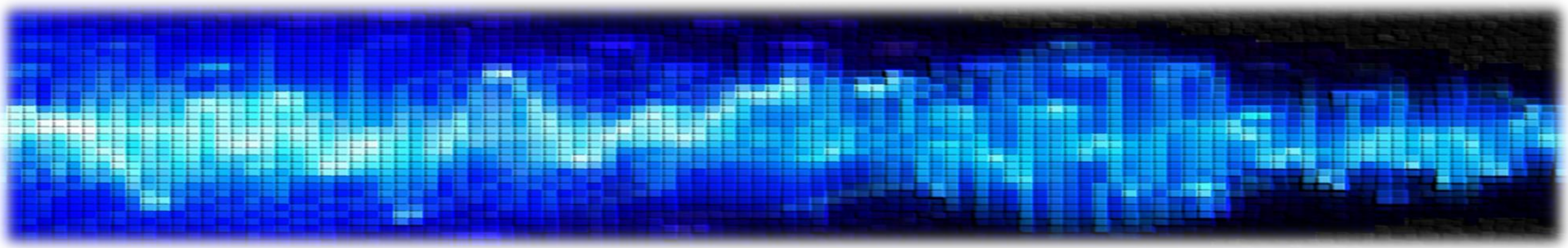
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Εξισώσεις διαφορών

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]}$$

- Αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$
- Έξοδος

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου (αρχική ηρεμία)

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-input response: η έξοδος του συστήματος λόγω αρχικών συνθηκών ($x[n] = 0$)
- Ομογενής εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Zero-state response: η έξοδος του συστήματος παρουσία εισόδου ($x[n] \neq 0$)
- Μεγάλο πλήθος πιθανών εισόδων
  - Εύρεση $y_{zs}[n]$ μέσω κρουστικής απόκρισης $h[n]$
  - $h[n]$: έξοδος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
  - Η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες στο σύστημα
- Απλό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N)$
- Χαρακτηριστικές ρίζες γ_k
- Γενική μορφή

$$\boxed{h_o[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n]}$$

- Εύρεση των σταθερών c_k από τις (ψευδο-)αρχικές συνθήκες

- **Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Επανάληψη…**
- Κρουστική Απόκριση: η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$
- Γενικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

- Κρουστική απόκριση

$$\boxed{h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_o[n-l]}$$

$h_0[n]: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$

- Η κρουστική απόκριση περιγράφει πλήρως ένα ΓΧΑ σύστημα
- Ας δούμε γιατί…

- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**
  - Παρ’ όλο που βρήκαμε την ~~κρουστική απόκριση~~ οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος, πως αυτή βοηθά στην εύρεση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης?
  - Θυμηθείτε ότι κάθε σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

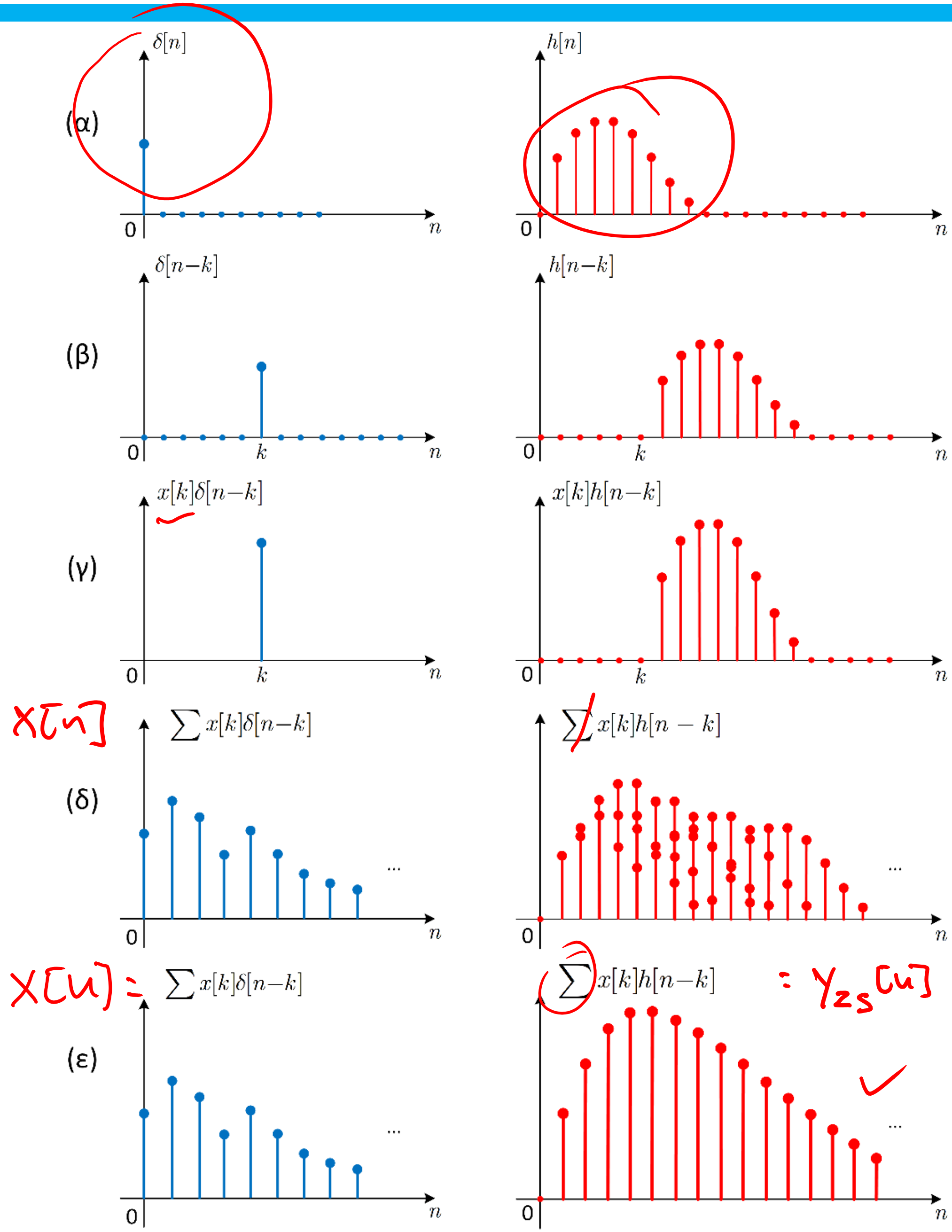
  - Άρα

$$\begin{aligned}
y_{zs}[n] &= T\{x[n]\} \\
&= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} && \text{Γραμμικότητα (αθροιστικότητα)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} && \text{Γραμμικότητα (ομογένεια)} \\
\boxed{y_{zs}[n]} &\boxed{= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]} && \text{Χρον. Αμεταβλητότητα}
\end{aligned}$$

