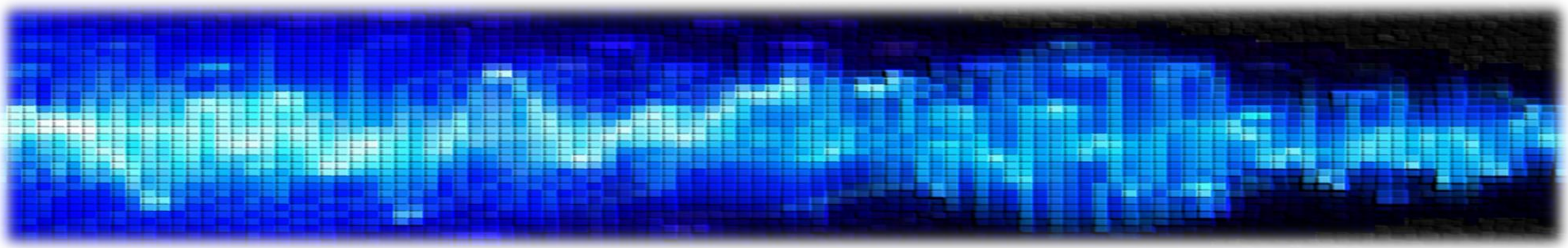
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 3Η



- Συστήματα διακριτού χρόνου
- Εξισώσεις διαφορών

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Όπως βλέπετε και από τη γενική σχέση

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]}$$

ένα σύστημα μπορεί να εξαρτάται από προηγούμενες τιμές τόσο της εισόδου <u>όσο και της εξόδου</u>

  - Ας θεωρήσουμε ένα πολύ απλό σύστημα

$N=2$ $a_1=-1$
$a_0=1$ $a_2=-1$

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

$y[n]-y[n-1]-y[n-2]=0$

$\boxed{b_l=0, \forall l}$

  - Αν θέλουμε να το υλοποιήσουμε ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $n = 0$, παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-1], y[-2]$

  - Στη γενικότερη περίπτωση, θέλουμε τις τιμές $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Οι τιμές

$$y[-1], y[-2], \ldots, y[-N]$$

  ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

  - Περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος

  - Χωρίς αυτές, η εξίσωση διαφορών **δεν** έχει μοναδική λύση

  - Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**
    - Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν αποκρίνεται αν δεν το διεγείρουμε με μια είσοδο
    - Ένα σύστημα που **δε** βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί!!

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

  - Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y[n]$ ενός συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών δεδομένης μιας εισόδου $x[n]$?

  - Η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δυο διαφορετικών «αποκρίσεων»
    - Της απόκρισης **μηδενικής εισόδου** $y_{zi}[n]$ (zero input response)
    - Της απόκρισης **μηδενικής κατάστασης** $y_{zs}[n]$ (zero state response)

$$\boxed{y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]}$$

  - Η απόκριση **μηδενικής εισόδου** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο των αρχικών συνθηκών
    - **Επομένως: αν το σύστημα βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδέν**

  - Η απόκριση **μηδενικής κατάστασης** αποτελεί την έξοδο του συστήματος όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλ. αποτελεί την έξοδο του συστήματος παρουσία μόνο της εισόδου
    - Προφανώς η είσοδος πρέπει να είναι μη μηδενική

- **Συστήματα με εξισώσεις διαφορών**

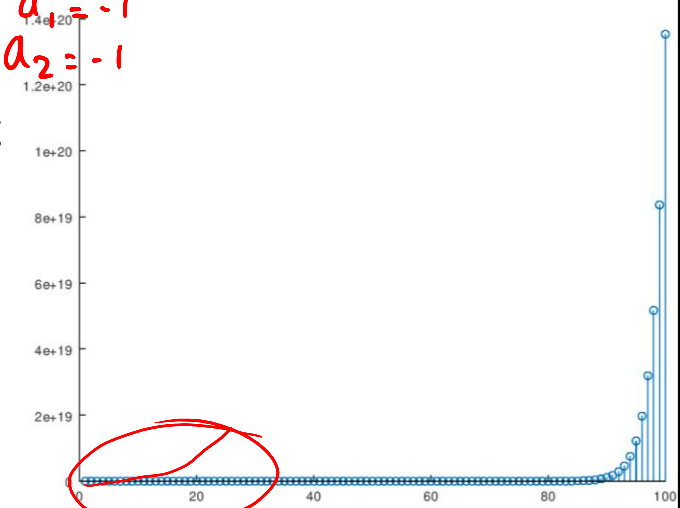
  - Επιστρέφοντας στην αρχική απλή εξίσωση διαφορών

