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να το εκφράσουμε συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών σημάτων *μοναδιαίου* πλάτους

- Διαφορετικού πλάτους ίσως?

φάση

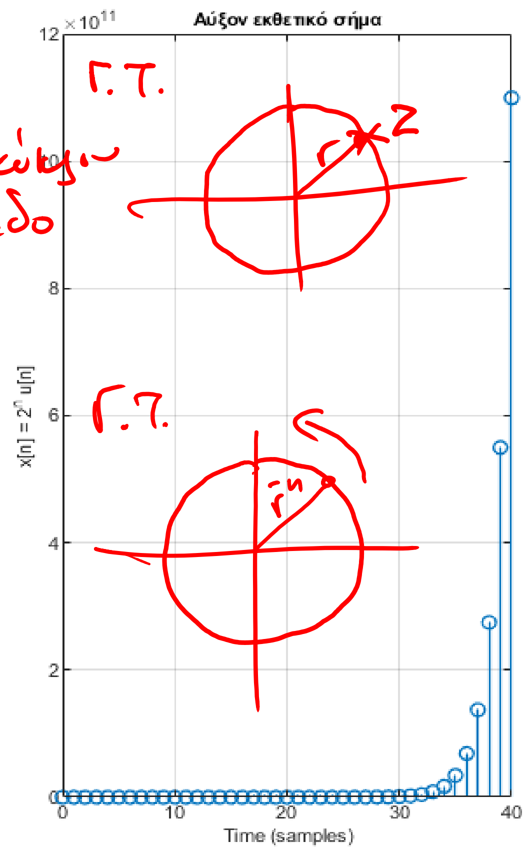
μέτρο

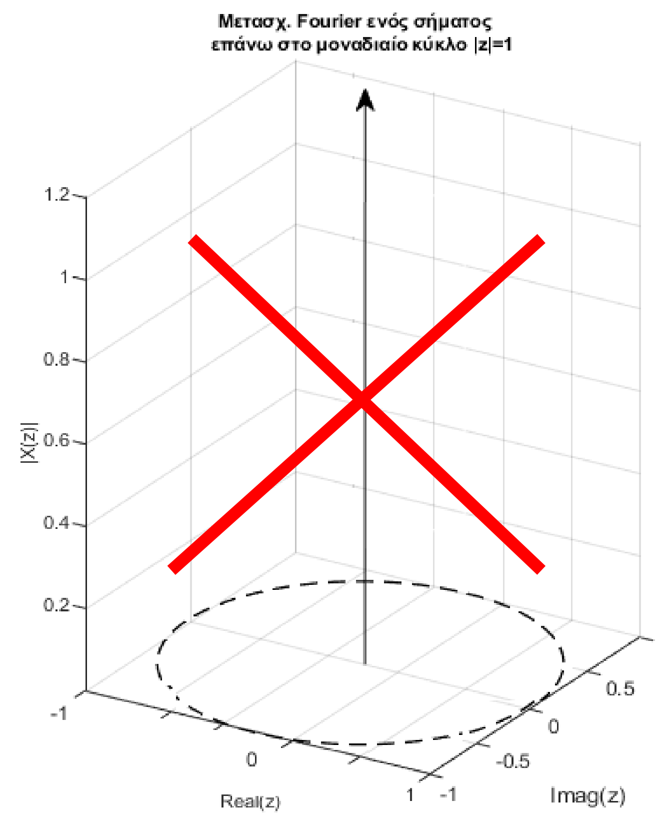
• $z = r e^{j\omega}$ → ένα σημείο κύκλου στο μιγ. επίπεδο με ακτίνα r

• $z[n] = (r e^{j\omega})^{-n}$ $\quad r \in R_+$

$e^{-j\omega n}$ → κύκλος

r^{-n} → ακτίνα





- Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

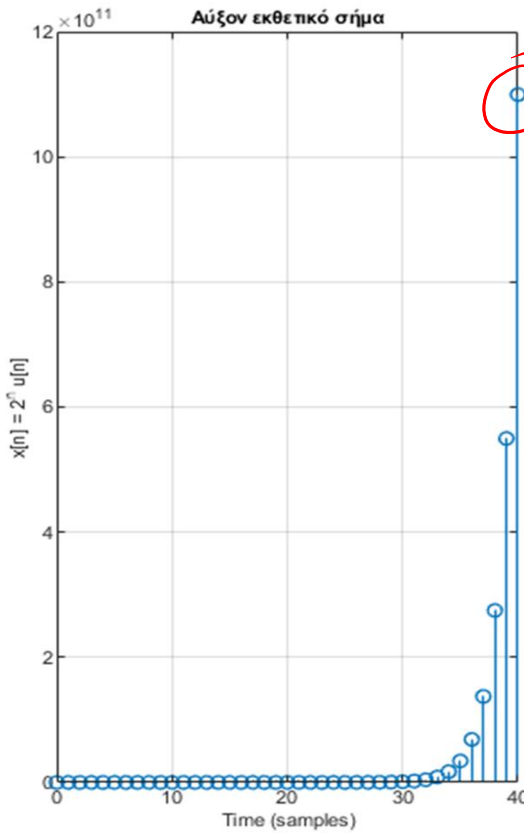
$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