$T\{\delta[n]\} = h[n]$

$T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$

$= x[n] * h[n]$



Χρον. Αμεταβλητότητα

Γραμμικότητα (ομογένεια)

Γραμμικότητα

Γραμμικότητα

- **Συνέλιξη**

  - Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι <u>εξαιρετικά</u> σημαντικό

  - Η πράξη

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \boxed{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]}$$

είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην ανάλυση συστημάτων και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: **συνέλιξη (convolution)**

  - Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί και ως ξεχωριστή πράξη, έξω από το πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων

  - Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη δυο σημάτων $x[n], y[n]$ που δε σχετίζονται απαραίτητα με ένα σύστημα

- **Συνέλιξη**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

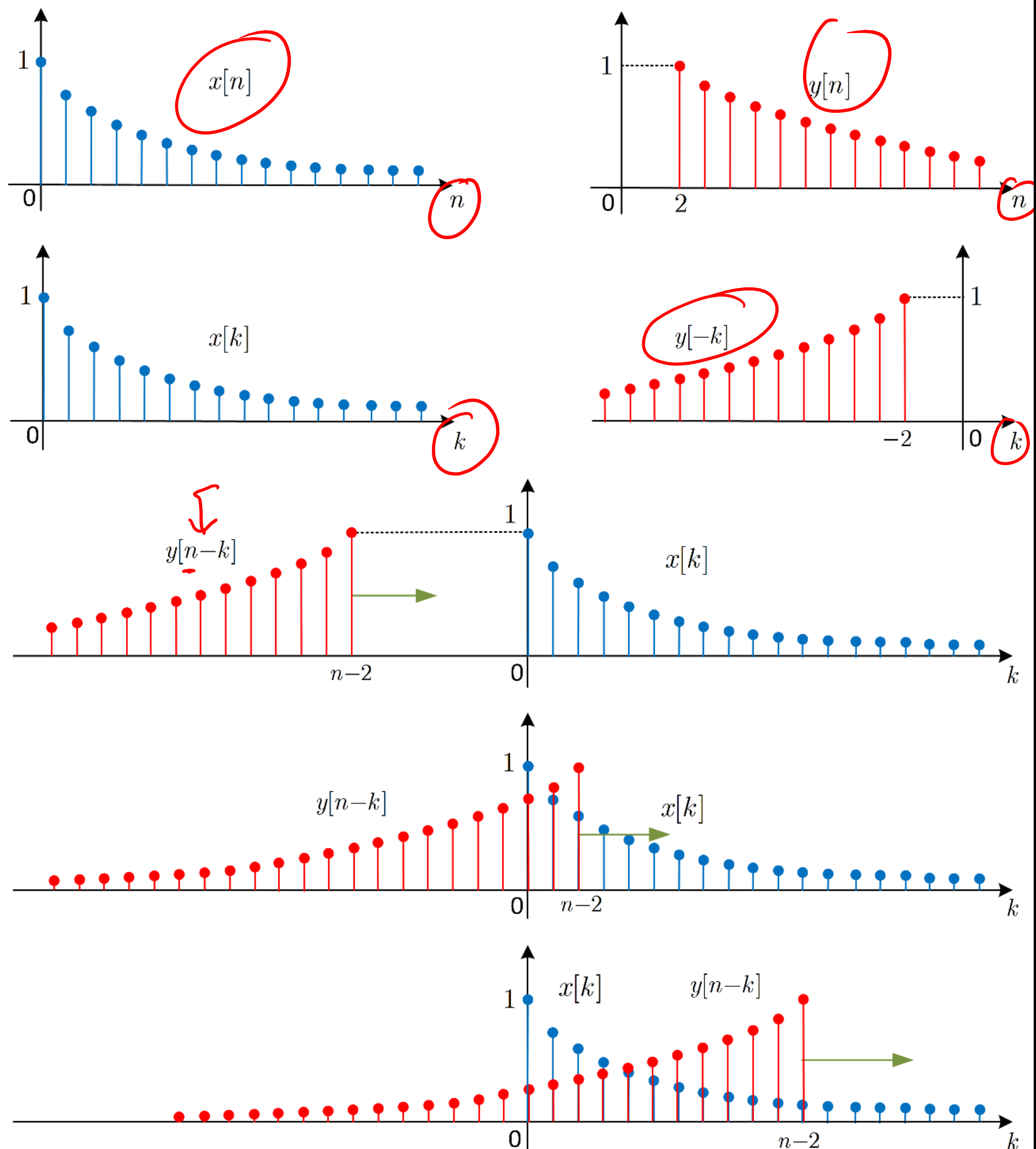
Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \Re \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \Re \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$

$x[n] * \delta[n-n_1] = x[n-n_1]$

$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1]$

- Πως υπολογίζουμε αυτό το φαινομενικά περίεργο άθροισμα?

- **Συνέλιξη**
  - Τα βήματα υπολογισμού είναι τα εξής:



  - Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό
  - Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $y[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n. Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση
  - Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n-k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ‘‘ολισθαίνουμε’’ πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
  - Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.
  - Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n-k]$ έχει προχωρήσει κι άλλο μέσα στο $x[k]$, αλλά δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση. Οπότε άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν.