$N = 2$
$a_0 = 1$
$a_1 = -1$
$a_2 = -1$

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2]$$

αν θέσουμε $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ τότε η έξοδος δίνεται ως

$$y[0] = y[-1] + y[-2] = 0 + 1 = 1$$
$$y[1] = y[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1$$
$$y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 1 = 2$$
$$y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 2 = 3$$



  - Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω σύστημα η είσοδος είναι μηδενική, οπότε η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$y[n] = y_{zi}[n]$$

  - Η απουσία εισόδου βλέπετε ότι δεν εμποδίζει το σύστημα να παράγει τιμές εξόδου (οι οποίες μάλιστα μεγαλώνουν εκθετικά)!
    - Οι μη μηδενικές αρχικές συνθήκες προκαλούν αυτήν τη συμπεριφορά

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι μηδενική, δηλ. $x[n] = 0 \ \forall \ n$, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0}$$

  - Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ομογενής**

  - Μπορεί να δειχθεί ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n, \qquad \gamma, c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

  - Αντικαθιστώντας παραπάνω

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\gamma^{n-k} = 0 \Leftrightarrow c\gamma^n \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0}$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο. (χ.Π.)

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Δηλ. πρέπει

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0}$$

  - Αναλύοντας

$$a_N \gamma^{-N} + a_{N-1}\gamma^{-N+1} + \cdots + a_1 \gamma^{-1} + a_0 = 0$$

$$\gamma^{-N}\boxed{(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1 \gamma^{N-1} + a_0 \gamma^N)} = 0$$

$3+2x+x^2=0$

  - Το πολυώνυμο στην παρένθεση ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και αν το θέσουμε ίσο με το μηδέν θα έχουμε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος

  - Παραγοντοποιώντας

$$\boxed{(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)(\gamma - \gamma_3) \ldots (\gamma - \gamma_{\mathrm{N}}) = 0}$$

με $\gamma_i, = 1, \ldots, N$ τις **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος

ιδιοσυχνότητες

eigenfrequencies

  - Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την ομογενή!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Αυτά τα γ αντιστοιχούν στις εξόδους

$$c_1\gamma_1^n, \quad c_2\gamma_2^n, \quad c_3\gamma_3^n, \quad \dots, \quad c_N\gamma_N^n, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, N$$

  - Μπορεί να δειχθεί ότι λύση της ομογενούς αποτελεί και το άθροισμα των παραπάνω

$$y_{zi}[n] = \boxed{c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + c_3\gamma_3^n + \dots + c_N\gamma_N^n,} \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, N$$

  - Άρα τελικά

$$y_{zi}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i\gamma_i^n, \quad n \geq 0$$

  - Και τα c_i?

  - Προφανώς τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες!

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση $\boxed{\text{μηδενικής εισόδου}}$ του συστήματος

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0, y[-1] = 1$.

