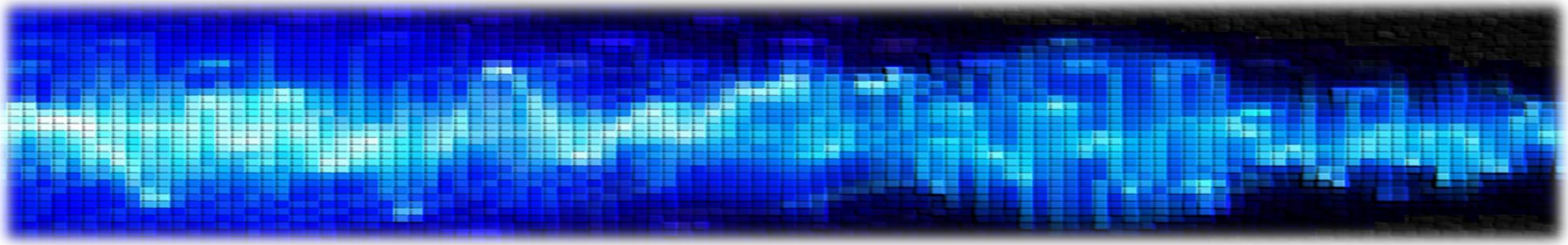
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

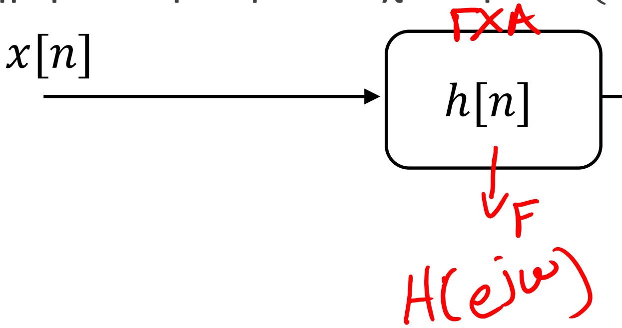
## ΔΙΑΛΕΞΗ 9Η



- Συστήματα στο χώρο του Fourier

- Έχουμε πλέον στη διάθεσή μας ένα εργαλείο μελέτης σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

- Γνωρίζουμε μια «εικόνα» των συστημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Η περίφημη απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$




$$y[n] = x[n] * h[n]$$

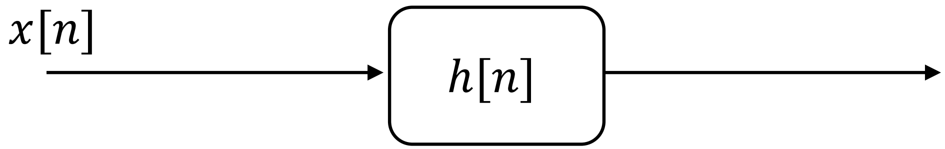
F

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Θα πρέπει ήδη να έχετε καταλάβει ότι η απόκριση σε συχνότητα δεν είναι κάτι περισσότερο από το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Θυμηθείτε:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**




$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ας αναλύσουμε την έξοδο:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

πολική μορφή

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\varphi_Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\varphi_X(e^{j\omega})+\varphi_H(e^{j\omega}))}$$

- Οπότε

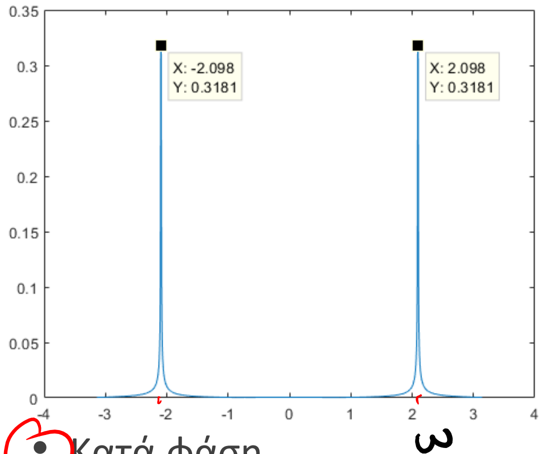
$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|$$
$$\varphi_Y(e^{j\omega}) = \varphi_X(e^{j\omega}) + \varphi_H(e^{j\omega})$$