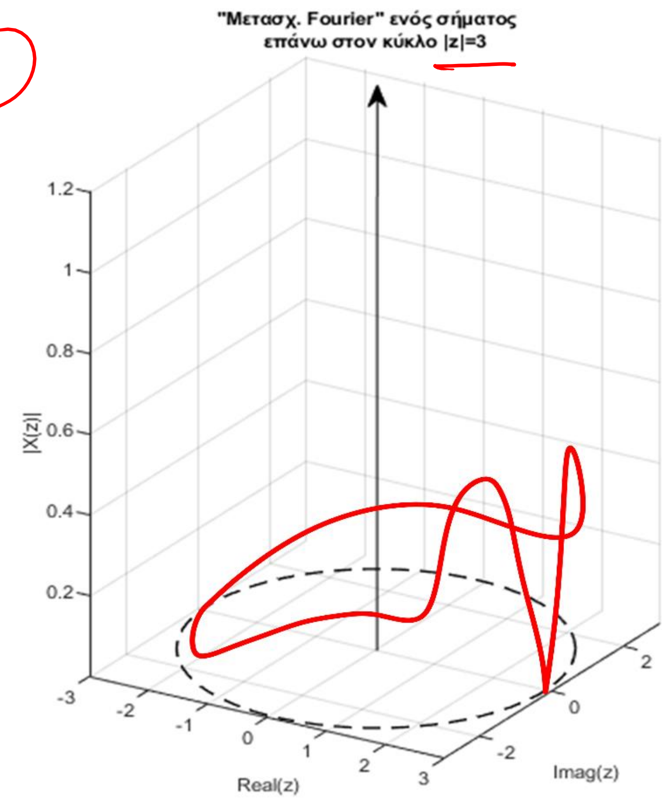
$X(e^{j\omega}) = \sum_n x(n)e^{-j\omega n}$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

- Ορίζεται σε κύκλο ακτίνας r





- Ας ορίσουμε το μετασχηματισμό που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$\left(re^{j\omega}\right)^{-n}, \qquad r \in \Re_+$$

$\sum x[n]e^{-j\omega n} \in$ όταν

$\sum |x[n]| < \infty$

- Αυτός ο μετασχηματισμός θα γράφεται

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

- Πότε υπάρχει αυτός ο μετασχηματισμός?

- Προφανώς όταν

$$\left|X\left(re^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]r^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| < +\infty$$

- Σήματα που μεγαλώνουν πιο αργά από το r^n ικανοποιούν την παραπάνω απαίτηση
  - Στα πλαίσια του μαθήματος, δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη – θα τη θεωρούμε δεδομένη

- Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, το σήμα $x[n]$ θα έχει μετασχηματισμό όταν

$x[n] = 2^n u[n]$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x[n]}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2^n}{r^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{2}{r}\right|^n < +\infty \Leftrightarrow r > 2$$

$u[n] \Rightarrow$

$\left|\frac{2}{r}\right| < 1 \Rightarrow \frac{2}{r} < 1 \Rightarrow \boxed{r > 2}$

- Θέτοντας

$$\boxed{z = re^{j\omega},} \qquad r \in \Re_+$$

$\underbrace{r>2}\ ,\ r=|z|$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\boxed{|z| > 2}$$

και ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης** του Μετασχηματισμού   ROC

- Ο νέος αυτός μετασχηματισμός ονομάζεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C} X(z)z^{n-1}dz$$

  - Δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του αντιστρόφου

- Πίσω στο παράδειγμά μας

$$x[n] = 2^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, |z| > 2$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $a \in \mathbb{R}$

$z = re^{j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Rightarrow \boxed{|z| > |a|}$$

πεδίο σύγκλισης (ROC)

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Γενικά:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z_0) = 0$, z_0 μηδενικά

$Q(z_p) = 0$, z_p πόλοι

$$X(z) = \frac{1}{z^{-1}(z-a)} = \frac{z}{z-a} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$z = 0$ μηδενικό

$z = a$ πόλος

$z = re^{j\omega}$

- Παράδειγμα:

