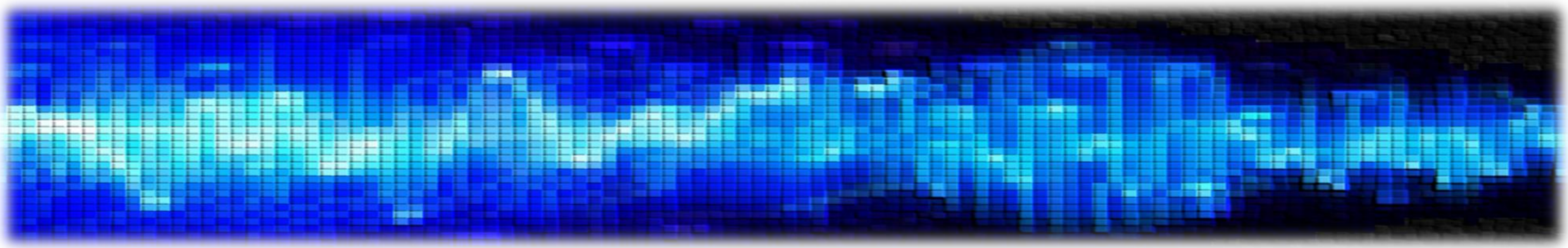
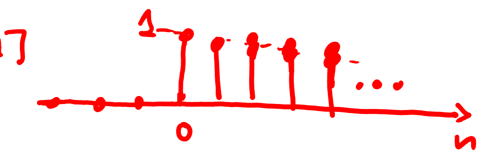
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

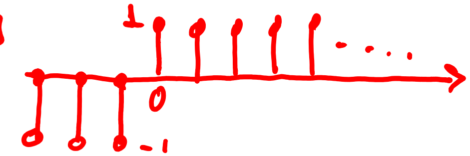
ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η



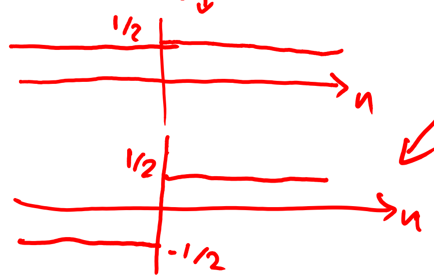
- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ιδιότητες

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = u[n]$.

$u[n]$  $\begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

$\mathrm{sgn}[n]$  $\begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$

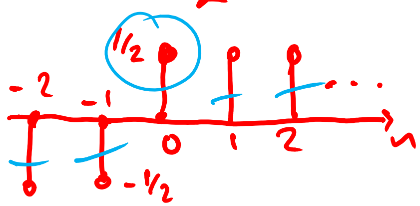
$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n] \Rightarrow F\{u[n]\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n]\right\} =$$



$F\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$

$$= \pi\delta(\omega) + F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n]\right\} \quad (1)$$

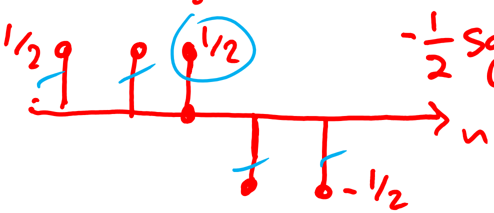
$$\delta[n] = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n] - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n-1] \Rightarrow F\{\delta[n]\} = \underbrace{F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n]\right\}}_{S(e^{j\omega})} - \underbrace{F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n-1]\right\}}_{e^{-j\omega}\cdot S(e^{j\omega})} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 1 = S(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}S(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (2)$$

$-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n-1]$



$$\boxed{F\{u[n]\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

$$x[n-n_d] \to X_{n_d}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n-n_d]}_{n-n_d=k \Rightarrow n=k+n_d} \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\omega(k+n_d)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\omega k} \cdot e^{-j\omega n_d} =$$

$$= e^{-j\omega n_d} \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\omega k}}_{X(e^{j\omega})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{x[n-n_d]\} = e^{-j\omega n_d} \cdot X(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