- Άρα

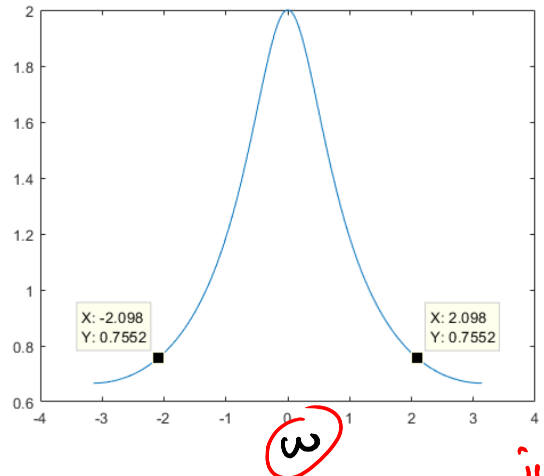
1. Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ δρα πολλαπλασιαστικά στο φάσμα πλάτους της εισόδου
2. Η απόκριση φάσης $\varphi_H(e^{j\omega})$ δρα αθροιστικά στο φάσμα φάσης της εισόδου

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Ας δούμε ένα εποπτικό παράδειγμα
    - Κατά πλάτος

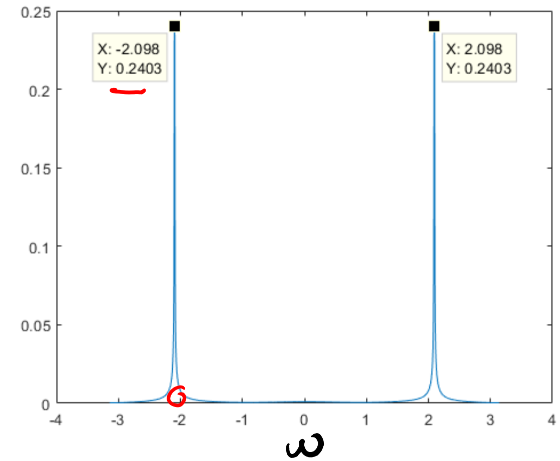
Είσοδος $X(e^{j\omega})$ → Σύστημα $H(e^{j\omega})$ = Έξοδος $Y(e^{j\omega})$




•

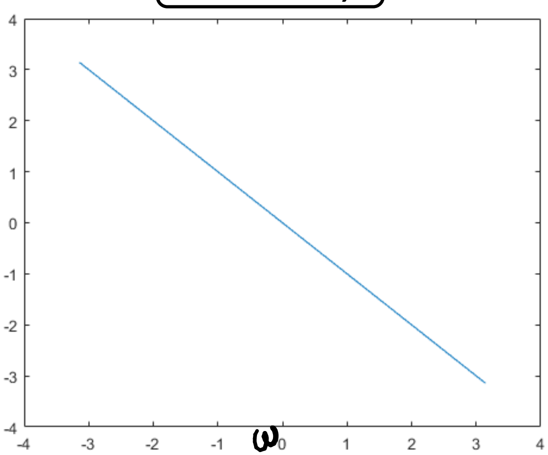



=

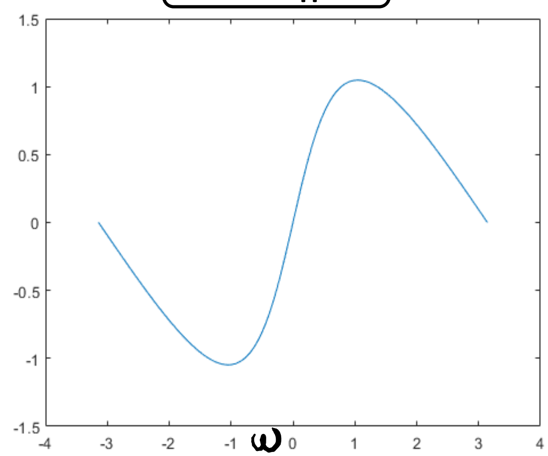



- Κατά φάση

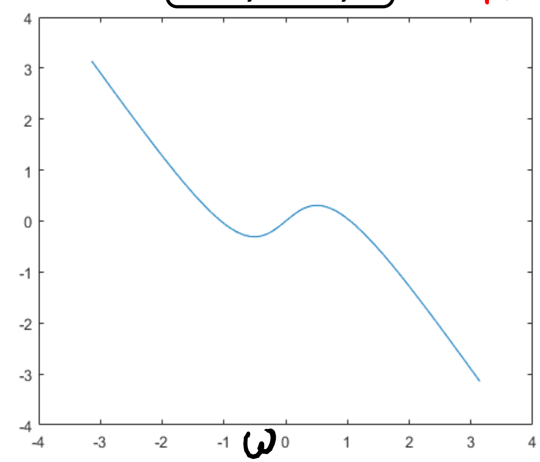
Είσοδος $\angle X(e^{j\omega})$ Σύστημα $\angle H(e^{j\omega})$ Έξοδος $\angle Y(e^{j\omega})$




