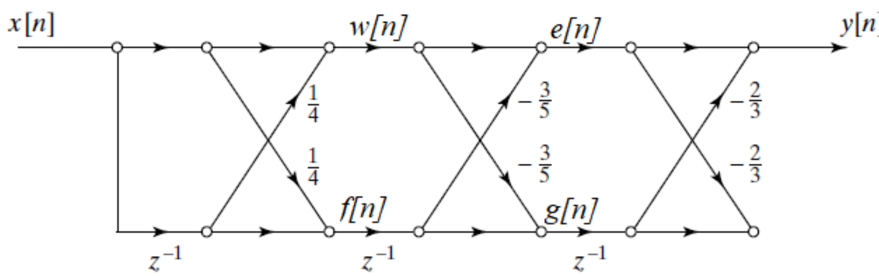
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.
Δείτε το Σχήμα 1. Βάζοντας ενδιάμεσες μεταβλητές στην έξοδο κάθε κόμβου, θα έχουμε τις εξισώσεις



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

$$w[n] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] \tag{1}$$
$$f[n] = \frac{1}{4}x[n] + x[n-1] \tag{2}$$
$$e[n] = w[n] - \frac{3}{5}f[n-1] \tag{3}$$
$$g[n] = -\frac{3}{5}w[n] + f[n-1] \tag{4}$$
$$y[n] = -\frac{2}{3}g[n-1] + e[n] \tag{5}$$

και στο χώρο του Z, θα είναι

$$W(z) = X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}X(z) \tag{6}$$
$$F(z) = \frac{1}{4}X(z) + z^{-1}X(z) \tag{7}$$
$$E(z) = W(z) - \frac{3}{5}z^{-1}F(z) \tag{8}$$
$$G(z) = -\frac{3}{5}W(z) + z^{-1}F(z) \tag{9}$$
$$Y(z) = -\frac{2}{3}z^{-1}G(z) + E(z) \tag{10}$$

Οι εξισώσεις γράφονται

$$W(z) = X(z)(1 + \frac{1}{4}z^{-1}) \tag{11}$$
$$F(z) = X(z)(\frac{1}{4} + z^{-1}) \tag{12}$$
$$E(z) = X(z)(1 + \frac{1}{4}z^{-1}) - \frac{3}{5}z^{-1}X(z)(\frac{1}{4} + z^{-1}) \tag{13}$$
$$G(z) = -\frac{3}{5}X(z)(1 + \frac{1}{4}z^{-1}) + z^{-1}X(z)(\frac{1}{4} + z^{-1}) \tag{14}$$
$$Y(z) = -\frac{2}{3}z^{-1}G(z) + E(z) \tag{15}$$

Από τις τρεις τελευταίες έχουμε

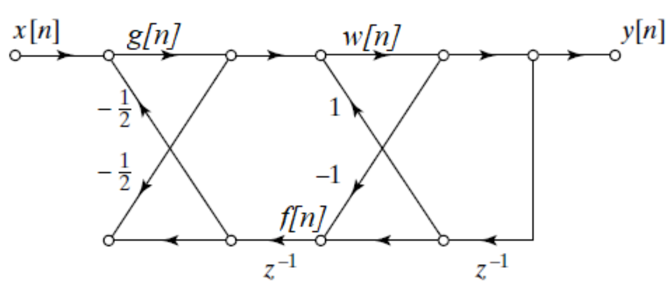
$$E(z) = X(z)\Big(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{20}z^{-1} - \frac{3}{5}z^{-2}\Big) \tag{16}$$
$$G(z) = X(z)\Big(- \frac{3}{5} - \frac{3}{20}z^{-1} + z^{-1}\frac{1}{4} + z^{-2}\Big) \tag{17}$$
$$Y(z) = -\frac{2}{3}z^{-1}G(z) + E(z) \tag{18}$$

και η τελευταία θα δίνει

$$Y(z) = -\frac{2}{3}z^{-1}X(z)\Big(- \frac{3}{5} - \frac{3}{20}z^{-1} + z^{-1}\frac{1}{4} + z^{-2}\Big) + X(z)\Big(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{20}z^{-1} - \frac{3}{5}z^{-2}\Big) \tag{19}$$
$$= X(z)\Big(\frac{6}{15}z^{-1} + \frac{1}{10}z^{-2} - \frac{1}{6}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3} + 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{20}z^{-1} - \frac{3}{5}z^{-2}\Big) \tag{20}$$
$$= X(z)\Big(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}\Big) \tag{21}$$
$$H(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3} \tag{22}$$

Το σύστημα είναι FIR, καθώς έχει πόλους μόνο στο μηδέν (εναλλακτικά, η κρουστική του απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας).

