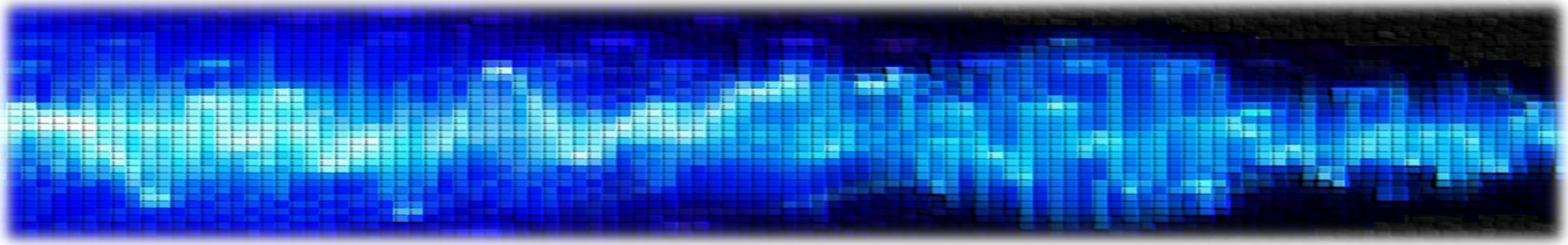
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 5&6Η



- Αιτιατότητα ΓΧΑ συστημάτων
- Απόκριση σε Συχνότητα

• Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

- Για δυο εισόδους $x_1[n], x_2[n]$ και δυο αντίστοιχες εξόδους $y_1[n], y_2[n]$, το σύστημα θεωρείται αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \;\; \forall\, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = y_2[n] \;\; \forall\, n < n_0$$

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε αυτό είναι αιτιατό, δηλ.

$$x[n] = 0, \qquad n < n_0 \;\; \Rightarrow \;\; y[n] = 0, \qquad n < n_0$$

- Αν θέλαμε να εκφράσουμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, ποια θα ήταν αυτή;
- Σκεφτείτε ότι ένα σύστημα αποκρίνεται την κρουστική του απόκριση $h[n]$ αν στην είσοδό του εμφανιστεί η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$
  - Όμως αυτή εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$ και όχι νωρίτερα

$y[n] = 2x[n] - x[n+1]$ Δεν είναι αιτια.

ΓΧΑ $y[n] = h[n] * x[n]$

- Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνον αν

$$\boxed{h[n] = 0, \qquad n < 0}$$

- **Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης ΓΧΑ Συστήματα**
- Αν η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ένα **FIR (Finite Impulse Response) σύστημα**

- Παρατηρήστε ότι στα FIR συστήματα, η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας – όπως «προδίδει» και το όνομά τους… ☺

- Αντίθετα, αν η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε τα συστήματα αυτά λέγονται **IIR (Infinite Impulse Response) συστήματα**.

- Ως τώρα μελετήσαμε τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου

- Είδαμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης Δέλτα $\delta[n]$ στην όλη διαδικασία εύρεσης της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παρ’ όλα αυτά
  - Δεν έχουμε περισσότερη διαίσθηση του *γιατί* τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δεν ξέρουμε *πώς* να σχεδιάσουμε ένα σύστημα με μια επιθυμητή συμπεριφορά

- Στην προσπάθειά μας αυτή θα εφαρμόσουμε μια διαφορετική είσοδο στο σύστημα αντί της συνάρτησης Δέλτα
  - Ας δούμε που θα μας οδηγήσει αυτό…

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

ιδιοσυχνότητα

$h[n]$ → $y[n] = \alpha \cdot x[n]$

ΓΧΑ

σταθερά

ιδιοτιμή

- Έστω το σήμα

$$\boxed{x[n] = e^{j\omega_0 n},} \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Η έξοδος τότε θα είναι

συνέλιξη

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

ΓΧΑ

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) \Rightarrow y[n] = H(e^{j\omega_0}) \cdot e^{j\omega_0 n} = \alpha \cdot x[n]$$

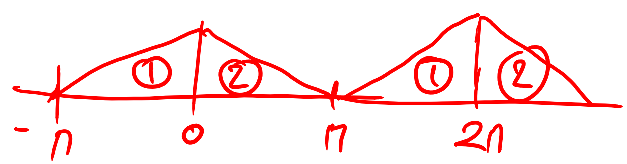
με

ιδιοτιμή →

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

να είναι αριθμός (εν γένει μιγαδικός)



- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Καταλήξαμε στο ότι

$$y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0}) \cdot x[n]$$

δηλ. η έξοδος είναι ίδια με την είσοδο $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, με τη διαφορά ότι έχει πολλαπλασιαστεί με τον (μιγαδικό εν γένει) αριθμό

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n}$$

  - Έτσι, η συνάρτηση $e^{j\omega_0 n}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** του συστήματος ενώ ο αριθμός $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος

  - Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί μας αποκαλύπτει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ στην έξοδό του, μεταβάλλοντάς τα πολλαπλασιαστικά με ένα μιγαδικό αριθμό

  - Ας μελετήσουμε λίγο τη συνάρτηση της ιδιοτιμής

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Εν γένει, έχουμε την συνάρτηση

Φασματική Απόκριση
ή
Απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$\forall \omega$ $|\omega| < \pi$

η οποία ως μιγαδική συνάρτηση του ω μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi_H(e^{j\omega})}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

και

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

• Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος

- Το άθροισμα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα άραγε για κάθε κρουστική απόκριση $h[n]$?