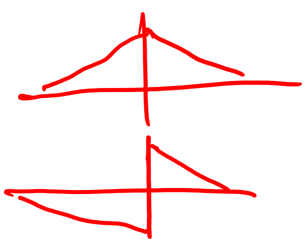
Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n\sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \lvert r\rvert<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$
$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}-j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$k-$οστή παραγώγιση στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\dfrac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-e^{j\omega}}X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert, \\ \phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n] = x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n] = -x[-n]$, πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n] = \mathrm{Ev}\{x[n]\}$, πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n] = \mathrm{Od}\{x[n]\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
$\boxed{\text{Θεώρημα Parseval}}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 =$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$



$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα

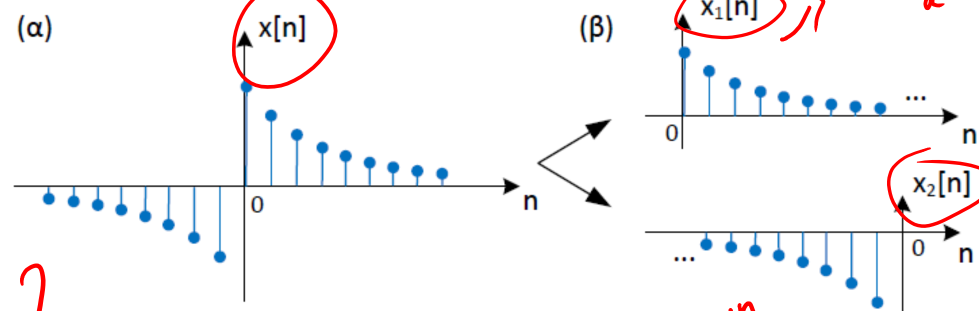
$$w[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \quad \xrightarrow{F}$$

$$W(e^{j\omega}) = \sum_n w[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_n \left(a x_1[n] + b x_2[n] \right) e^{-j\omega n} =$$

$$= a \underbrace{\sum_n x_1[n] e^{-j\omega n}}_{X_1(e^{j\omega})} + b \cdot \underbrace{\sum_n x_2[n] e^{-j\omega n}}_{X_2(e^{j\omega})} =$$

$$= a \cdot X_1(e^{j\omega}) + b \cdot X_2(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Γραμμικότητα
  - ○ Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα



$a^n u[n]$, $a<1$

$-b^n u[-n-1]$, $b>1$

$$X(e^{j\omega}) = F\{x_1[n]\} + F\{x_2[n]\}$$

$$= F\{a^n u[n]\} + F\{-b^n u[-n-1]\} =$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-be^{-j\omega}}, \quad a<1,\ b>1$$

$$= \frac{1-be^{-j\omega} + 1-ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})} = \frac{2-(a+b)e^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})} = \frac{P(\omega)}{N(\omega)}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n-n_d] \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_d} \cdot X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

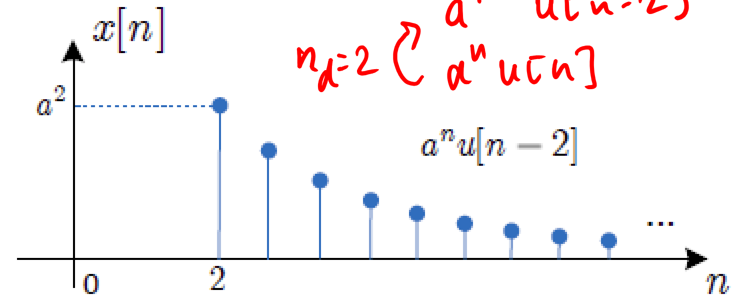
$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$$

$$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \quad \checkmark$$

$$\varphi_y(e^{j\omega}) = \varphi_x(e^{j\omega}) \underbrace{- \omega n_d}_{\text{γραμμικός όρος φάσης}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Χρονική μετατόπιση
  - ○ Βρείτε το Μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα