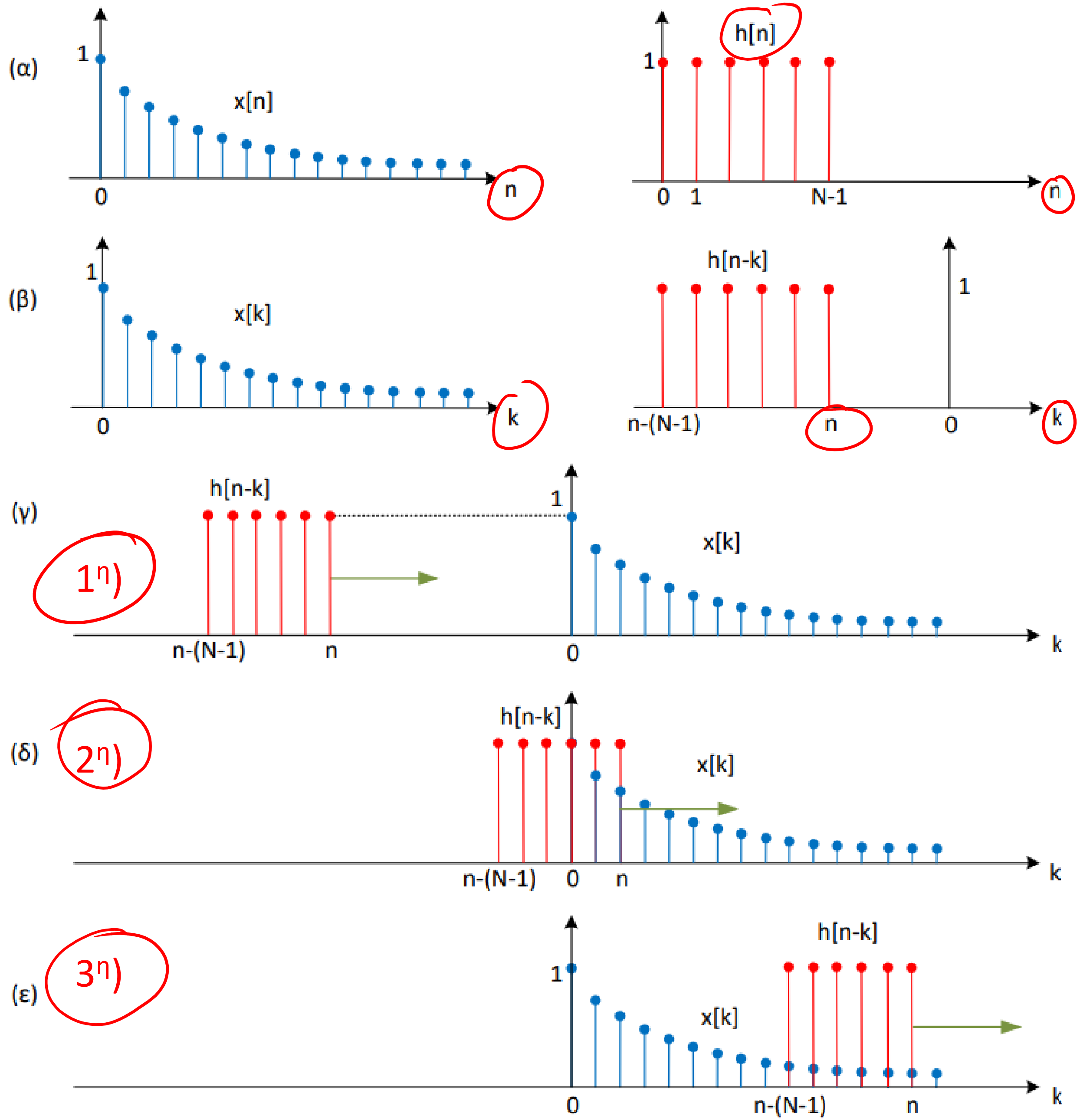
- **Συνέλιξη**

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k, και "σύρουμε" το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα "συνυπάρχουν", δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:
    - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = u[n] - u[n-N]$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για

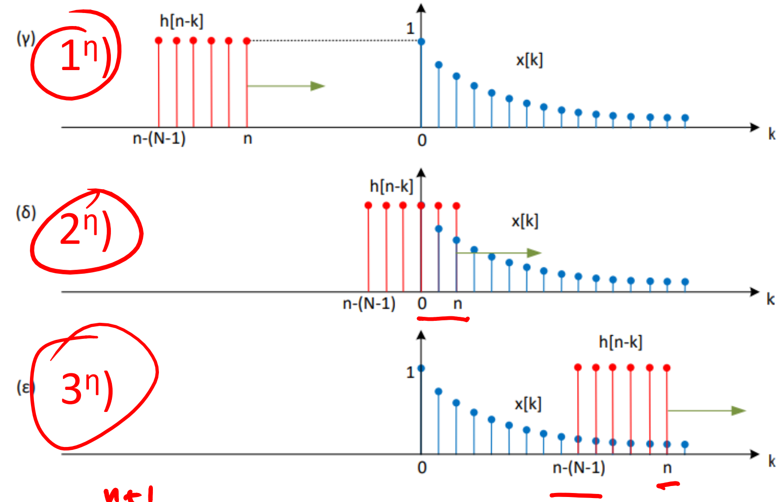
$$x[n] = a^n u[n], \ |a| < 1.$$



- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

$x[n] = a^n u[n], \ |a|<1$

$h[n] = u[n] - u[n-N]$



1η) για $n<0$

$$c_{xh}[n] = x[n] * h[n] = 0$$

2) για $n \geq 0$ και $n-(N-1) \leq -1$

$$c_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

3)

$$c_{xh}[n] = \sum_{k=n-(N-1)}^{n} a^k = \frac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}, \quad n-(N-1) \geq 0$$

Επομένως:

$$c_{xh}[n] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0 \leq n \leq N-2 \\ \dfrac{a^{n-(N-1)} - a^{n+1}}{1-a}, & n \geq N-1 \end{cases}$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