- Αρκεί

$|h[n]| \cdot |\cancel{e^{-j\omega n}}| \to 1$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|h[n]e^{-j\omega n}\right| = \underline{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty}$$

αφού $\left|e^{j\omega n}\right| = 1, \ \ \forall\, \omega, n$

- Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως και αναγκαία
  - Θα πούμε περισσότερα αργότερα…

- **Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ συστήματος**

  - Η συνάρτηση ως προς ω

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}} \leftrightarrow H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

δεδομένης της σημασίας της, δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα. Ονομάζεται

Απόκριση σε Συχνότητα (frequency response)

  - Παρατηρήστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι μια πράξη που εμπλέκει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

  - Μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι αν η κρουστική απόκριση είναι πραγματική συνάρτηση, η απόκριση σε συχνότητα είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση του ω

$$\boxed{H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)}$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

h[n] πραγματική συνάρτηση του n

  - Η ιδιότητα

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

συνεπάγεται ότι

πραγμ. $$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$ άρτια

φανταστικό $$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$ περ.

και

$$\left|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{j\omega})\right| = \left|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{-j\omega})\right|$$ άρτια

$$\boldsymbol{\varphi}_H(\boldsymbol{e}^{j\omega}) = -\boldsymbol{\varphi}_H(\boldsymbol{e}^{-j\omega})$$ περιτ.

  - Οι δυο τελευταίες συναρτήσεις του ω ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης**, αντίστοιχα

  - Μπορούμε να καταλάβουμε περισσότερα για αυτές τις συναρτήσεις?

• Απόκριση σε Συχνότητα

$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = H(e^{j\omega_0}) \cdot e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0}) \cdot x[n]$

- Αν για είσοδο $x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\theta)}$, $A \in \Re_+$ γράψουμε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος αναλυτικότερα, θα έχουμε

$H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| \cdot e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= H\left(e^{j\omega_0}\right)Ae^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}e^{j(\omega_0 n+\theta)} \\
&= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\left(\underbrace{\omega_0 n+\theta}_{\text{φάση σήματος}}+\underbrace{\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)}_{\text{φάση συστήματος}}\right)}
\end{aligned}
$$

- Ξεκάθαρα βλέπουμε ότι

1. Η απόκριση πλάτους επηρεάζει **πολλαπλασιαστικά** το πλάτος A του σήματος εισόδου
2. Η απόκριση φάσης επηρεάζει **αθροιστικά** τη φάση $\omega_0 n + \theta$ του σήματος εισόδου

- Πώς μας βοηθά όλη αυτή η ανάλυση στο να καταλάβουμε περισσότερα για το πώς δουλεύουν τα συστήματα?
  - Ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Για είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με πραγματική κρουστική απόκριση

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta)}, \qquad A \in \Re_+$$

θα έχουμε

$x[n] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y[n] = \frac{A}{2}\cdot T\{e^{j(\omega_0 n+\theta)}\} + \frac{A}{2}\cdot T\{e^{-j(\omega_0 n+\theta)}\}$

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}$$

$H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})|\cdot e^{j\varphi_H(e^{j\omega_0})}$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n)}e^{j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n)}e^{-j\theta}e^{j\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)}$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{j\left(\omega_0 n+\theta+\varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\frac{A}{2}e^{-j\left(\omega_0 n+\theta-\varphi_H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right)}$$

- Όμως

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi_H\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_H\left(e^{-j\omega}\right)$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**

  - Άρα

ΓΧΑ

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n + \theta + \varphi_H(e^{j\omega_0}))}$$

$$= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

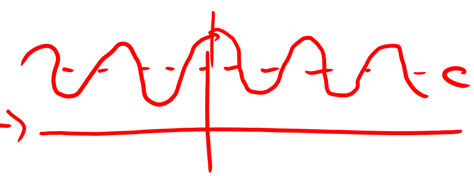
Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

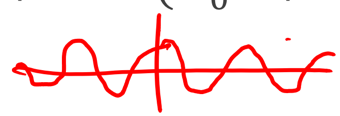
$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_{\mathrm{H}}(e^{j\omega})}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

ω=0

$$x[n] = C + A\cos(\omega_0 n + \theta)$$





τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = CH(e^{j0}) + |H\left(e^{j\omega_0}\right)| A\cos\left(\omega_0 n + \theta + \varphi_H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

• Απόκριση σε Συχνότητα

- Ξανά από τη σχέση του Euler, μπορούμε να εκφράσουμε ένα άθροισμα ημιτόνων ως άθροισμα εκθετικών μιγαδικών σημάτων!

- Έτσι, δεδομένου ότι τα συστήματα που μελετάμε είναι ΓΧΑ, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, με απόκριση σε συχνότητα

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_{H}\left(e^{j\omega}\right)}$$

και η είσοδος είναι της μορφής

$$\boxed{x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)}$$

$$e^{j\omega_0 n} \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = \alpha \cdot e^{j\omega_0 n}$$

ιδιοσυνάρτηση

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A_0 H(e^{j0}) + \sum_{k=1}^{N} \left|H\left(e^{j\omega_k}\right)\right| A_k \cos\left(\omega_k n + \theta_k + \varphi_H\left(e^{j\omega_k}\right)\right)$$

Απόκριση σε Συχνότητα

- Μην ξεχνάτε την ιδιαίτερη παρατήρηση που έχουμε κάνει στην αρχή του μαθήματος

- Ο χώρος της συχνότητας είναι περιοδικός με περίοδο 2π!