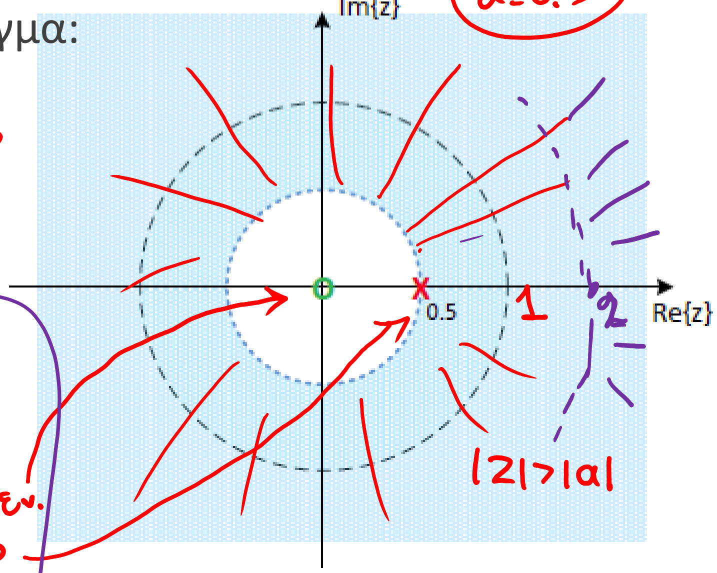
$a = 0.5$

$a^n u[n] \xrightarrow{Z}$

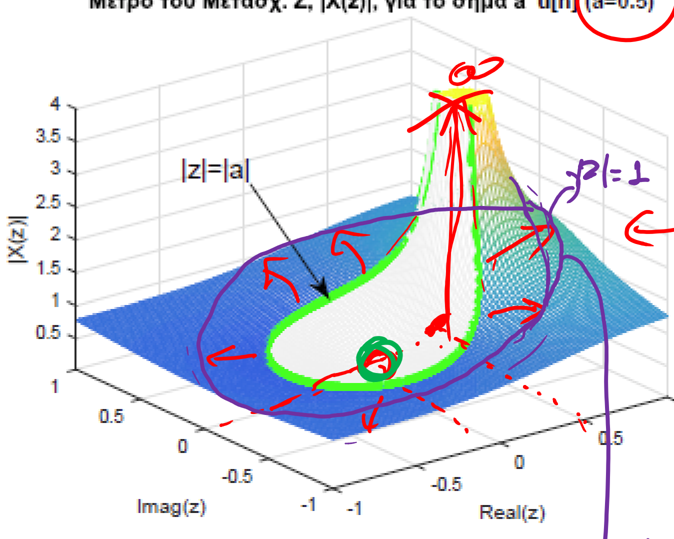
$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

$z=0$ μηδεν.

$z=a$ πόλος



(α′) Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για a = 0.5



(β′) Μέτρο μετασχ. Z.

$X(z) = \frac{z}{z-a}$

$z = x + jy$

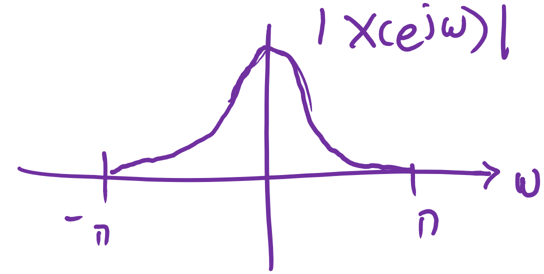
μετ. Four.

$\left.\frac{1}{1-ar^{-1}e^{-j\omega}}\right|_{r=1} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$$\boxed{\begin{array}{c} X(z)\Big|_{r=1} = X(e^{j\omega}) \\ Z \longrightarrow F \end{array}}$$

$a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega})$

$|X(e^{j\omega})|$



- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$, $a \in R$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n \underbrace{u[-n-1]}_{1,\ n \le -1} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n =$$

$n \to -n$

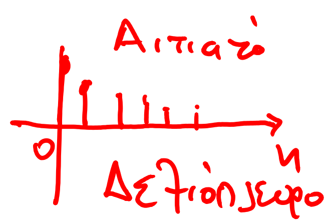
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} \quad , \quad |a^{-1}z| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|a|} < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| < |a|}$$

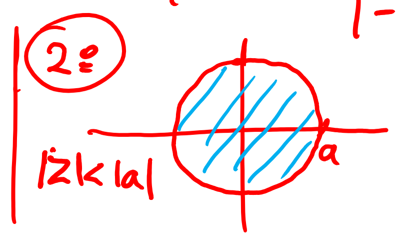
πεδίο σύγκλισης

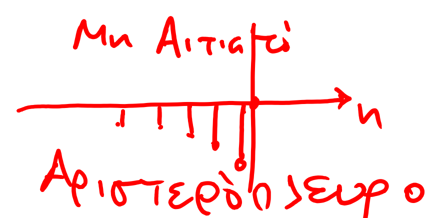
$$= \cancel{-}\frac{\cancel{a^{-1}z}}{\cancel{-a^{-1}z}(1-az^{-1})} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| < |a|$$

2ο ζεύγος: $x[n] = -a^n u[-n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, $\boxed{|z|<|a|}$

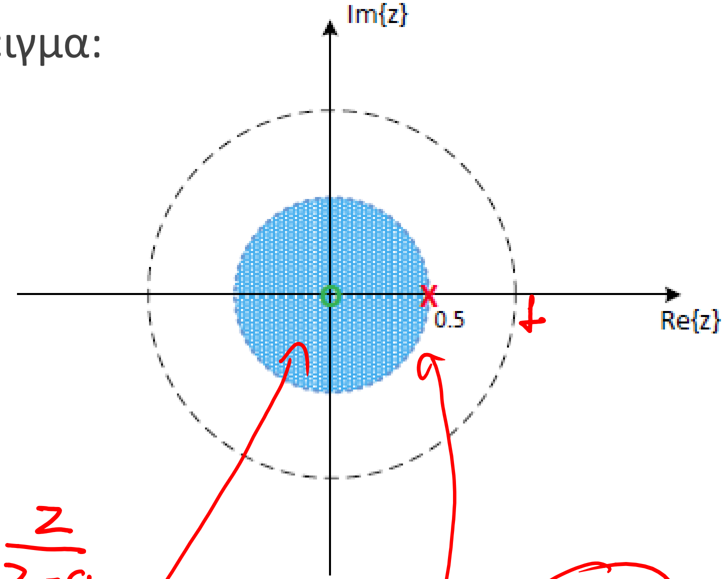
1ο ζεύγος: $x[n] = a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, $\boxed{|z|>|a|}$