+




=



# ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

- Η σχέση

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})}$$

μας δίνει έναν εύκολο και γρήγορο τρόπο για να βρούμε την απόκριση σε συχνότητα, και κατά συνέπεια την κρουστική απόκριση, ενός ΓΧΑ συστήματος

- Πώς? Λύνοντας ως προς $H(e^{j\omega})$, δηλ.

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}}$$

και στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές εύρεσης του $h[n]$, με συνηθέστερη το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

- Ας δούμε ένα παράδειγμα…

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:

$a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$|a|<1$

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ το οποίο δίνει έξοδο $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$
Βρείτε την κρουστική απόκριση.

$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ (1)

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$x[n-n_d] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_d}$

$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

(1) $H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow$

$\Rightarrow h[n] = F^{-1}\left\{H(e^{j\omega})\right\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\} - \frac{1}{2}F^{-1}\left\{\frac{e^{-j\omega 1}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\} =$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**

  - Γνωρίζουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια εξίσωση διαφορών με μηδενικές αρχικές συνθήκες

  - Ας εφαρμόσουμε τον DTFT σε μια γενική εξίσωση διαφορών

$$F\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = F\left\{\sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]\right\}$$

$x[n-k] \rightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega k}$

$$\updownarrow F \qquad\qquad \updownarrow F$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}$$

  - Έτσι

$$\boxed{\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$ $S_1$

Βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

$S_0$: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$ θέτουμε $x[n]=\delta[n]$ οπότε $y[n]=h_0[n]$

$h_0[n] - \frac{1}{2}h_0[n-1] = \delta[n]$ Σ.Α.Η $h[n]=0$ $n<0$

$n=0$: $h_0[0] - \frac{1}{2}\cancel{h_0[-1]}^{0} = \delta[0] = 1 \Rightarrow h_0[0] = 1$

Χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ χαρ. ρίζα

$h_0[n] = c\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $n \geq 0$

$h_0[0] = 1$

$\Rightarrow c\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow c = 1$

$S_0$: $h_0[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow h[n] = h_0[n] - \frac{1}{4}h_0[n-1]$ $S_1$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Εξισώσεις διαφορών**
  - Παράδειγμα:

$$h_0[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad , \quad h[n] = h_0[n] - \frac{1}{4} h_0[n-1] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad *$$

Με χρήση μετ. Fourier

Sd:

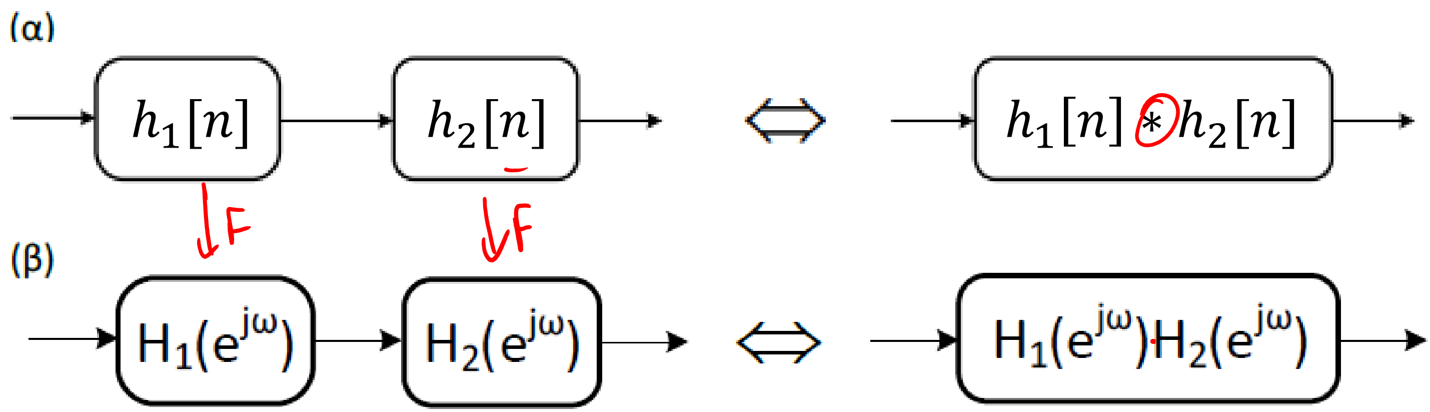
$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4} x[n-1] \xrightarrow{F}$$