Ομογενής Εξίσωση: $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$

Χαρ. Πολυώνυμο: $\gamma^2 + 5\gamma + 6$

Χαρ. Εξίσωση: $\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -2, \ \gamma_2 = -3$

χαρακ. ρίζες

Επομένως: $y_{zi}[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n, \quad n \geq 0$

$= c_1 (-2)^n + c_2 (-3)^n, \quad n \geq 0$

$c_1 = 4$

$c_2 = -9$

Αρχ. Συνθήκες:

$y[-2] = 0 \Rightarrow c_1 (-2)^{(-2)} + c_2 (-3)^{(-2)} = c_1 \frac{1}{4} + c_2 \frac{1}{9} = 0 \quad (1)$

$y[-1] = 1 \Rightarrow c_1 (-2)^{-1} + c_2 (-3)^{-1} = c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{1}{3} = -1 \quad (2)$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

$c_1 = 4$, $c_2 = -9$, $\gamma_1 = -2$, $\gamma_2 = -3$

Άρα

$$y_{zi}[n] = c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n, \quad n \geq 0$$

$$= 4(-2)^n - 9(-3)^n, \quad n \geq 0 \Rightarrow$$

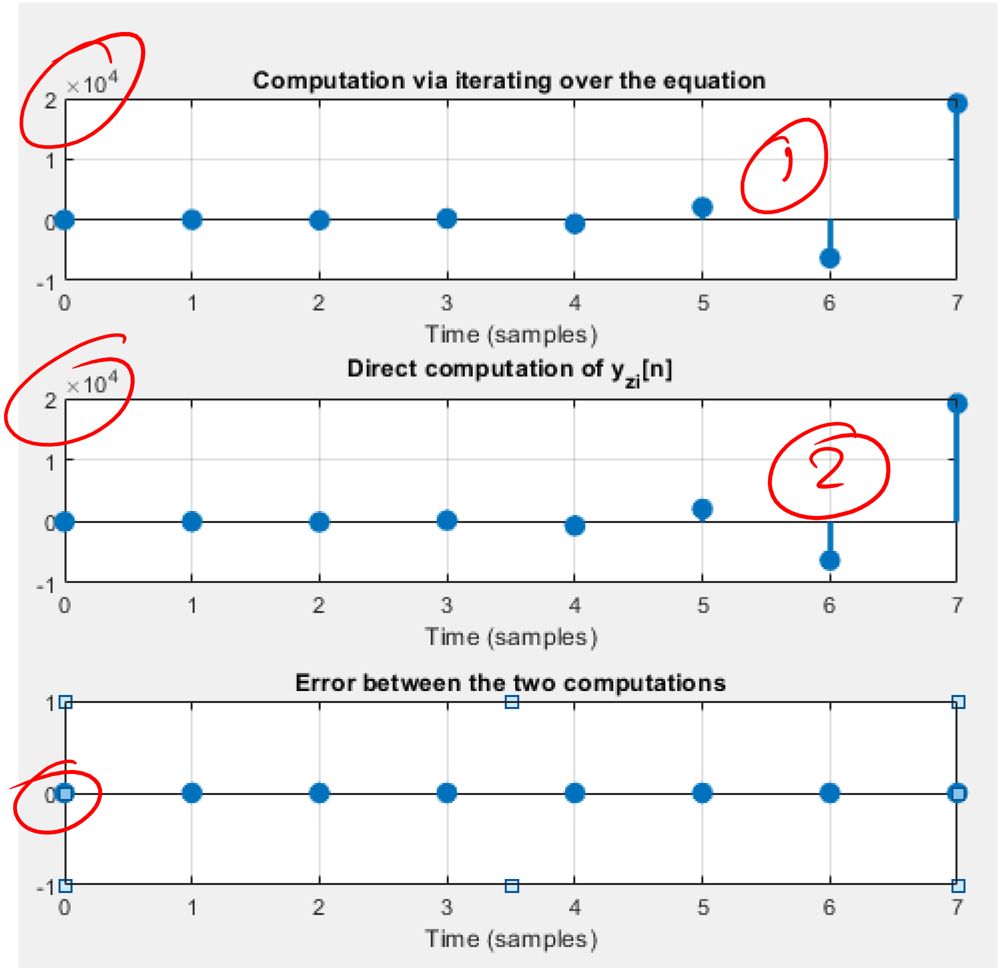
$$\Rightarrow \boxed{y_{zi}[n] = \left[4(-2)^n - 9(-3)^n\right] u[n]}$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - MATLAB:

```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω?
N = 10;

% Αρχικοποίηση
y = zeros(1,N);

% Αρχικές συνθήκες y[-2] = 0, y[-1] = 1
y(1) = 0;
y(2) = 1;

% Μετράω από n=3 θεωρώντας ότ το y(3) είναι το y[0]
for n=3:N
y(n) = -5*y(n-1) - 6*y(n-2);
end

% Προβολή
figure; subplot(311);
stem(0:N-3, y(3:end));
title('Computation via iterating over the equation');
xlabel('Time (samples)');

n = 0:7;
yzi = 4*(-2).^n - 9*(-3).^n;
subplot(312); stem(n, yzi);
title('Direct computation of y_{zi}[n]');
xlabel('Time (samples)');

error = yzi - y(3:end);
subplot(313); stem(n, error);
title('Error between the two computations');
xlabel('Time (samples)');
```