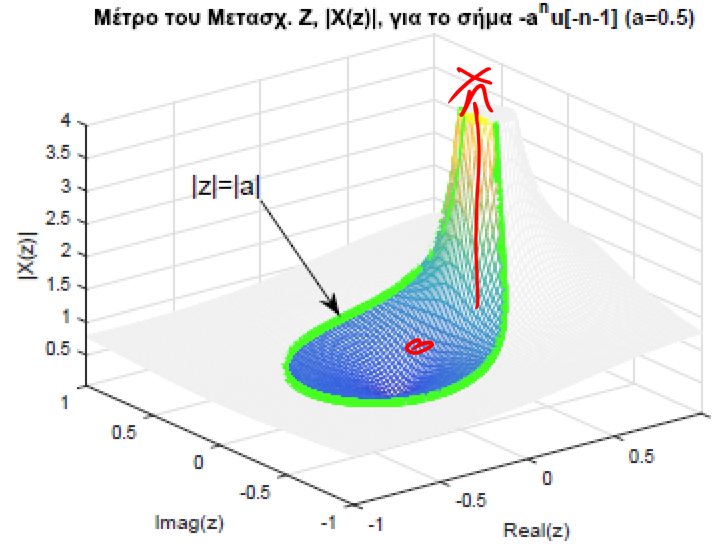




- Παράδειγμα:



(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για $a = 0.5$



(β') Μέτρο μετασχ. Z για $a = 0.5$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}$$

μηδενικό στο $z=0$ γιατί $X(z=0)=0$

πόλο στο $z=a$ " $X(z=a)\to\infty$

$$X(z) = \sum_n x[n]\, z^{-n} \qquad \text{γραμμικός}$$

$$= \sum_n x_1[n]\, z^{-n} + \sum_n x_2[n]\, z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

- Παράδειγμα:

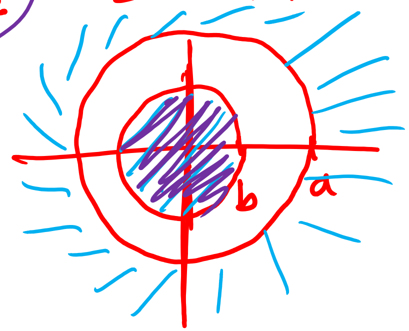
  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$

$$X(z) = Z\{x[n]\} = Z\{a^n u[n]\} + Z\{-b^n u[-n-1]\} =$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} \overset{?}{+} \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

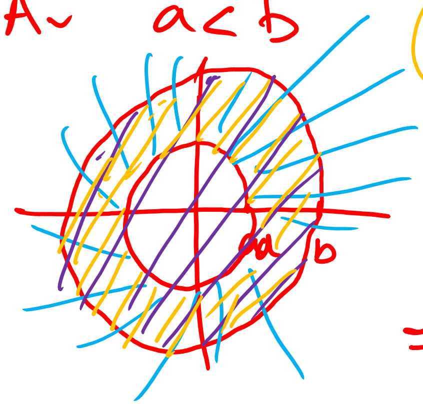
$R_1 : |z| > |a|$ $\quad$ $R_2 = |z| < |b|$

- Αν $a > b$ $\quad$ $R_1 \cap R_2 = \emptyset$



Δεν υπάρχει Z του $x[n]$

- Αν $a < b$ $\quad$ $R_1 \cap R_2 = |a| < |z| < |b|$



δακτύλιος

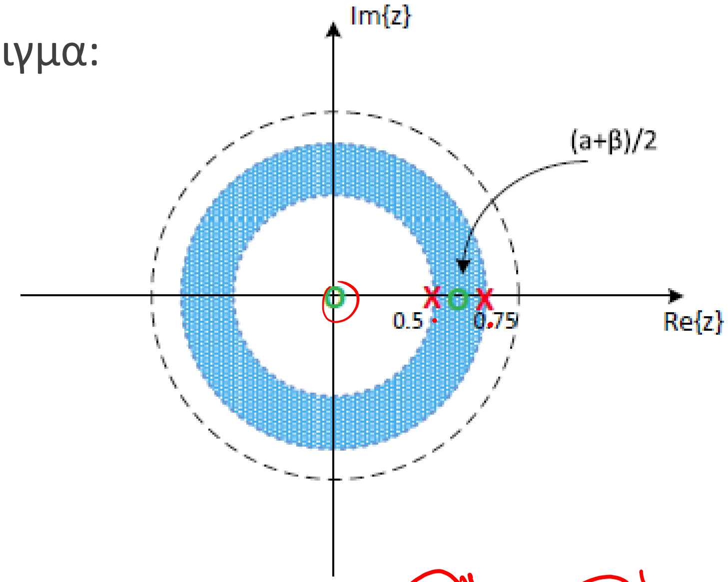
$$X(z) = \frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} = \frac{z^{-1}(2z-(a+b))}{z^{-2}(z-a)(z-b)} =$$

$$= 2\,\frac{z\cdot\left(z-\frac{a+b}{2}\right)}{(z-a)(z-b)}$$

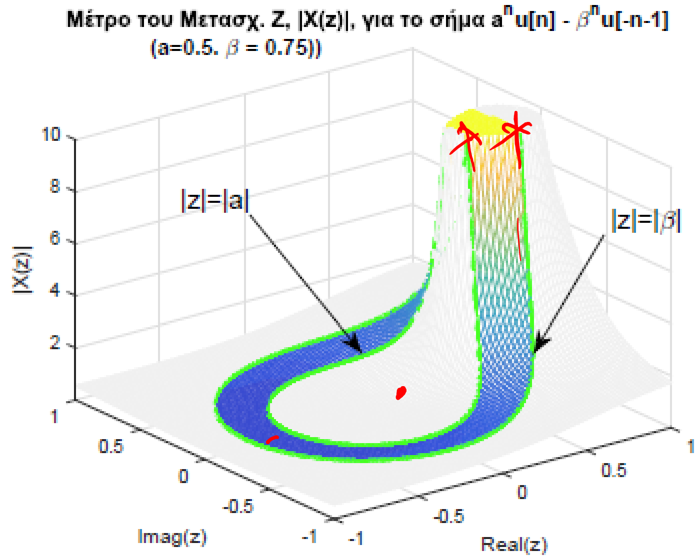
Μηδενικά: $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{a+b}{2}$

Πόλους: $z_1 = a$, $z_2 = b$

- Παράδειγμα:



(α′) Πεδίο σύγκλισης, με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.