- Πράγματι

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}e^{j2\pi}\right) = H(e^{j\omega})$$

- Εφόσον η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί μια συνάρτηση του ω, δεν αποτελεί έκπληξη ότι αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π
  - Το ίδιο ισχύει ασφαλώς για την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης της

- Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κοιτώντας τον ορισμό της απόκρισης σε συχνότητα
  - Αποτελείται από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων με συντελεστές $h[n]$
  - Τα εκθετικά αυτά είναι 2π-περιοδικά στη συχνότητα

- Εναλλακτικά, αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ είναι ουσιαστικά ίδια, ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτές τις συχνότητες

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n - n_d]$. Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

$h[n] = \delta[n-n_d]$

$x[n] = e^{j\omega_0 n} \Rightarrow y[n] = x[n-n_d] = e^{j\omega_0(n-n_d)} = e^{-j\omega_0 n_d} \cdot e^{j\omega_0 n}$

$= H(e^{j\omega_0}) \cdot x[n]$

Γενικά $\forall\omega$

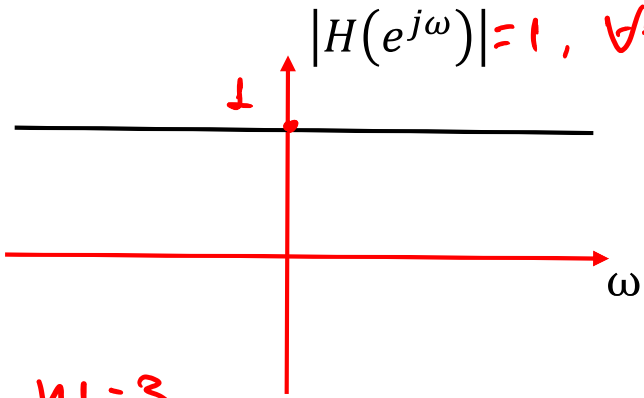
$\boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}} = \cos(\omega n_d) - j\sin(\omega n_d) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$

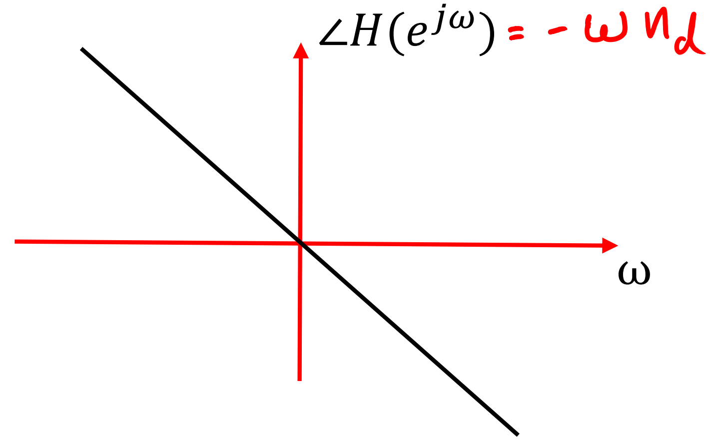
Απόκριση πλάτους: $|H(e^{j\omega})| = |e^{-j\omega n_d}| = 1 \quad \forall\omega$

Απόκριση φάσης: $\varphi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\dfrac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1}\dfrac{-\sin(\omega n_d)}{\cos(\omega n_d)} =$

$= \tan^{-1}(-\tan(\omega n_d)) = -\omega n_d$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:





Έστω $n_d = 3$

- Είσοδος $x[n] = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8}\right)$

$\omega = \frac{\pi}{3}$

$n_d = 3$

$$y[n] = 4\cdot\underbrace{\left|H(e^{j\frac{\pi}{3}})\right|}_{1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{8} + \underbrace{\varphi_H(e^{j\pi/3})}_{-\pi}\right) =$$

$$= 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{8}\right) \checkmark$$

Διαφορετικά: $y[n] = x[n-3] \Rightarrow y[n] = 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-3) + \frac{\pi}{8}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \pi + \frac{\pi}{8}\right) =$

$$= 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{7\pi}{8}\right) \checkmark$$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μελετήστε την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος αυτού.