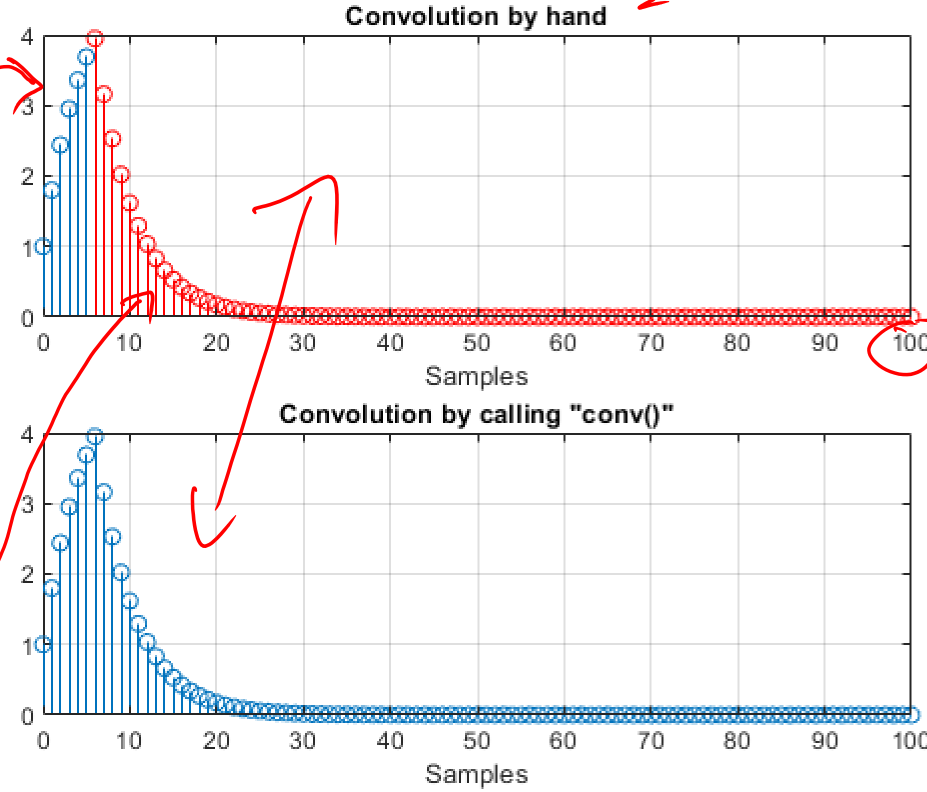
```
% Ορισμός διάρκειας
Nx = 7;

% Σήματα
x = ones(1,Nx);
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;

% Convolution by hand
c1 = (1 - alpha.^(1:(Nx-1)))./(1-alpha);
c2 = (alpha.^([Nx-1:Nh] - (Nx-1)) ...
     - alpha.^(Nx-1+1:Nh+1))./(1-alpha);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(0:Nx-2, c1); hold on;
stem(Nx-1:Nh, c2, 'r'); grid; hold off;
title('Convolution by hand'); xlabel('Samples');
subplot(212); stem(0:Nh, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"'); xlabel('Samples');
```

h

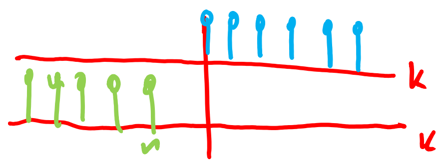
x

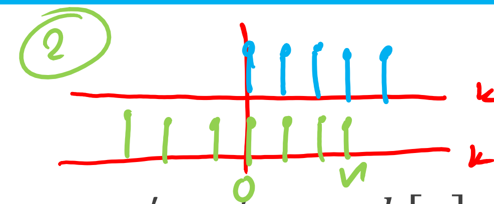
2

3



- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:





  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$. Βρείτε την έξοδο του συστήματος για $x[n] = h[n]$.

2

$$c_{xh}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k]\, a^{n-k} u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\,u[n-k]$$

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

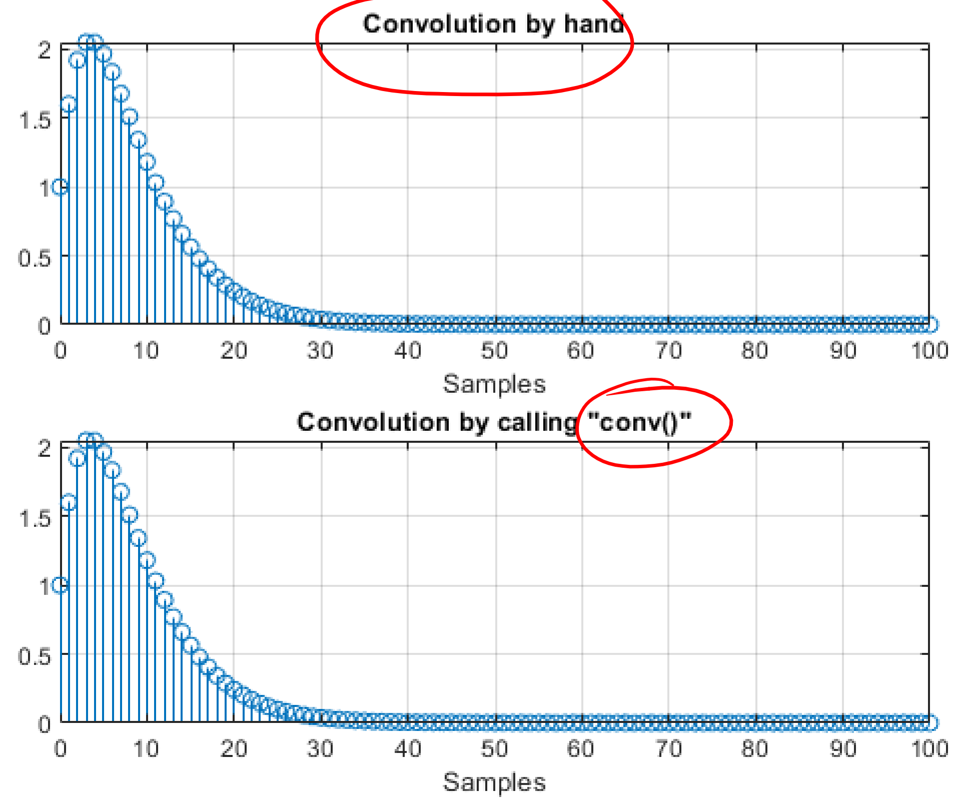
Επομένως: $u[k]\,u[n-k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$$c_{xh}[n] = a^n \sum_{k=0}^{n} 1 = a^n (n+1), \quad n \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{xh}[n] = (n+1)a^n, \quad n \geq 0}$$