(β′) Μέτρο μετασχ. Z με $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$.

$$X(z) = 2\frac{z\cdot\left(z-\frac{a+b}{2}\right)}{(z-a)(z-b)}$$

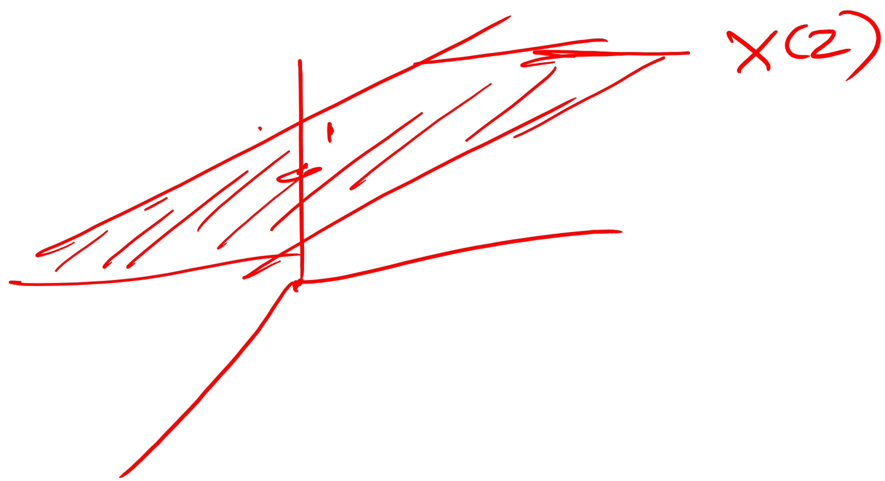
$|a|<|b|$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος $x[n] = \delta[n]$

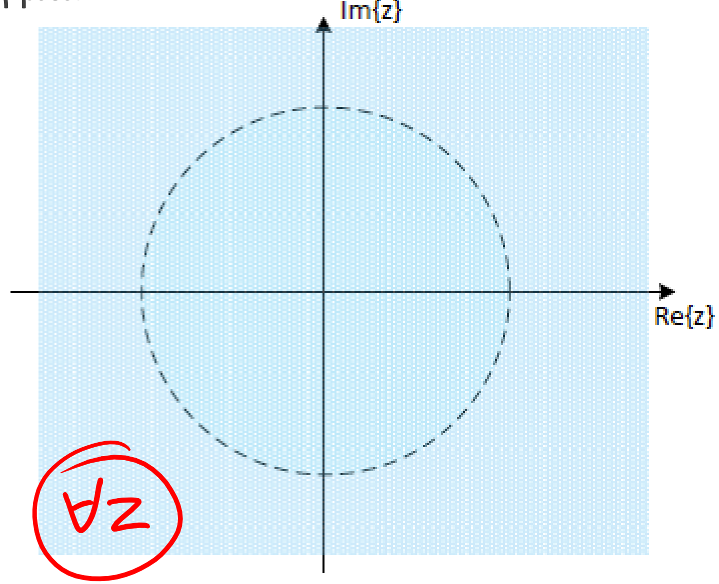
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \quad \forall z$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

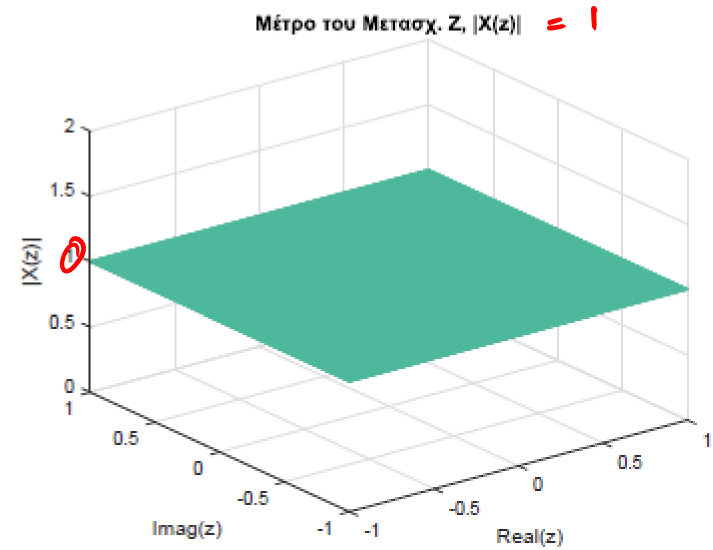
$$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 1, \quad \forall z$$



- Παράδειγμα:



(α′) *Πεδίο σύγκλισης.*



(β′) *Μέτρο μετασχ. Z σήματος* $x[n] = \delta[n]$.