$h[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k] \Rightarrow y[n] = h[n] * x[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$

$1/(M_1+M_2+1)$, $-M_1$, M_2

$M_1 = 0 \Rightarrow h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} =$

$= \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2+1} \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} =$

$= \frac{1}{M_2+1} \frac{e^{-j\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)} - e^{-j\omega\left(\frac{M_2+1}{2}\right)}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega M_2/2} \frac{\cancel{2j} \sin\left(\omega \frac{M_2+1}{2}\right)}{\cancel{2j} \sin(\omega/2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \frac{\sin\left(\omega \frac{M_2+1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)}}$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$\boxed{\text{Απόκριση Πλάτους}}$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega\frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M_2+1} \cdot \left| \frac{\sin\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

Επιλέγουμε το διάστημα $[0, 2\pi)$ $\left\{ H(e^{j\omega}) \text{ είναι περιοδικό με περίοδο } 2\pi \right\}$

• για $\omega = 0$: $H(e^{j0}) = \lim\limits_{\omega\to 0} \dfrac{\sin\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)} = \lim\limits_{\omega\to 0} \dfrac{\frac{M_2+1}{2}\cdot\cos\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cos(\omega)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow H(e^{j0}) = M_2+1$$

* Αριθμητής μηδενίζεται: $\sin\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \omega\frac{M_2+1}{2} = k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

άρα η $H(e^{j\omega})$ θα μηδενίζεται στις συχνότητες: $\omega_k = \dfrac{2k\pi}{M_2+1}$

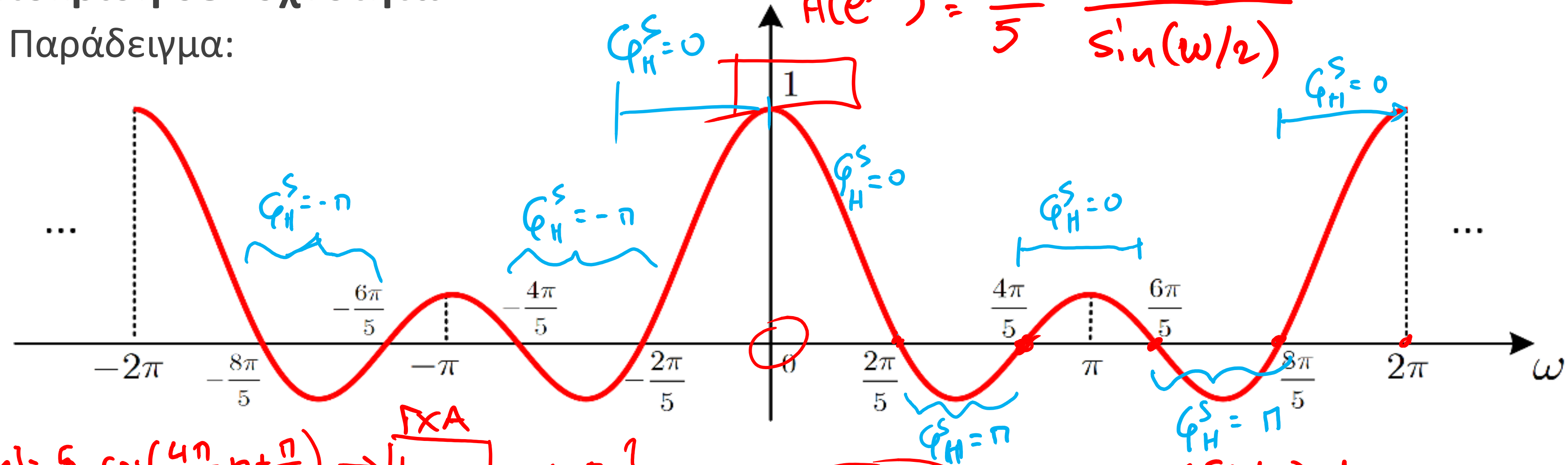
<u>παράδειγμα:</u>

$M_2 = 4 \Rightarrow \omega_k = \dfrac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}, \quad |H(e^{j\omega})| = \dfrac{1}{5}\cdot\left|\dfrac{\sin(\omega\,5/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

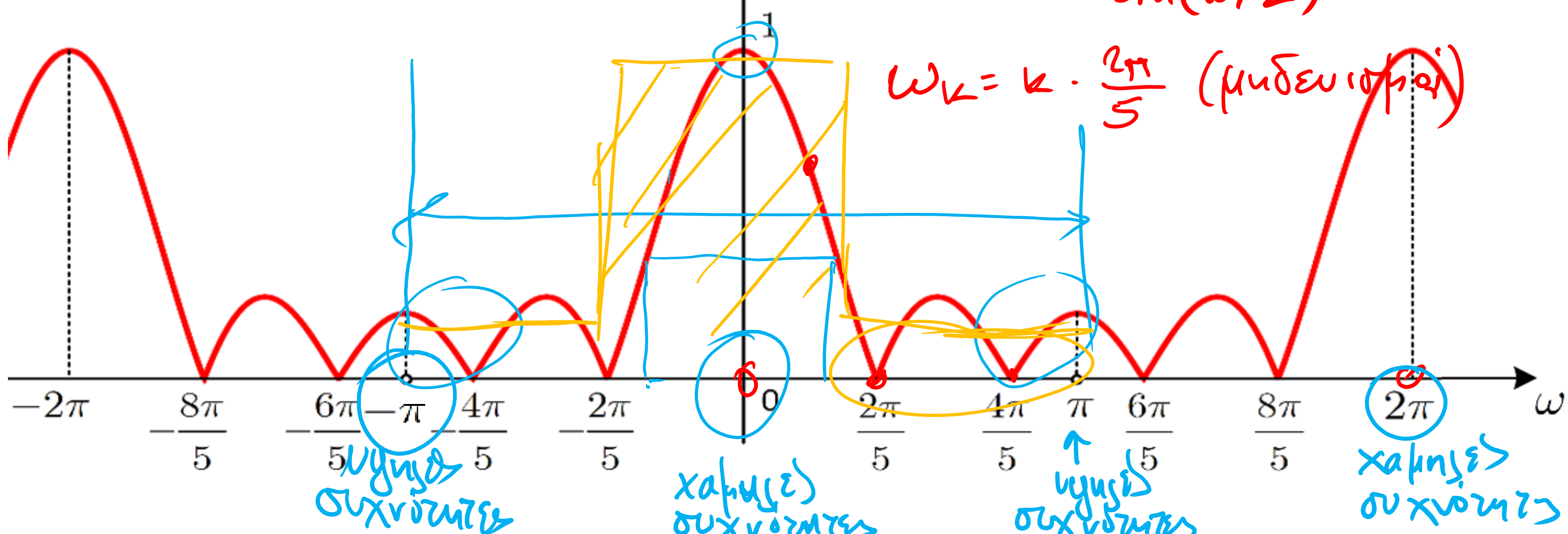
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}\,\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$