$n_d = 2$ $\begin{cases} a^{n-2}u[n-2) \\ a^n u[n] \end{cases}$



$$Y(e^{j\omega}) = F\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a|<1$$

$$y[n-2] = a^{n-2}u[n-2] = a^{-2}\Big(\underbrace{a^n u[n-2]}_{x[n]}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{y[n-2]\} = a^{-2}\underbrace{F\{(a^n u[n-2])\}}_{X(e^{j\omega})} \Rightarrow$$

$$e^{-j2\omega}\cdot Y(e^{j\omega})$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{a^2\cdot e^{-j2\omega}}{1-ae^{-j\omega}}} \xleftrightarrow{F} x[n] = a^n u[n-2]$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$\underbrace{x[n]\cdot e^{j\omega_0 n}}_{} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

διαμόρφωση (modulation)

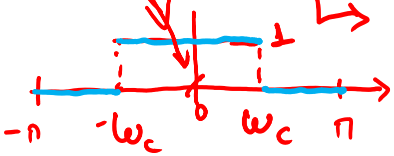
μετακίνηση του μετ. Fourier στο χώρο της συχνότητας κατά ω_0

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: Μετατόπιση στη συχνότητα
    - ○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ αν

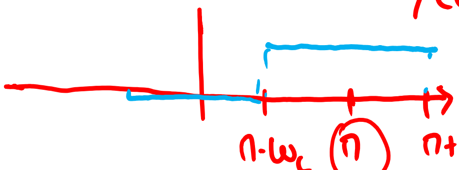
$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

χαμηλές συχνότητες

$X(e^{j\omega})$ ↳ βαθυπερατό (lowpass)



$Y(e^{j\omega})$ → υψιπερατό (highpass)



υψηλές συχνότητες

→ $-\omega_c < \omega < \omega_c$

$-\omega_c < \omega - \pi < \omega_c \Rightarrow$

$\Rightarrow -\omega_c + \pi < \omega < \pi + \omega_c$

$\downarrow F^{-1}$

$$\boxed{x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}}$$

← βαθυπερατό (lowpass)

$$y[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)}) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{j\pi n} x[n] \Rightarrow$$

ω_0

$$\Rightarrow y[n] = (\underbrace{e^{j\pi}}_{-1})^n x[n] \Rightarrow y[n] = (-1)^n x[n] \Rightarrow$$

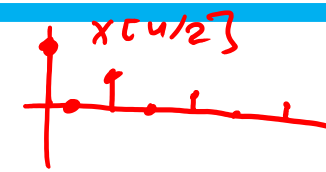
$$\Rightarrow \boxed{y[n] = (-1)^n \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}}$$

← υψιπερατό (highpass)

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[kn] \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\frac{\omega}{k}})$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: στάθμιση στο χρόνο
  - Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x\left[\frac{n}{2}\right]$, αν $x[n] = a^n u[n], \ \ |a| < 1$