- **Συνέλιξη**
  - Παράδειγμα:

```
% Σήματα
alpha = 0.8;
Nh = 100;
n = 0:Nh;
h = alpha.^n;
x = h;

% Convolution by hand
chx = alpha.^n .* (n+1);

% Convolution by conv function
c = conv(h, x);

% Σχήματα
figure; subplot(211); stem(n, chx);
title('Convolution by hand'); grid;
xlabel('Samples');
subplot(212); stem(n, c(1:Nh+1)); grid;
title('Convolution by calling "conv()"');
xlabel('Samples');
```



- **Συνέλιξη**

  - Η γραφική ή η αλγεβρική μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη όταν ένα τουλάχιστον εκ των δυο σημάτων που εμπλέκονται στη συνέλιξη είναι άπειρης διάρκειας

  - Τι συμβαίνει όμως αν και τα δυο σήματα είναι πεπερασμένης (και συνήθως μικρής) διάρκειας?

  - Τότε βολικότερη είναι η μέθοδος της **ολισθαίνουσας ταινίας (sliding tape)**

  - Έστω ότι έχουμε δυο σήματα

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

$$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

  - Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία, απλά χωρίς σχήματα αυτή τη φορά

• Συνέλιξη

$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$

$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$

				0	1	2		
x[k]	0	0	0	2	-3	½	0	0
y[k]	0	0	-1	1	2	-1	0	0
			-1	0	1	2		

ανάκλαση ως προς k →

0	0	0	2	-3	½	0	0	x[k]
0	0	-1	2	1	-1	0	0	y[-k]

Μετατοπίσεις

(α) k=0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

n-2, n+1, ολίσθηση →

c[n] = 0, n+1 < 0

(β)

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0	0

n-2, n+1

c[-1] = -1x2 = -2

(γ)

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0

n-2, n+1

c[0] = 1x2 + (-3)x(-1) = 5

(δ)

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0

n-2, n+1

c[1] = 2^2 - 3 - ½ = ½

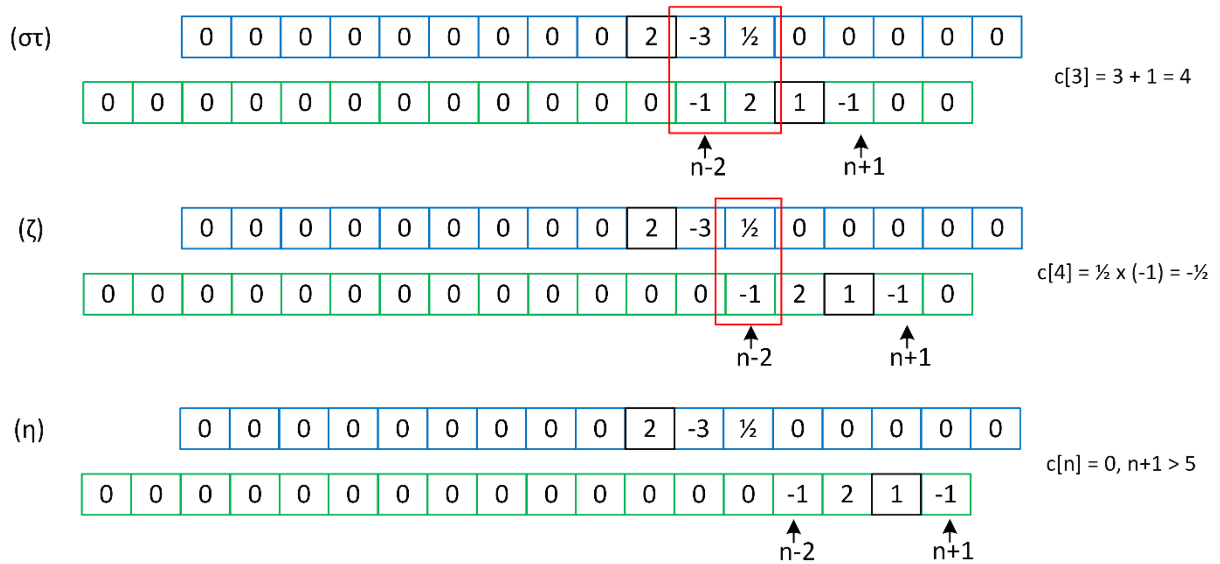
(ε)

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0

n-2, n+1

c[2] = -2 - 6 + ½ = -15/2

• Συνέλιξη



- Το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4]$$

- Η ιδιότητα του εύρους προβλέπει σωστά τη διάρκεια του παραπάνω σήματος?

- Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση ιδιοτήτων συνέλιξης?