$x[n] = 5\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = ?$ ΓΧΑ

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

$\omega_k = k\cdot\frac{2\pi}{5}$ (μηδενισμοί)



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \cdot e^{-j\omega \frac{M_2}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{M_2+1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)}$$

$\boxed{\text{Απόκριση φάσης}}$:

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \measuredangle\left\{\frac{1}{M_2+1}\right\} + \measuredangle\left\{e^{-j\omega\frac{M_2}{2}}\right\} + \measuredangle\left\{\frac{\sin\left(\omega\frac{M_2+1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)}\right\}$$

$\to 0 \qquad -\omega\frac{M_2}{2} \qquad \varphi_H^s\ ?$

$5 = 5 \cdot e^{j0} \to 0$

$-5 = 5 \cdot e^{j\pi} \to \pi$

$= 5 \cdot e^{\pm j\pi} \to \pm\pi$

$M_2 = 4$

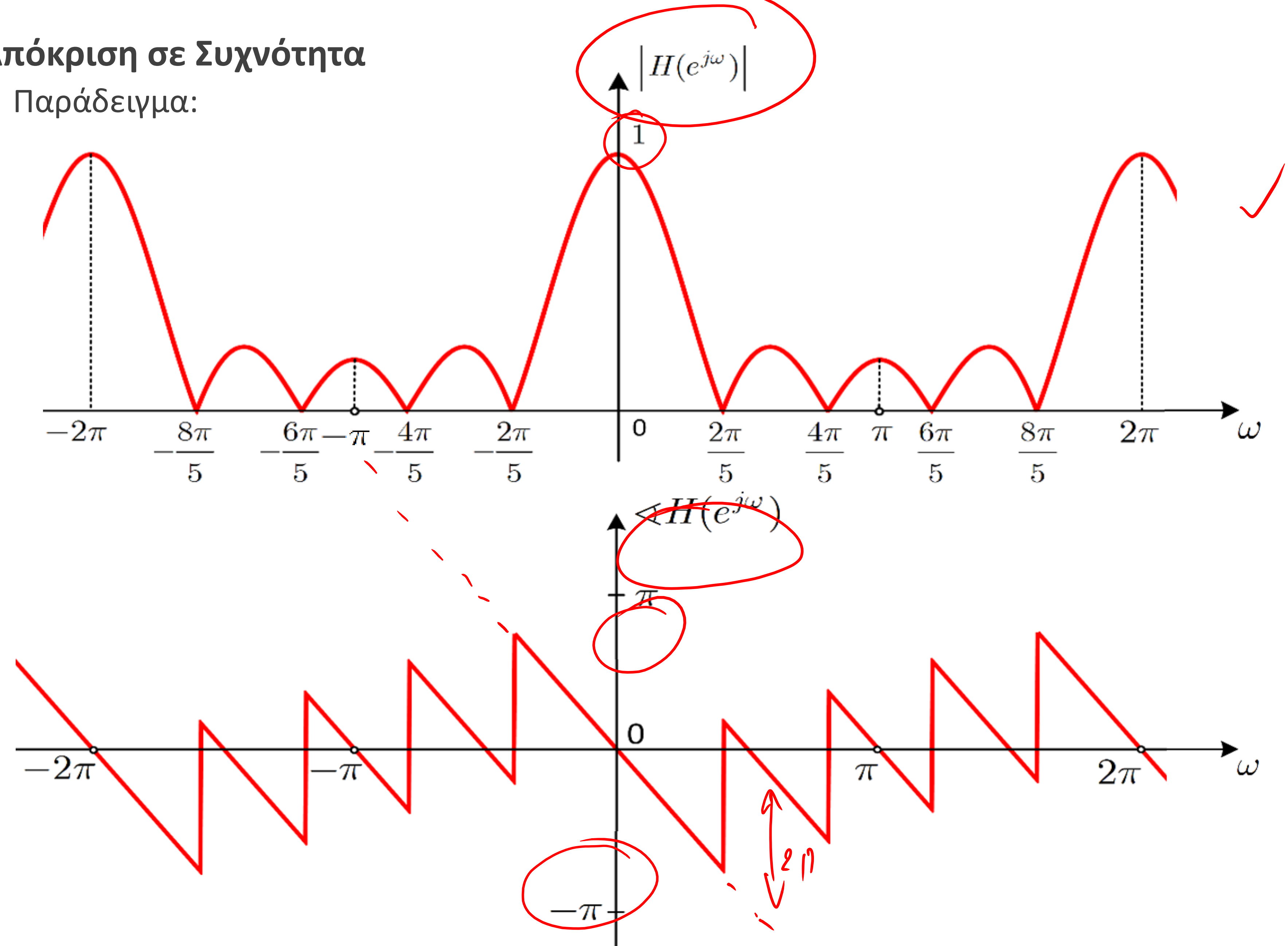
$$\varphi_H^s = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5} \\ +\pi, & \frac{2\pi}{5} \le \omega < \frac{4\pi}{5} \\ 0, & \frac{4\pi}{5} \le \omega < \frac{6\pi}{5} \\ +\pi, & \frac{6\pi}{5} \le \omega < \frac{8\pi}{5} \\ 0, & \frac{8\pi}{5} \le \omega < 2\pi \end{cases}$$