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$$

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & , n = n_0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x[n] = \delta[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{z^{n_0}} \quad \cdot \begin{cases} n_0 > 0 & , |z| > 0 \\ n_0 < 0 & , |z| < \infty \end{cases}$$

∘ $\boxed{n_0 > 0}$: $\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^{n_0}} = 0$, Επομένως όταν $z \to \infty$ $X(z) = 0$

Άρα $z \to \infty$ έχουμε μηδεν.

Πόλοι, $\underline{z = 0}$, n_0 πόλους

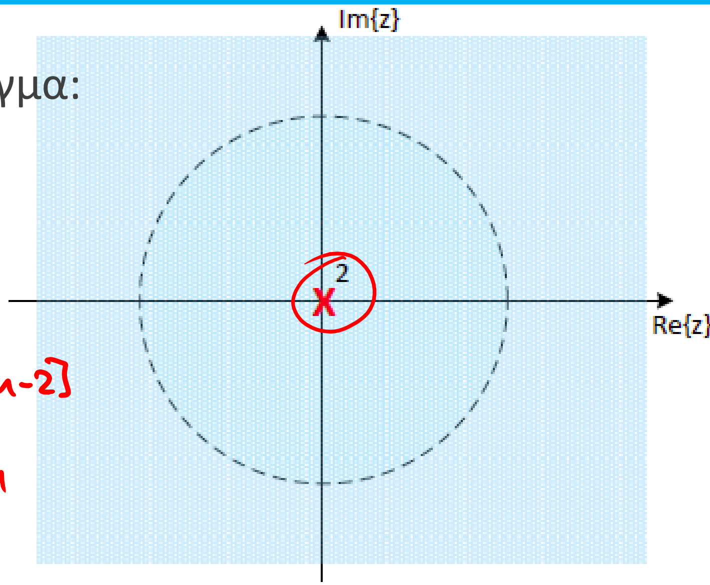
Άρα το πεδίο σύγκλισης $|z| > 0$

- Παράδειγμα:

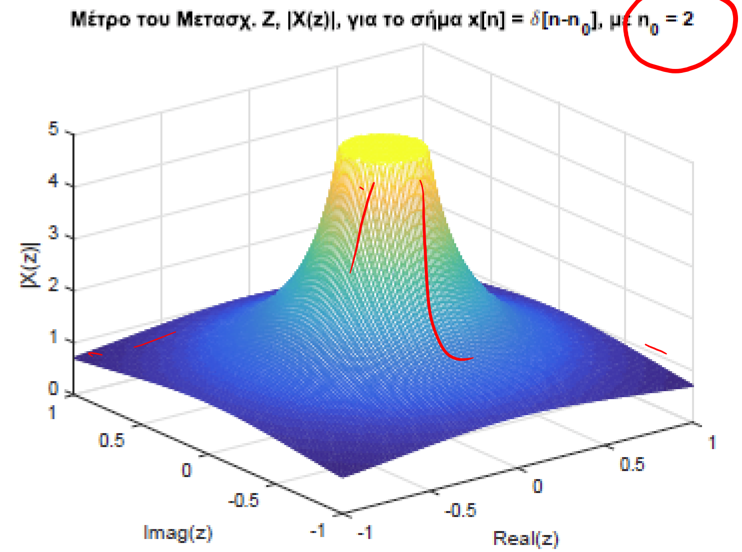
$\frac{1}{z^2}$

$\delta[n-2]$

0 1 2 n



(α') Πεδίο σύγκλισης.



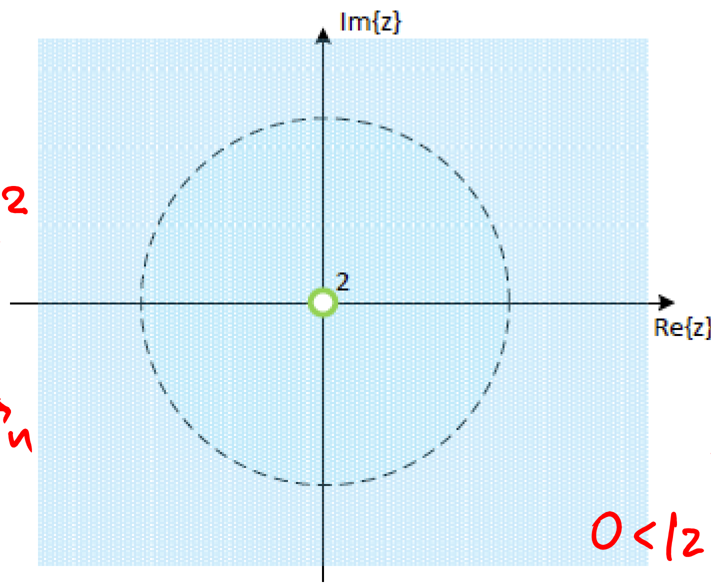
(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n - n_0]$, για $n_0 = 2$.