- **Συνέλιξη**

(στ)

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0	0
												n-2			n+1		

c[3] = 3 + 1 = 4

(ζ)

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1	0
													n-2			n+1	

c[4] = ½ x (-1) = -½

(η)

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-3	½	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	-1
														n-2			n+1

c[n] = 0, n+1 > 5

$x[n] * \delta[n] = x[n]$

$x[n] * \delta[n-n_1] = x[n-n_1]$

$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1]$

- Το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \frac{1}{2}\delta[n-4]$$

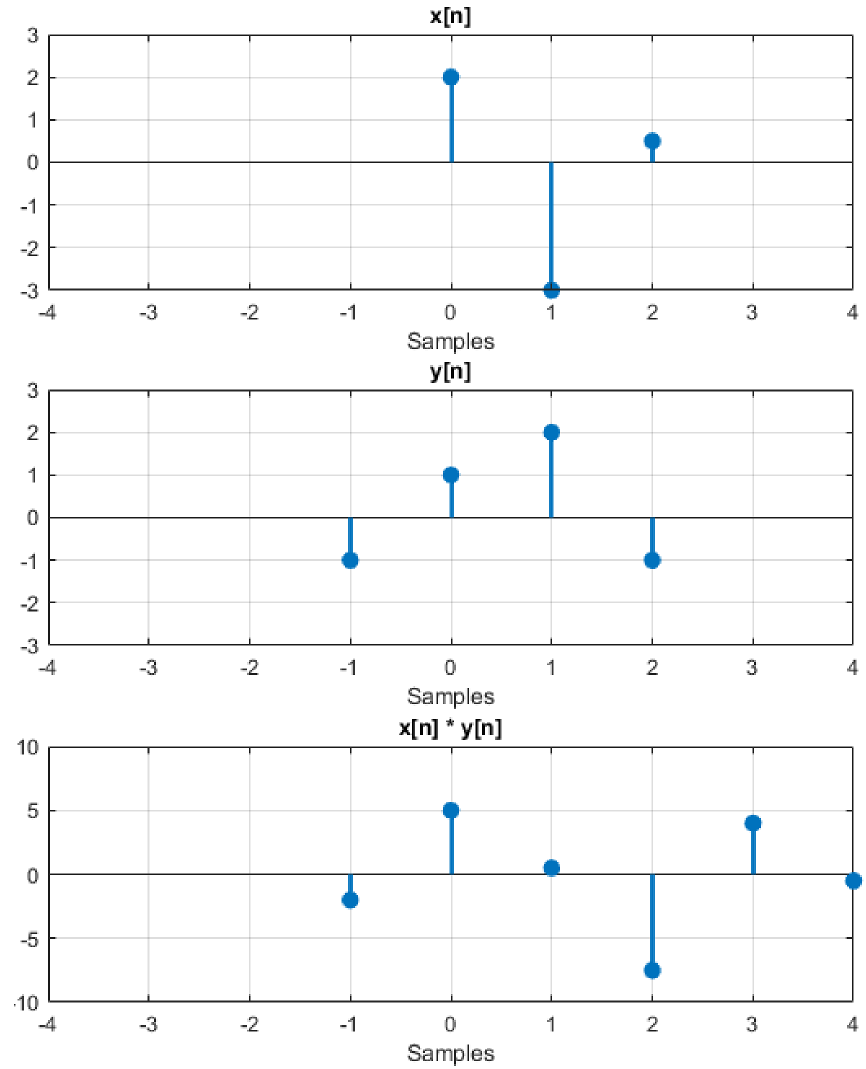
$$c[n] = \underbrace{\left(2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]\right)}_{x[n]} * \underbrace{\left(-\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]\right)}_{y[n]}$$

3 4

$3 + 4 - 1 = 6$

- **Συνέλιξη**

```
% Σήματα
x = [2 -3 1/2];
nx = [0 1 2];

y = [-1 1 2 -1];
ny = [-1 0 1 2];

% Συνέλιξη
cxy = conv(x, y);
n_c = [-1 0 1 2 3 4];

% Σχήματα
figure; subplot(311); stem(nx, x);
xlabel('Samples'); title('x[n]');
subplot(312); stem(ny, y);
xlabel('Samples'); title('y[n]');
subplot(313); stem(n_c, cxy);
xlabel('Samples'); title('x[n] * y[n]');
```



- **Συνολική έξοδος συστήματος**

  - Η συνολική έξοδος ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ δίνεται ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i \gamma_i^n u[n] + x[n] * h[n]$$