Συνολικά

$$\varphi_H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & 0 \le \omega < \frac{2\pi}{5} \\ -2\omega+\pi, & \frac{2\pi}{5} \le \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{4\pi}{5} \le \omega < \frac{6\pi}{5} \\ -2\omega+\pi, & \frac{6\pi}{5} \le \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{8\pi}{5} \le \omega < 2\pi \end{cases}$$

στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ πρωτεύουσες τιμές της φάσης

- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:



- **Απόκριση σε Συχνότητα**
  - Παράδειγμα:

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

  - Ως τώρα μελετήσαμε την είσοδο της μορφής

$$x[n] = e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < +\infty \qquad (1)$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα

  - Όμως τέτοια σήματα $(-\infty < n < +\infty)$ δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα

  - Οπότε η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης + ιδιοτιμής δεν ισχύει ακριβώς στην πράξη

  - Ας κάνουμε τα πράγματα πιο κοντά στην πραγματικότητα

  - Έστω ότι έχουμε ένα σήμα που εφαρμόζεται σε μια τυχαία χρονική στιγμή σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα
    - Για λόγους ευκολίας έστω ότι η στιγμή αυτή είναι $n = 0$

  - Το σήμα αυτό θα είναι το

$$\boxed{x[n] = e^{j\omega n}u[n]}$$

→ Ξαφνική είσοδος

$x[n] = 0, \quad n < 0 \qquad (2)$

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

Αιτιατό

$h[n] = 0, \; n < 0$

  - Εφαρμόζοντας το άθροισμα της συνέλιξης θα έχουμε

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\cdot) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\cdot) - \sum_{k=n+1}^{\infty}(\cdot)$$

  - Για $n \geq 0$ έχουμε

$H(e^{j\omega})$

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= H(e^{j\omega n})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$

  - Ο όρος $y_{ss}[n]$ ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response)** ενώ ο όρος $y_t[n]$ ονομάζεται **μεταβατική απόκριση (transient response)**

- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

$$y[n] = H\left(e^{j\omega n}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$
$$= y_{ss}[n] + y_t[n]$$

- Η απόκριση σταθερής κατάστασης $y_{ss}[n]$ είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που θα λαμβάναμε από ~~την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης~~

- Η μεταβατική απόκριση $y_t[n]$ μπορεί κανείς να τη δει ως το «πόσο απέχει» η έξοδός μας από ~~το αποτέλεσμα της~~ ιδιοσυνάρτησης

- Άραγε πως συμπεριφέρεται η μεταβατική απόκριση;
  - Μήπως μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιες περιπτώσεις και να καταλήγουμε μόνο με την απόκριση σταθερής κατάστασης;

- Ας δούμε πότε – και αν – συμβαίνει αυτό…

• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$|y_t[n]| = \left|\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|\underbrace{|e^{j\omega(n-k)}|}_{1} = \boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]|} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|$$

$\to 0$

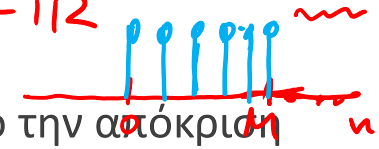
- Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε δυο πράγματα:

1. Αν η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας έτσι ώστε

$$h[n] \neq 0, \qquad 0 \leq n \leq M$$

τότε ο παραπάνω όρος είναι μηδέν για $n \geq M$. Οπότε θα έχουμε μόνο την απόκριση σταθερής κατάστασης στην έξοδο για $n \geq M$

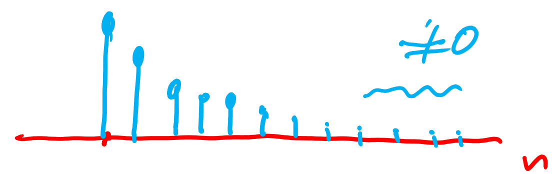
FIR



2. Αν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία αλλά φθίνει στο μηδέν **αν** οι τιμές της κρουστικής απόκρισης πλησιάζουν το μηδέν όταν $n \to +\infty$