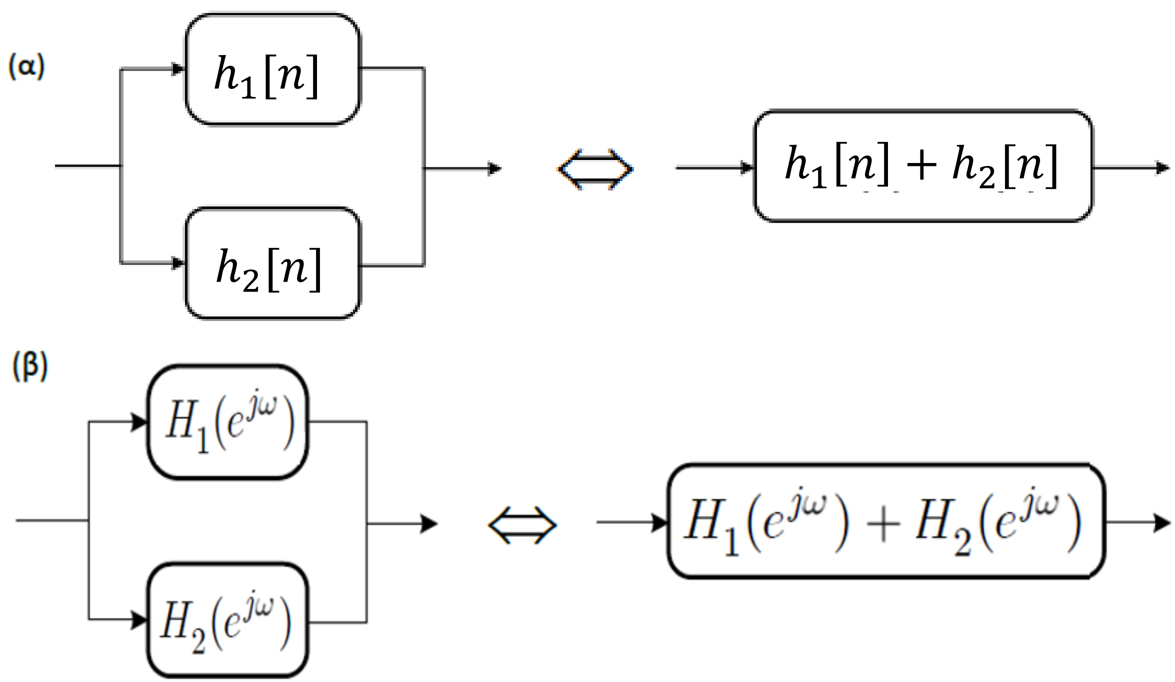
$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(\omega) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} - \frac{1}{4} \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h[n] = F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad *$$

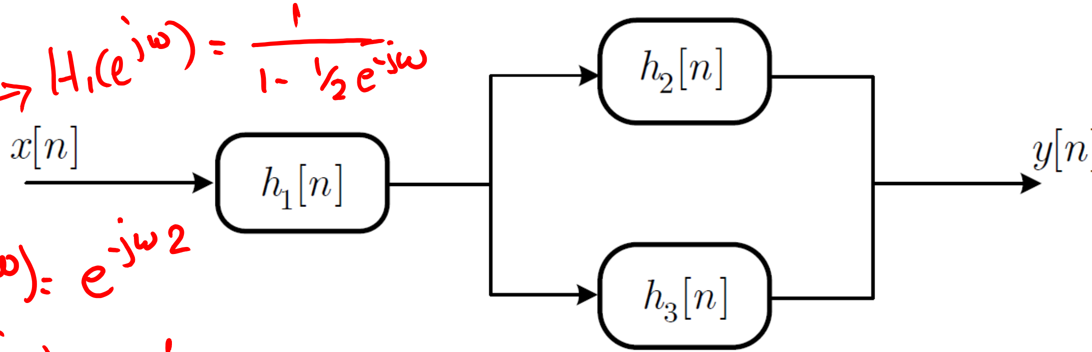
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**



- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το σύστημα της εικόνας, με

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$




$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

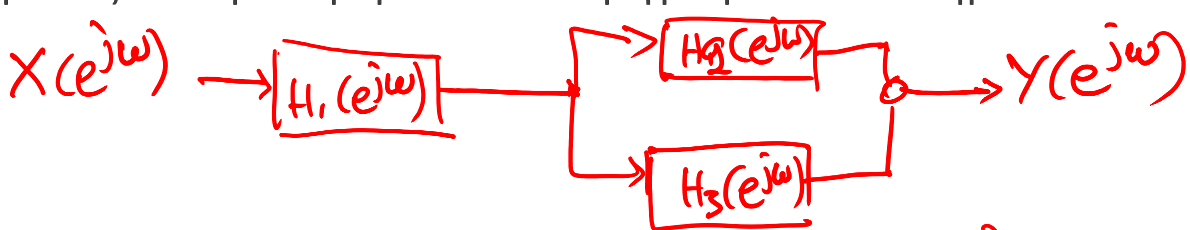
$$h_2[n] = \delta[n-2], \xrightarrow{F} H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 2}$$

$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xrightarrow{F} H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

α) υπολογίστε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος

β) την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος

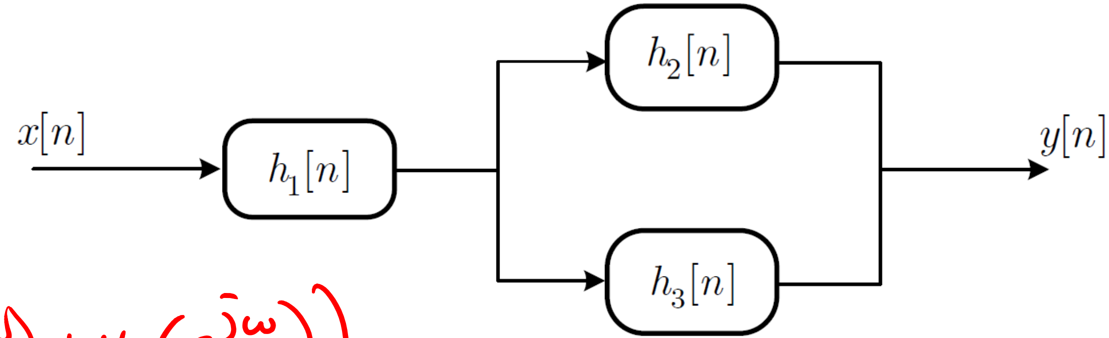
γ) μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα




$$X(e^{j\omega}) \cdot H_1(e^{j\omega}) \cdot \left(H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})\right) = Y(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left(H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})\right)$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:




α)

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left( H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega}) \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left( e^{-j\omega 2} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right) = \frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

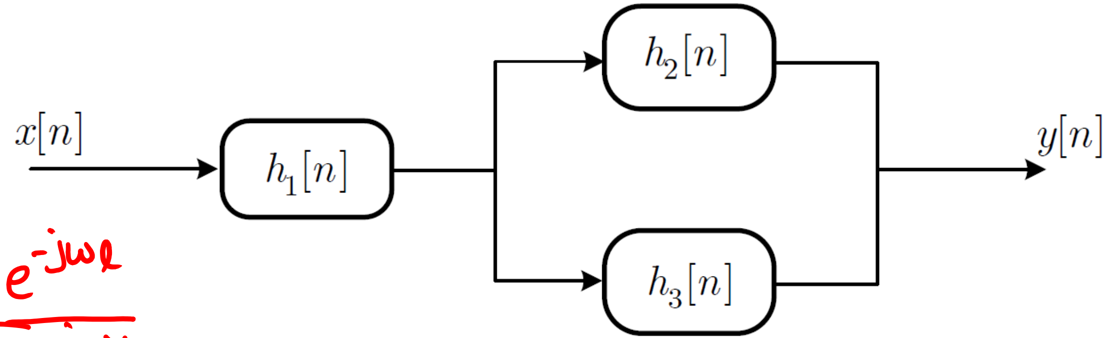
β)

$$h[n] = F^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)} u[n-2] + F^{-1}\left\{ \frac{A \to 2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B \to (-1)}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)} u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - 1\left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n]}$$

$$A = \frac{1}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \cdot \cancel{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \Bigg|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}\cdot 2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Διατάξεις Συστημάτων**
  - Παράδειγμα:




γ) Εξίσωση Διαφορών.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{\ell=0}^{M} b_\ell e^{-j\omega \ell}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot e^{-j\omega k}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\cdot e^{-j2\omega} + 1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} =$$

$$= \frac{1+e^{-j2\omega}-\frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \Rightarrow$$

$$\left\{ e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{F^{-1}} x[n-k] \right.$$

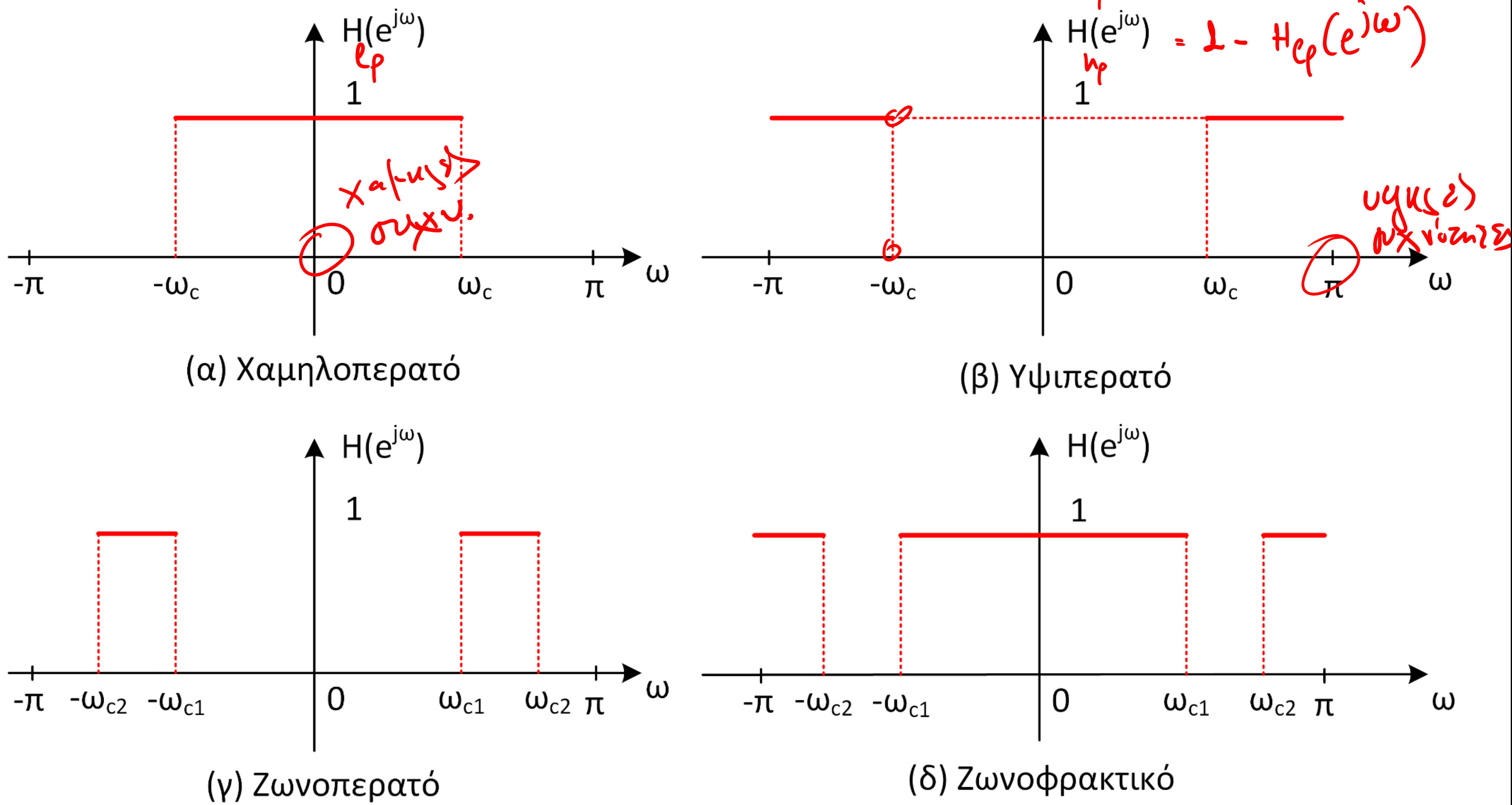
$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3]$$