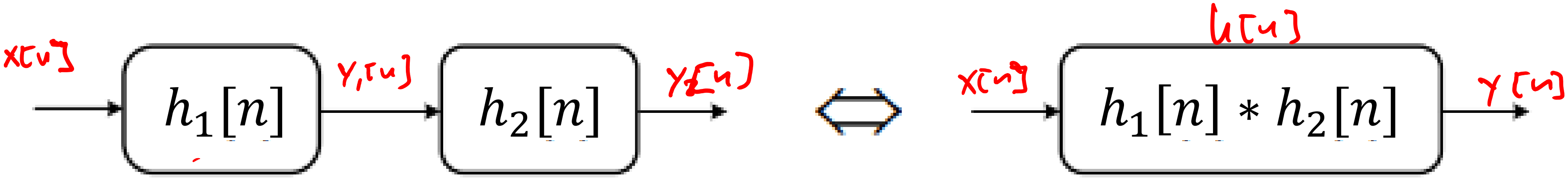
$x[n]=0$ $x[n]\neq 0$ $zs[n]$

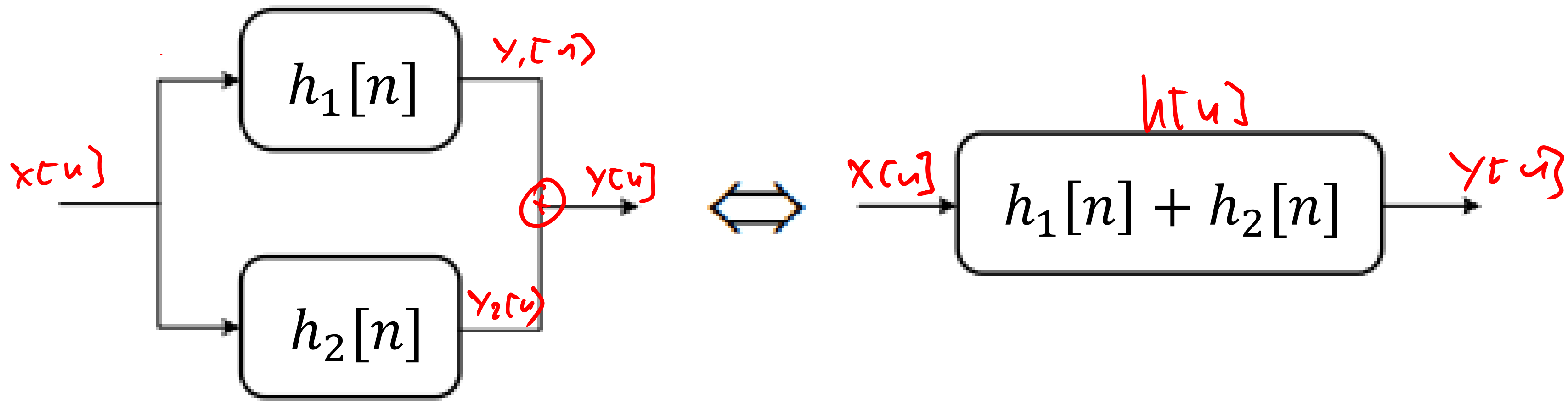
  - Θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα ΓΧΑ συστήματα, δηλ. τέτοια ώστε

$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**

$$\left.\begin{aligned} y_1[n] &= x[n] * h_1[n] \\ y[n] &= y_1[n] * h_2[n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow y[n] = \overbrace{(x[n] * h_1[n])}^{y_1[n]} * h_2[n] \Rightarrow y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$





$$\left.\begin{aligned} y_1[n] &= x[n] * h_1[n] \\ y_2[n] &= x[n] * h_2[n] \end{aligned}\right| \Rightarrow y[n] = y_1[n] + y_2[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

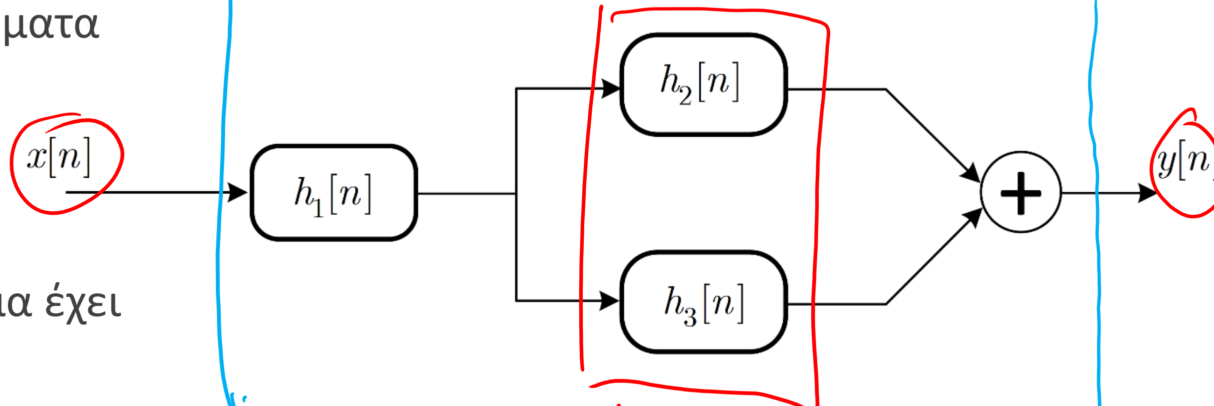
$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το σύστημα της εικόνας, που αποτελείται από τα υποσυστήματα

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα έχει κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)u[n-1]$$



$h_{23}[n] = h_2[n] + h_3[n]$

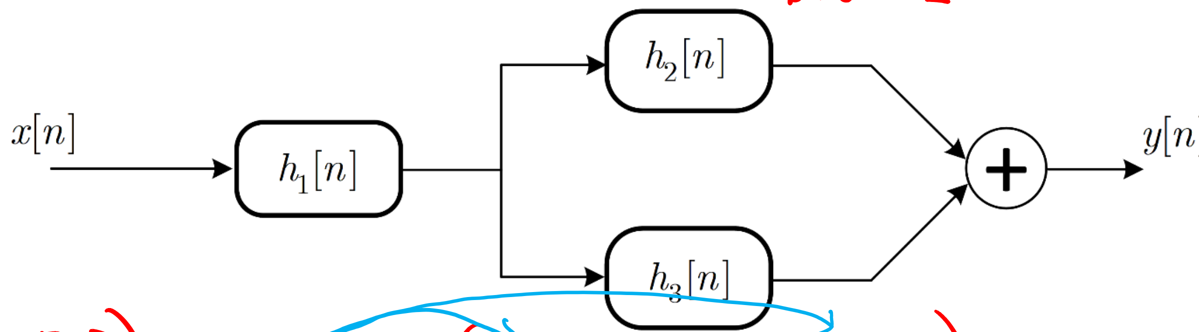
$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])$

$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1]$

$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$$

- **Διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων**
  - Παράδειγμα:

$$h_1[n] = u[n-1]$$
$$h_2[n] = nu[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n+1]$$

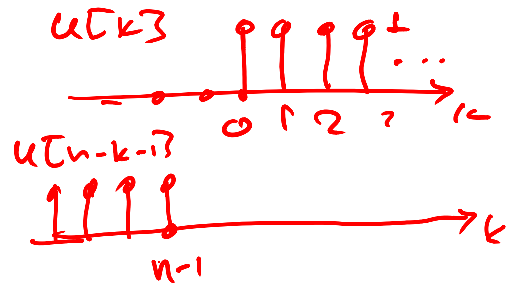


$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) = u[n-1] * (n\,u[n] + \delta[n+1]) =$$

$$= \underbrace{u[n-1] * n\,u[n]} + \underbrace{u[n-1] * \delta[n+1]}_{u[n-1+1] = u[n]} \quad ①$$

$$u[n-1] * n\,u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, \underbrace{u[k]}_{k \geq 0} \cdot \underbrace{u[n-k-1]}_{k \leq n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \quad n \geq 1$$



$$u[n-1] * n\,u[n] = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,u[n-1] \quad ②$$

$$① + ② \Rightarrow h[n] = u[n] + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,u[n-1]$$