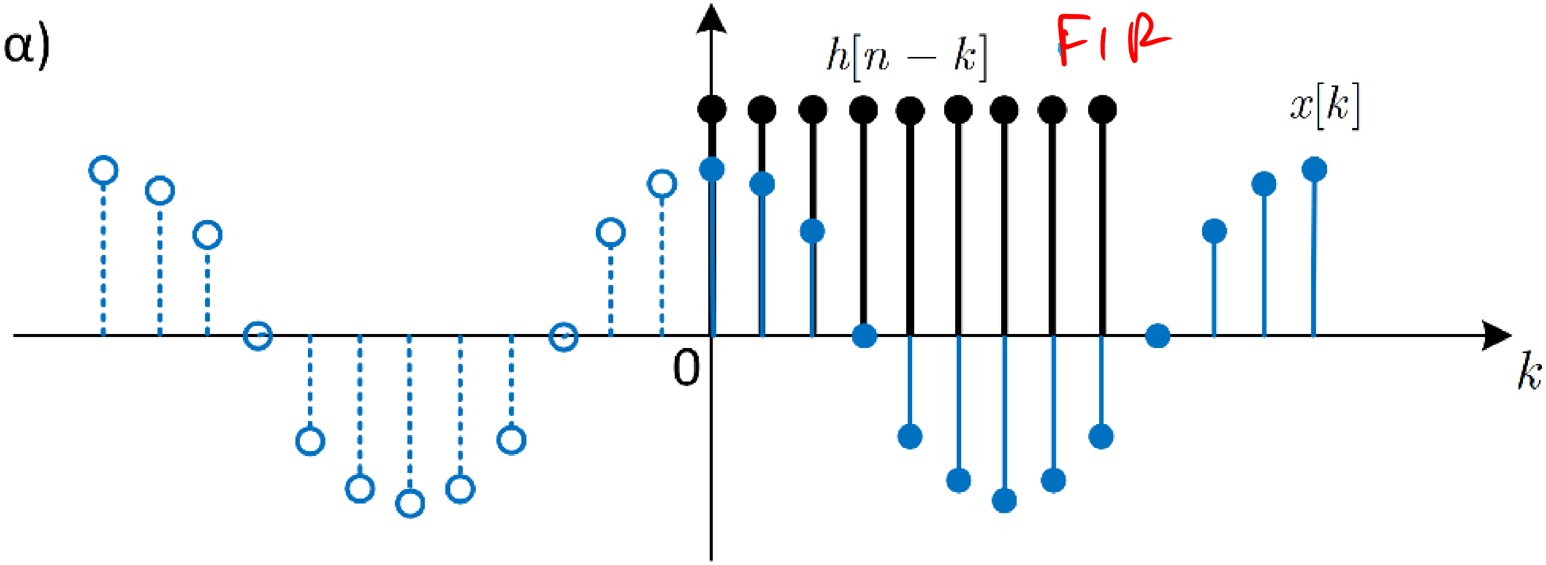
IIR

   ◦ Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το σύστημα είναι ευσταθές, όπως βλέπουμε από την τελευταία ανίσωση!

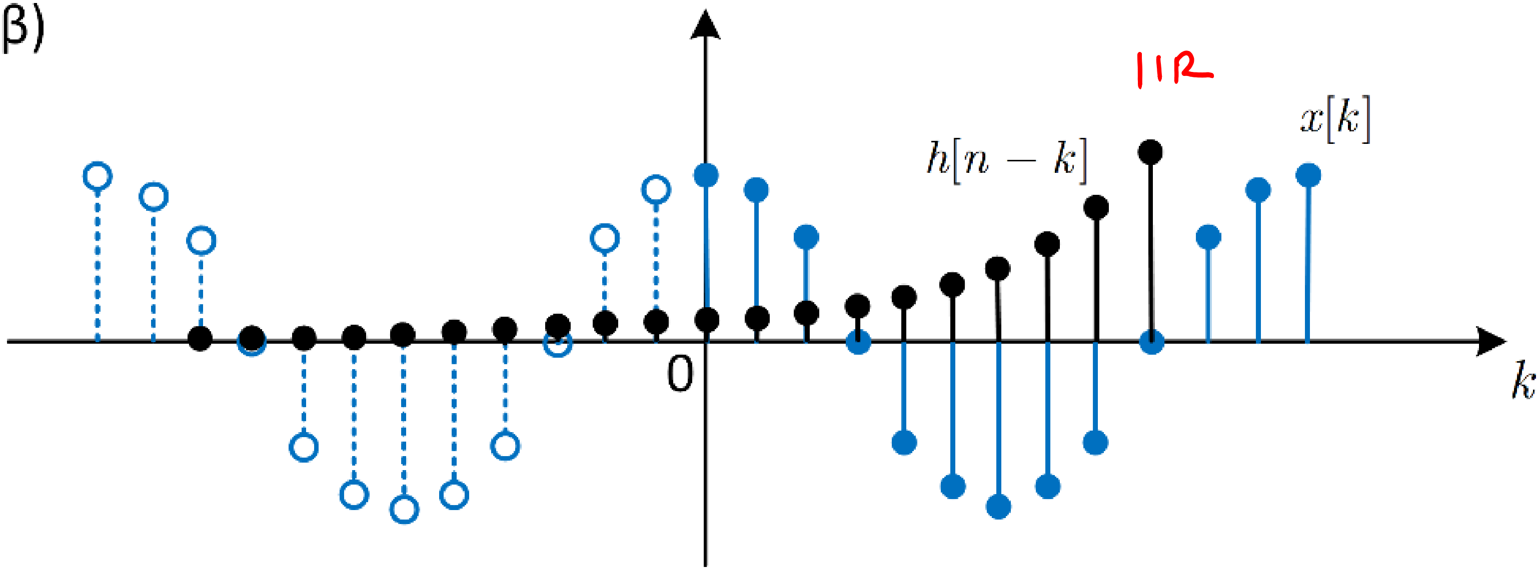


- **Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα**

(α)



(β)



• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

- Ας υλοποιήσουμε στο Octave/MATLAB το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος για μια συχνότητα εισόδου

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n]$$

δηλ. για το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

FIR

με $M_1 = 0, M_2 = 4$.