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**

$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$

  - Μια σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας




(α) Χαμηλοπερατό

(β) Υψιπερατό

(γ) Ζωνοπερατό

(δ) Ζωνοφρακτικό

# • ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας

- Ήδη γνωρίζουμε το ζεύγος DTFT για το χαμηλοπερατό ιδανικό φίλτρο

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \overset{F}{\leftrightarrow} \underline{H_{lp}(e^{j\omega})} = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$

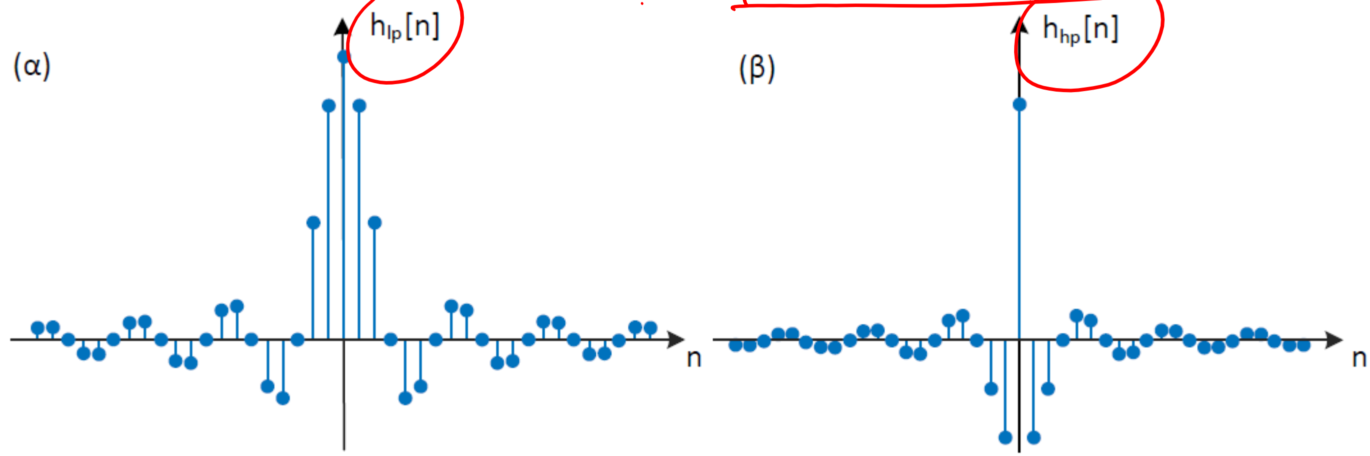
- Το υψιπερατό φίλτρο μπορεί να γραφεί ως