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**

  - Έχουμε συζητήσει για την έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος

$$|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re$$

  - Γνωρίζουμε ότι για ένα ΓΧΑ σύστημα η έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

  - Άρα θα πρέπει

$$|y[n]| < B_y \Rightarrow |x[n] * h[n]| < B_y \Rightarrow \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overset{h[k]\ x[n-k]}{x[k]h[n-k]}\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overset{|h[k]|\ |x[n-k]|}{|x[k]||h[n-k]|} < B_y$$

  - Ξέρουμε ότι $|x[n]| < B_x, \quad \forall\, n$, οπότε

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overset{h[k]\ x[n-k]}{|x[k]||h[n-k]|} < B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\overset{h[k]}{h[n-k]}| < B_y$$

  - Η τελευταία σχέση ισχύει αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\overset{h[k]}{h[n-k]}| < +\infty \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Ευστάθεια ΓΧΑ

$k \to n$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty}$$

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**

  - Η σχέση

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty}$$

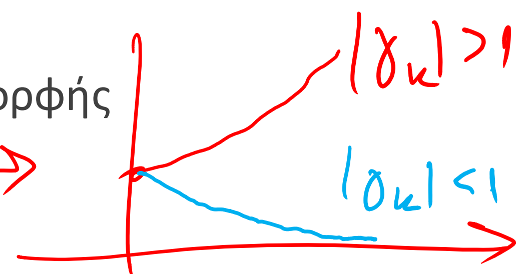
Κρουστική απόκριση απολύτως αθροίσιμη

και η οποία αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ευστάθεια** ενός ΓΧΑ συστήματος

  - Δεν αποδεικνύουμε την αναγκαιότητα εδώ

- Η κρουστική απόκριση μπορεί να αποτελείται από όρους της μορφής

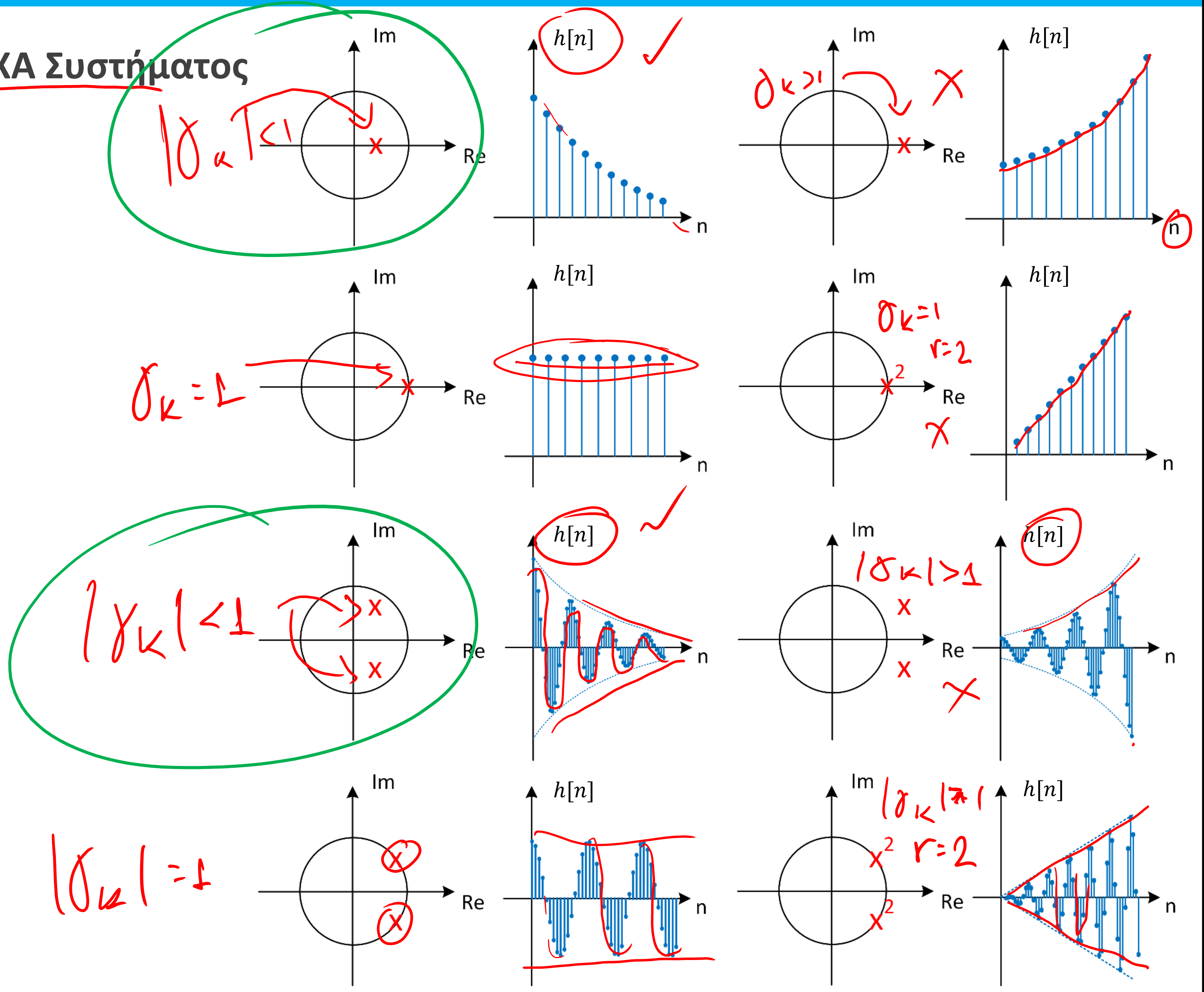
$$\delta[n-k], \gamma_k^n, n^k \gamma_k^n$$



- Προφανώς η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη αν και μόνον αν

$$\boxed{|\gamma_k| < 1, \quad \forall\, \gamma_k \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας!}}$$

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