- Αναμένουμε από την προηγούμενη ανάλυση μας ότι η έξοδος θα είναι μηδενική!

- Επίσης αναμένουμε να δούμε τη μεταβατική απόκριση και την απόκριση σταθερής κατάστασης, αφού το ημίτονο ξεκινά «ξαφνικά» για $n = 0$

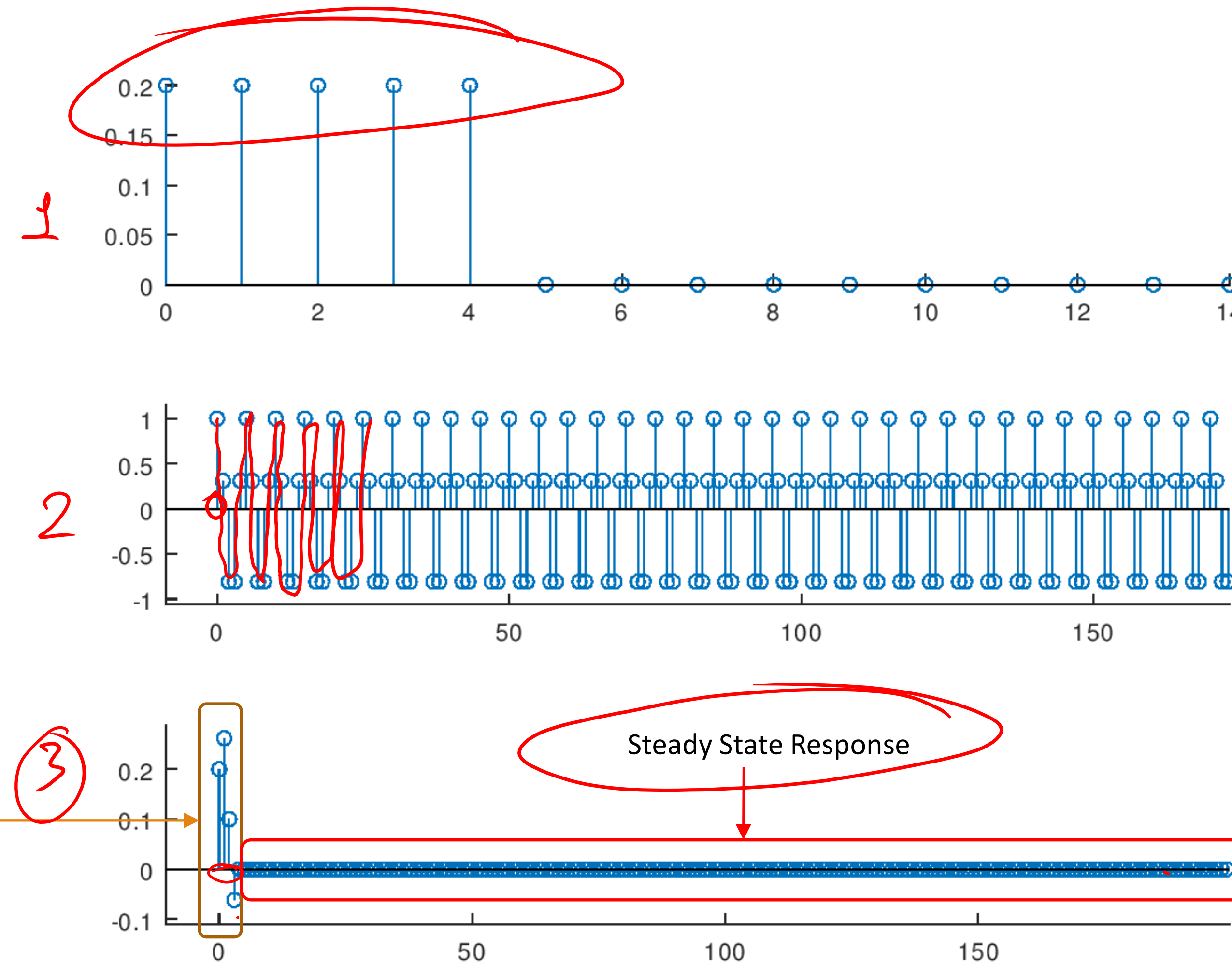
• Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ συστήματα

```
% Impulse Response h[n]
M1 = 0;
M2 = 4;
h = 1/(M1 + M2 + 1).*ones(1, M2+1);
h = [h zeros(1,10)];
nh = 0:14;

% Input signal x[n]
omega0 = 2*pi/5;
nx = 0:1000;
x = cos(omega0.*nx);

% Convolution
y = conv(h,x);
ny = [0:1014];

% Plots
subplot(311); stem(nh, h);
subplot(312); stem(nx, x);
subplot(313); stem(ny, y);
```



Συνεχίζεται... ☺