1 ①

← ②



- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n]$$

με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1, y[-1] = 0$.

Ομογενής Εξίσωση: $y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 0$

Χαρ. Πολυώνυμο: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12}$

Χαρ. Εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -\frac{1}{4}, \gamma_2 = -\frac{1}{3}$ Χαρακτηρ. ρίζες

Επομένως $y_{zi}[n] = c_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} y[-2]=1 &\Rightarrow c_1\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{-2} + c_2\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{-2} = 1 \\ y[-1]=0 &\Rightarrow c_1\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{-1} + c_2\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{-1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{3}$$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**
  - Παράδειγμα:

Χαρακτηριστικές ρίζες: $\gamma_1 = -\frac{1}{4}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{3}$

Συντελεστές: $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$

Επομένως: $y_{zi}[n] = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \geq 0$

Αυτή είναι η απόκριση μηδενικής εισόδου

$$\boxed{y_{zi}[n] = \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] u[n]}$$

για το σύστημα με →

$$y[n] + \frac{7}{12} y[n-1] + \frac{1}{12} y[n-2] = 3x[n]$$

αυτές τις Αρχ. Συνθήκες →

$$y[-2] = 1, \quad y[-1] = 0$$

Αν αλλάξουν οι Αρχ. Συνθ. τότε πρέπει να ΞΑΝΑ υπολογίσουμε το $y_{zi}[n]$

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$**

  - Σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας (πολλαπλότητας ≥ 2), μπορεί κανείς να δείξει ότι :

$N=4$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ διακρ. ρίζες

$\gamma_1, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ $r=2$ για γ_1

Αν

$(\gamma-\gamma_1)^2(\gamma-\gamma_3)(\gamma-\gamma_4)$

$$(\gamma-\gamma_1)^r(\gamma-\gamma_{r+1})(\gamma-\gamma_{r+2})\dots(\gamma-\gamma_N)$$

μια παραγοντοποίηση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται

$$y_{zi}[n] = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i n^{i-1}\gamma_1^n}_{\text{Οφείλεται στην πολλαπλή ρίζα } \gamma_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{N} c_i \gamma_i^n}_{\text{Οφείλεται στις υπόλοιπες ρίζες}}, \qquad n \geq 0$$

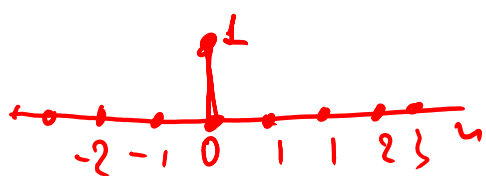
- **Απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$**

  - Στην απόκριση μηδενικής κατάστασης, οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, και η έξοδος καθορίζεται μόνο από την είσοδο και τα χαρακτηριστικά του συστήματος

  - Αν η συνολική έξοδος $y[n]$ καθορίζεται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης, τότε το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ)**
    - Αυτή η ιδιότητα θα αποβεί καθοριστική στην πορεία

  - Θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο
    - Ας φτάσουμε σε αυτό βήμα-βήμα

  - Ποιο είναι το απλούστερο σήμα που μπορεί να παρουσιαστεί στην είσοδο ενός συστήματος?
    - Η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$



- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$ τότε η έξοδος του συστήματος ονομάζεται **κρουστική απόκριση** (impulse response)
    - Έχει “νόημα”: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ένα σήμα που «ζει» μόνο σε μια χρονική στιγμή)
    - Η κρουστική απόκριση συμβολίζεται ως $h[n]$

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{S_{\text{ΓΧΑ}}} \longrightarrow y[n] = h[n]$$

  - Μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

  - Ας δοκιμάσουμε να βρούμε την κρουστική απόκριση για ένα απλό σύστημα

  - Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την απόκριση μηδενικής εισόδου, και θα “θεωρήσουμε” ότι η συνάρτηση Δέλτα εισάγει (ψευδο-)αρχικές συνθήκες για $n = 0$

  - Θα λύσουμε την ομογενή εξίσωση για $n > 0$!!!! ☺

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

$N=1 \quad B=0 \quad b_0=1$

- Έστω το σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n]$$

Ας βρούμε την κρουστική του απόκριση

- Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και τότε

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n]$$

- Για $n = 0$,

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = \delta[0] \;\Leftrightarrow\; \boxed{a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1}$$

$$a_0 h[0] + \cancel{a_1 \cdot 0} = 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 h[0] = 1 \;\Leftrightarrow\; \boxed{h[0] = \frac{1}{a_0}}$$

Αρχ. συνθήκη για $n>0$

- Αυτή είναι η (ψευδο-)αρχική μας συνθήκη!

- Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση της ομογενούς εξίσωσης για $n > 0$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Έστω το ομογενές σύστημα

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = 0, \qquad n > 0$$

  - Ξέρουμε ότι

$y[n] = h[n]$

$$y[n]:\ h[n] = c\gamma^n, \qquad n \geq 0$$

  - Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$a_0\gamma + a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$$

χαρ. ρίζα

  - Οπότε

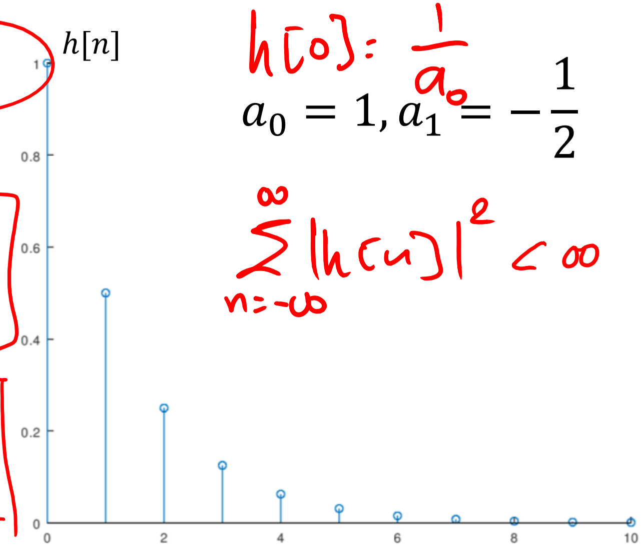
$$h[n] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0$$

  - Βρίσκουμε και τη σταθερά ως

$$h[0] = c\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^0 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{a_0}}$$

  - Άρα

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{a_0}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \qquad n \geq 0}$$



$h[0]: \frac{1}{a_0}$

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 < \infty$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Θα μπορούσαμε να επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών, ανεξαρτήτως τάξης

  - Όμως σίγουρα κάτι τέτοιο είναι αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό
    - Υπάρχει κάποια ευκολότερη μέθοδος;

  - Με άλλα λόγια, αν το σύστημα είναι της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

  τότε τι κάνουμε για να βρούμε την κρουστική απόκριση εύκολα και γρήγορα?