$$\underline{H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})}$$

$F^{-1}$

- Επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

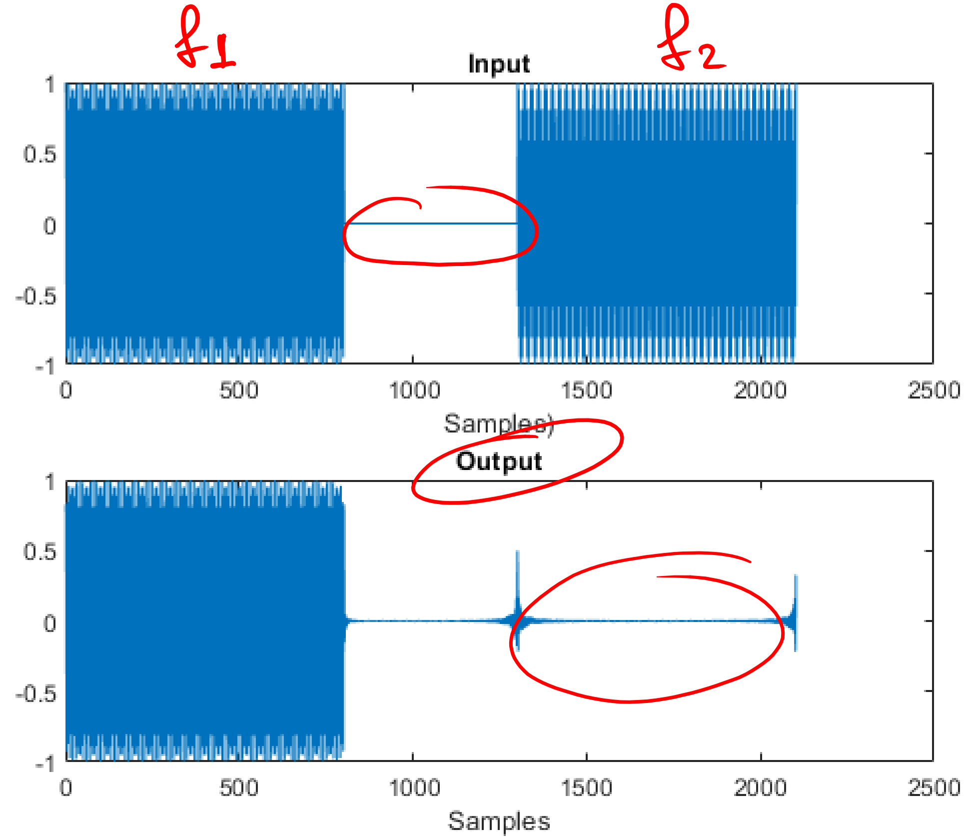
$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \boxed{\delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}}$$

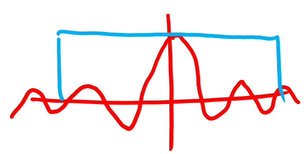


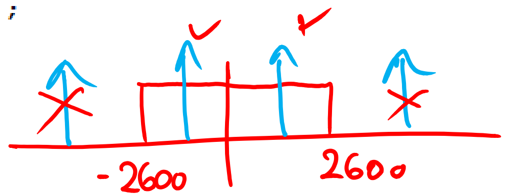
- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**

```
% Ideal lowpass filter
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tones
f1 = 1800; %Hz
f2 = 2800; %Hz

% Sampling frequency and time axis
fs = 8000;
t = 0:1/fs:0.1; % .1 seconds

% Discrete time frequencies
w1 = 2*pi*f1/fs;
w2 = 2*pi*f2/fs;

% Sound
x = [cos(2*pi*f1*t) zeros(1,500) cos(2*pi*f2*t)];

% Lowpass filter
fc = 2600; % Hz
wc = 2*pi*fc/fs;
n = -length(x)/2:length(x)/2;
hlp = wc/pi * sinc(wc*n/pi);

% Filter!
y = conv(x,hlp,'same');

% Show!
figure; subplot(211);
plot(x); xlabel('Samples)'); title('Input');
subplot(212);
plot(y); xlabel('Samples'); title('Output');
```

$\omega_1$
$\omega_2$





- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας – Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνότητας**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα ως $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος αν η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h[n] = \frac{4\sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{(n-1)\pi}$$

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

(ιδιοσυνάρτηση) $e^{j\omega_0 n} \rightarrow \boxed{\phantom{h}} \rightarrow H(e^{j\omega_0}) \cdot e^{j\omega_0 n}$

$h_{ep}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \overset{F}{\longleftrightarrow} H_{ep}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ ①

$h[n] = 4 h_{ep}[n-1] \quad \omega_c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = F\{4 h_{ep}[n-1]\} = 4 H_{ep}(e^{j\omega}) e^{-j\omega} \Rightarrow$

① $\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$H(e^{j\pi/4}) = 4e^{-j\frac{\pi}{4}} = \begin{cases} \rightarrow |H(e^{j\pi/4})| = 4 \\ \rightarrow \varphi_H(e^{j\pi/4}) = -\pi/4 \end{cases}$

Άρα $y[n] = 2|H(e^{j\pi/4})| \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \varphi_H(e^{j\pi/4})\right) + 8\,|H(e^{j\frac{3\pi}{4}})| \cdot \sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5} + \varphi_H(e^{j\frac{3\pi}{4}})\right)$

0

$\Rightarrow y[n] = 2 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y[n] = 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)}$

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