$$F\{x[n]\} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

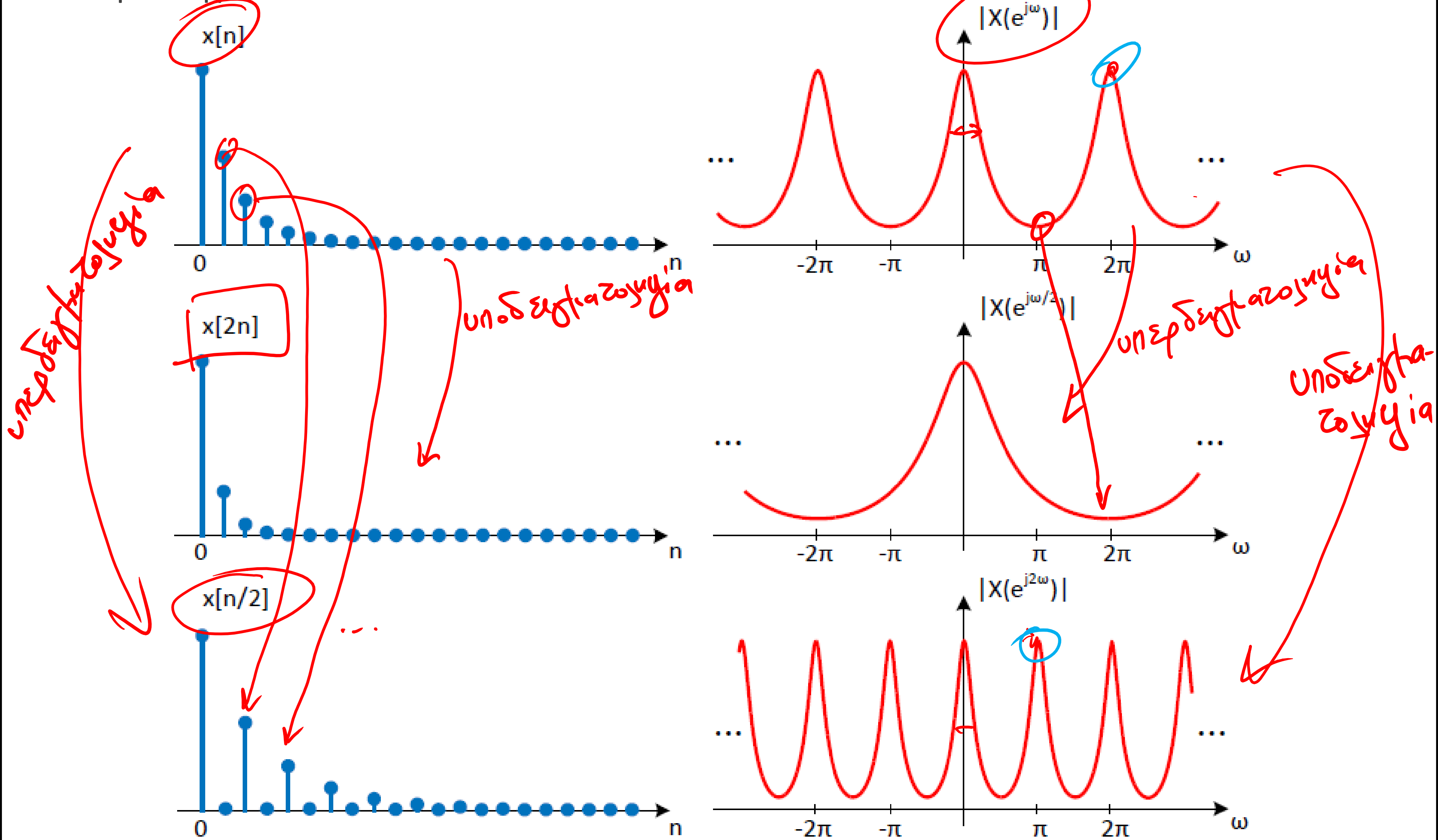
$$F\{x[kn]\} = X\left(e^{j\frac{\omega}{k}}\right)$$

Εδώ $k = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F\left\{x\left[\frac{n}{2}\right]\right\} = \frac{1}{1 - a e^{-j\frac{\omega}{1/2}}} = \frac{1}{1 - a e^{-j2\omega}}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: συνέλιξη στο χρόνο

$$y[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})$$

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$F\{x[n] * y[n]\} = X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα: θεώρημα Parseval

$$z \cdot z^* = |z|^2$$

$$\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{X(e^{j\omega})}_{\sum_n x[n] e^{-j\omega n}} \cdot \underbrace{X^*(e^{j\omega})}_{\sum_k x^*[k] \cdot e^{*-j\omega k}} \cdot d\omega$$

Από εδώ μπορείτε να συνεχίσετε την απόδειξη

Συνεχίζεται... ☺