  - Το γεγονός ότι το σύστημα είναι ΓΧΑ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην απάντηση

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$**

  - Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$S_b: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 1\cdot x[n]$$

με κρουστική απόκριση $h_b[n]$

  - Τότε η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_0: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n]$$

θα είναι $\boxed{h_0[n] = b_0 h_b[n]}$

  - Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S_{0^-}: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n-l]$$

θα είναι $h_{0^-}[n] = b_0 h_b[n-l]$

- **Κρουστική Απόκριση $\boldsymbol{h[n]}$**

  - Ακολουθώντας την ίδια λογική, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$S: \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

θα είναι

$$\boxed{h[n] = \sum_{l=0}^{M} b_l h_b[n-l]}$$

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (ομογένεια) μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το πρώτο σύστημα στο δεύτερο, ενώ η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας μας επέτρεψε να γενικεύσουμε το δεύτερο στο τρίτο

  - Η ιδιότητα της γραμμικότητας (αθροιστικότητα) μας επέτρεψε ξανά να βρούμε το παραπάνω αποτέλεσμα

  - Και οι δυο ιδιότητες (ΓΧΑ) μας επιτρέπουν να γράψουμε τη γενικότερη απάντηση που βλέπετε παραπάνω

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος

Μηδ. Αρχ. Συνθήκες

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

① $x[n]=\delta[n] \Rightarrow h[n]+\frac{5}{6}h[n-1]+\frac{1}{6}h[n-2]=\delta[n]$

② Για $n=0 \Rightarrow h[0]+\frac{5}{6}\cancel{h[-1]}^{0}+\frac{1}{6}\cancel{h[-2]}^{0}=\delta[0] \Rightarrow h[0]=\delta[0]=1$ ① $n=0$

Για $n=1 \Rightarrow h[1]+\frac{5}{6}\cancel{h[0]}^{1}+\frac{1}{6}\cancel{h[-1]}^{0}=0=\delta[1] \Rightarrow h[1]=-\frac{5}{6}$ ② $n=1$

Χαρ. πολυώνυμο: $\gamma^2+\frac{5}{6}\gamma+\frac{1}{6}$

Χαρ. Εξίσωση: $\gamma^2+\frac{5}{6}\gamma+\frac{1}{6}=0 \Rightarrow \gamma_1=-\frac{1}{3},\ \gamma_2=-\frac{1}{2}$ Χαρακτ. ρίζες

Άρα $h[n]=c_1\cdot\gamma_1^n+c_2\gamma_2^n=c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n+c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\quad n\geq 0$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

$$h[0]=1 \Rightarrow c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = c_1 + c_2 = 1$$

$$h[1] = -\frac{5}{6} \Rightarrow c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = -\frac{5}{6} \Rightarrow 2c_1 + 3c_2 = 5$$

$$\Rightarrow c_1 = -2,\ c_2 = 3$$

Άρα.

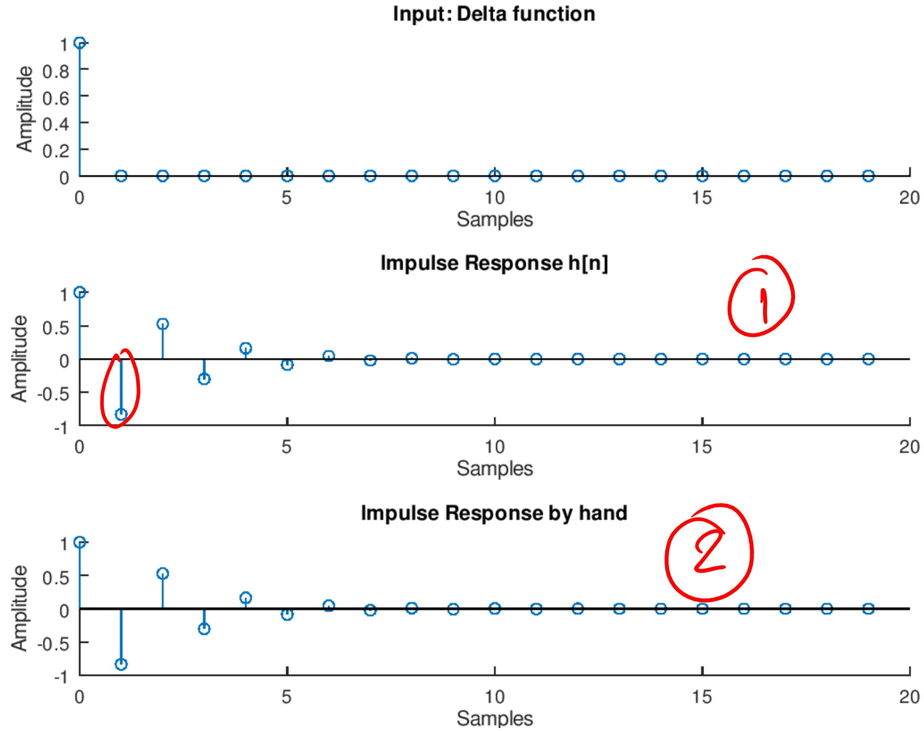
$$h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Μοναδιαία Απόκριση του