$|z|>0$

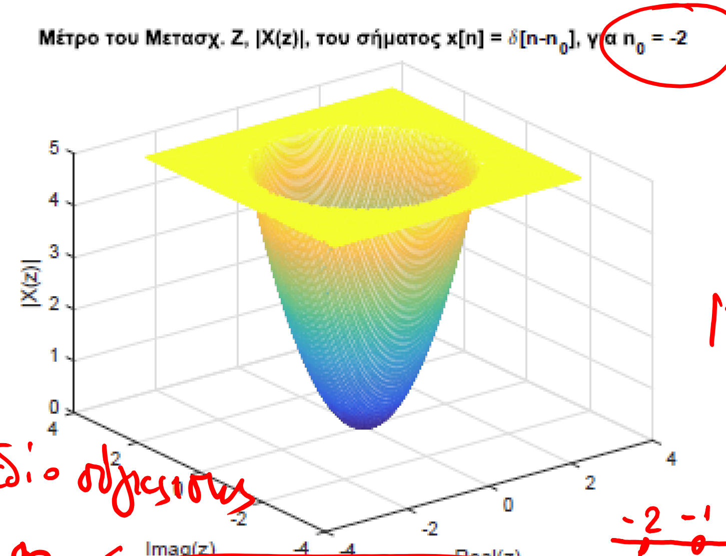
$\frac{1}{z^{-2}} = z^2$

$\delta[n+2]$

-2 -1 0 1 2 n



(α') Πεδίο σύγκλισης.



$|z|<\infty$

Πεδίο σύγκλισης

$0<|z|<\infty$

$2\delta[n-1]$

-2 -1 0 1 n

$-2\delta[n+2]$

(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος $x[n] = \delta[n-n_0]$, για $n_0 = -2$.

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} \xrightarrow[z=e^{j\omega}]{} X(e^{j\omega})$

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Για παράδειγμα: $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \xleftarrow{z=e^{j\omega}} \quad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- Μπορούμε πάντα να το κάνουμε αυτό?
  - ΌΧΙ!
  - Πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$ $(a=1)$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**

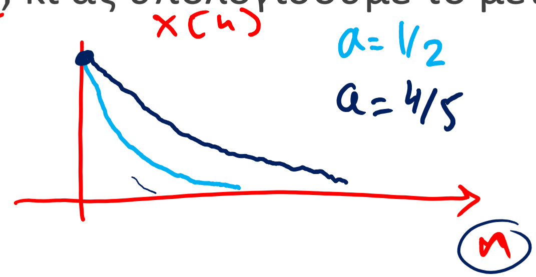
  - Για το σήμα $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ δείξαμε ότι

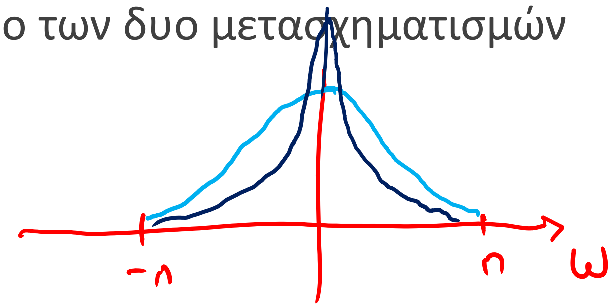
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

  - Ας βάλουμε τιμές στον πόλο α, κι ας υπολογίσουμε το μέτρο των δυο μετασχηματισμών

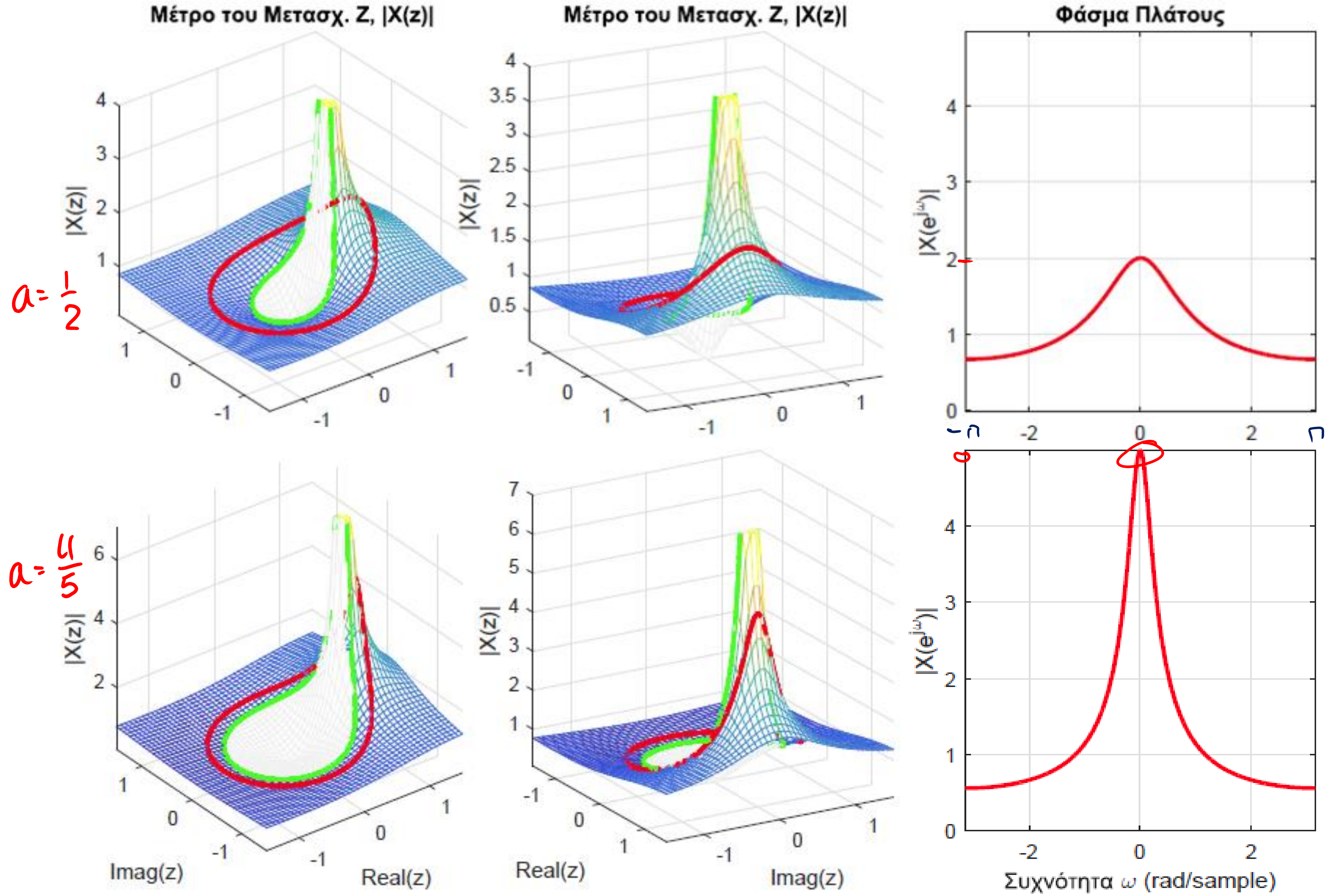
  - Έστω ότι $a = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{4}{5}$