$$\boxed{h[n] = -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

ΓΧΑ συστήματος: $y[n] + \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = x[n]$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - MATLAB:




```
% Πόσα δείγματα θέλω να παράξω;
N = 20;

% Αρχικοποίηση
h = zeros(1, N);

% "Ψευδοαρχικές" συνθήκες
h(1) = 1;
h(2) = -5/6;

% Είσοδος: συνάρτηση Δέλτα
x = [1, zeros(1,N-1)];

% Μετράω από n=3
for n=3:N
  h(n) = -5/6*h(n-1) - 1/6*h(n-2); % το x[n] δε χρειάζεται εδώ (είναι πάντα 0)
end
```

1

```
% Γραφήματα
figure; subplot(311);
stem(0:N-1, x); title('Input: Delta function');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');

subplot(312); stem(0:N-1, h); title('Impulse Response h[n]');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');
```

1

```
n = 0:N-1;
h_hand = -2*(-1/3).^n + 3*(-1/2).^n;
subplot(313); stem(n, h_hand); title('Impulse Response by hand');
xlabel('Samples'); ylabel('Amplitude');
```

2

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**

  - Παρατηρήσεις:

1. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 2x[n]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 2h[n] = 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

2. Αν η εξίσωση διαφορών ήταν της μορφής

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 4x[n] - 2x[n-2]$$

τότε η κρουστική απόκριση θα ήταν της μορφής

$$h'[n] = 4h[n] - 2h[n-2]$$

$$= 4\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] - 2\left[-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]u[n-2]$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:
  - ○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

$$y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Βρείτε την κρουστική του απόκριση.

S_0: $y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n]$

Θέτουμε $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h_0[n]$

$$h_0[n] + \frac{2}{3}h_0[n-1] + \frac{1}{9}h_0[n-2] = \delta[n]$$

$n=0$: $h_0[0] + \frac{2}{3}\cancelto{0}{h_0[-1]} + \frac{1}{9}\cancelto{0}{h_0[-2]} = \delta[0] = 1 \Rightarrow h_0[0] = 1$

$n=1$: $h_0[1] + \frac{2}{3}\cancelto{1}{h_0[0]} + \frac{1}{9}\cancelto{0}{h_0[-1]} = \delta[1] = 0 \Rightarrow h_0[1] = -\frac{2}{3}$

Χαρ. εξίσωση: $\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\gamma + \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = -\frac{1}{3}}$ πολλαπλότητα 2

$$h_0[n] = (c_0 + n c_1)\gamma_1^n, \quad n \geq 0$$

- **Κρουστική Απόκριση $h[n]$**
  - Παράδειγμα:

$$h_0[n] = (c_0 + n c_1)\gamma_1^n, \quad n \geq 0 \qquad \gamma_1 = -\frac{1}{3}$$

$$h_0[0] = 1$$

$$h_0[1] = -\frac{2}{3}$$

$$h_0[0] = 1 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$h_0[1] = -\frac{2}{3} \Rightarrow (c_0 + 1\cdot c_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow c_1 = 1$$

Επομένως: $$h_0[n] = (1+n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Άρα για το σύστημα:

$$y[n] + \frac{2}{3} y[n-1] + \frac{1}{9} y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

η μοναδιαία απόκριση θα είναι:

$$h[n] = h_0[n] + 2h_0[n-1]$$

$$= (1+n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