  - Δείτε τι συμβαίνει…

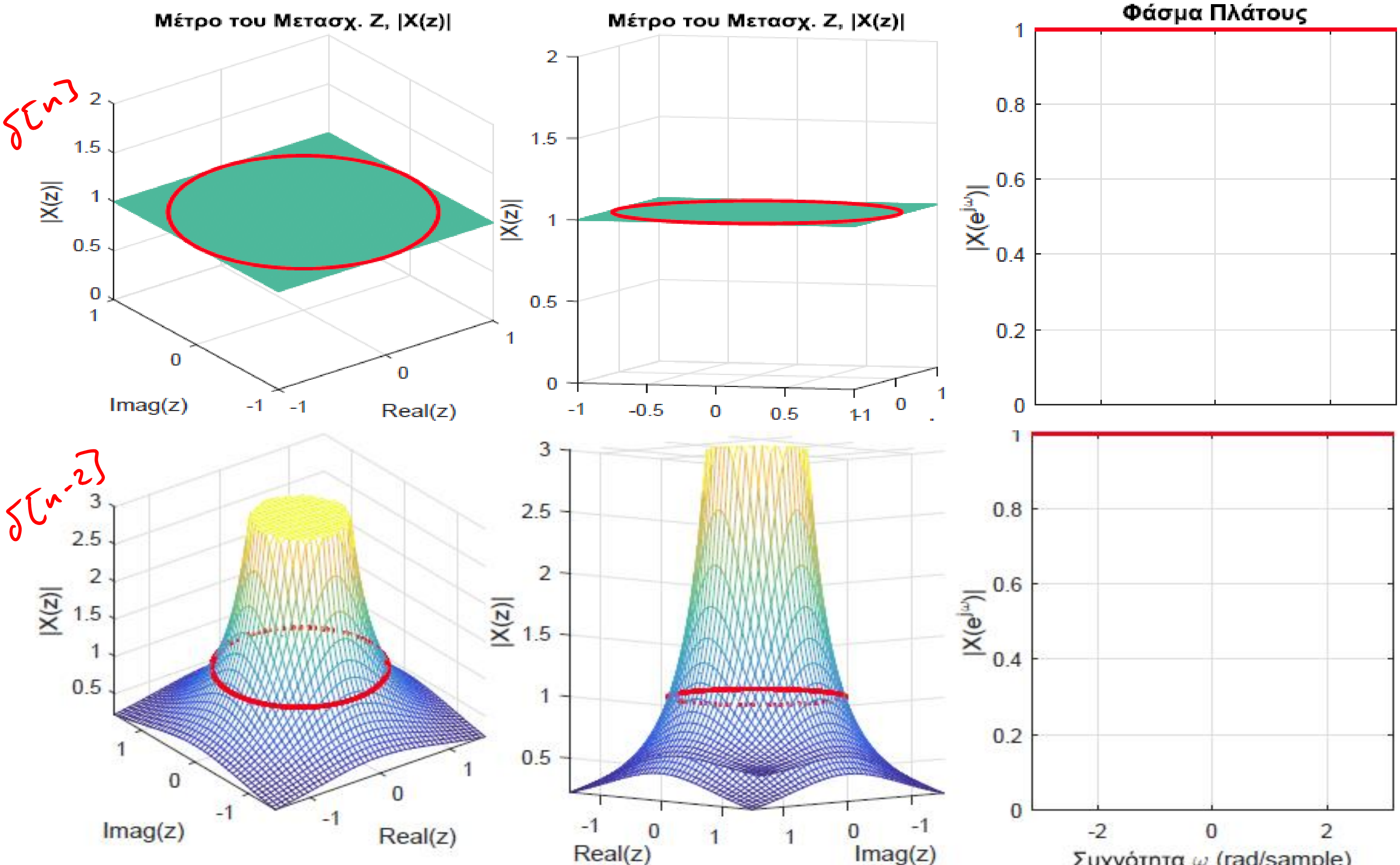




- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**



- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Τι περιμένετε να δείτε για τα σήματα $x[n] = \delta[n],\ x[n] = \delta[n-2]$?



Συνεχίζεται... ☺