Άσκηση 2.
Δείτε το Σχήμα 2. Βάζοντας ενδιάμεσες μεταβλητές στις εξόδους κάθε κόμβου, θα έχουμε



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 2.*

$$g[n] = x[n] - \frac{1}{2}f[n-1] \tag{23}$$
$$f[n] = -w[n] + y[n-1] \tag{24}$$
$$w[n] = g[n] + y[n-1] \tag{25}$$
$$y[n] = w[n] \tag{26}$$

Με βάση την τελευταία εξίσωση, ξαναγράφουμε την ομάδα

$$g[n] = x[n] - \frac{1}{2}f[n-1] \tag{27}$$

$$f[n] = -y[n] + y[n-1] \tag{28}$$

$$y[n] = g[n] + y[n-1] \tag{29}$$

Στο χώρο του Ζ,

$$G(z) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}F(z) \tag{30}$$

$$F(z) = -Y(z) + z^{-1}Y(z) \tag{31}$$

$$Y(z) = G(z) + z^{-1}Y(z) \tag{32}$$

Από τις δυο πρώτες

$$G(z) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}(-Y(z) + z^{-1}Y(z)) \tag{33}$$

$$= X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z) \tag{34}$$

και η έξοδος θα γράφεται

$$Y(z) = G(z) + z^{-1}Y(z) \tag{35}$$

$$= X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z) + z^{-1}Y(z) \tag{36}$$

$$= X(z) + \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z) \tag{37}$$

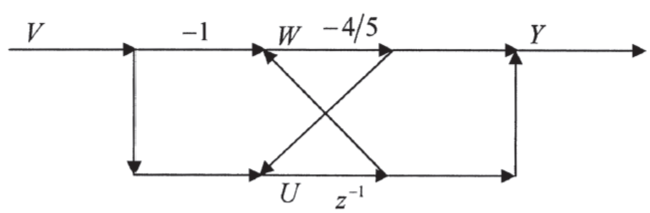
$$Y(z) - \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) \tag{38}$$

$$Y(z)(1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}) = X(z) \tag{39}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \tag{40}$$

Προφανώς το σύστημα είναι IIR αφού έχει μη μηδενικούς πόλους στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 3.
Δείτε το γράφο του Σχήματος 3.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 3α.*

(α΄) Δουλεύοντας πρώτα με το εσωτερικό τμήμα του γράφου, όπως στο Σχήμα 3, οι μετασχ. Ζ θα είναι

$$W(z) = -V(z) + z^{-1}U(z) \tag{41}$$

$$U(z) = V(z) - \frac{4}{5}W(z) \tag{42}$$

$$Y(z) = -\frac{4}{5}W(z) + z^{-1}U(z) \tag{43}$$

Από τις δυο πρώτες

$$W(z) = -V(z) + z^{-1}V(z) - \frac{4}{5}z^{-1}W(z) \tag{44}$$
$$W(z)\Big(1 + \frac{4}{5}z^{-1}\Big) = V(z)(-1 + z^{-1}) \tag{45}$$
$$W(z) = V(z)\Big(\frac{z^{-1} - 1}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}}\Big) \tag{46}$$

Όμοια

$$U(z) = V(z) + \frac{4}{5}V(z) - \frac{4}{5}z^{-1}U(z) \tag{47}$$
$$U(z)\Big(1 + \frac{4}{5}z^{-1}\Big) = \frac{9}{5}V(z) \tag{48}$$
$$U(z) = V(z)\Big(\frac{\frac{9}{5}}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}}\Big) \tag{49}$$

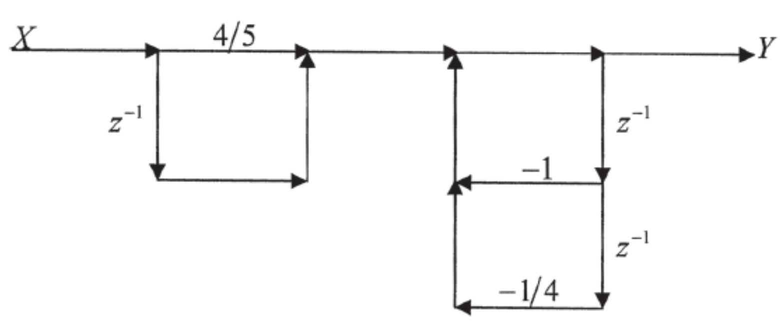
Από τις δυο εξισώσεις που καταλήξαμε, η έξοδος $Y(z)$ θα είναι

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = -\frac{4}{5}\Big(\frac{z^{-1} - 1}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}}\Big) + \frac{\frac{9}{5}}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}} \tag{50}$$
$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{\frac{4}{5} + z^{-1}}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}} \tag{51}$$

Ας ονομάσουμε αυτήν τη συνάρτηση μεταφοράς ως $H_{in}(z)$, οπότε το συνολικό σύστημα θα δίνεται ως

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_{in}(z)}{1 - H_{in}(z)(-\frac{1}{4}z^{-1})} \tag{52}$$
$$= \frac{\frac{4}{5} + z^{-1}}{1 + \frac{4}{5}z^{-1} + \Big(\frac{1}{4}z^{-1}\Big)\Big(\frac{4}{5} + z^{-1}\Big)} \tag{53}$$
$$= \frac{\frac{4}{5} + z^{-1}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{54}$$

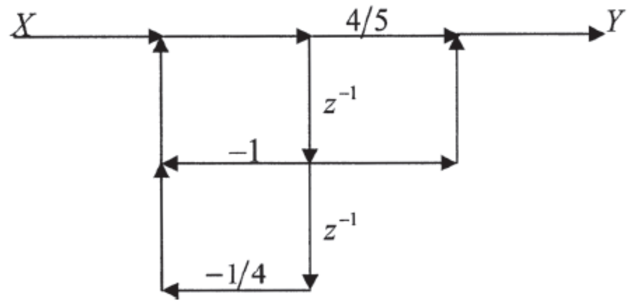
(β΄) Οι γράφοι φαίνονται στα Σχήματα 4, 5.



Σχήμα 4: *Σχήμα Άσκησης 3β - DFI.*

(γ΄) Ας δούμε που έχει πόλους και μηδενικά το σύστημα $H(z)$:

$$H(z) = \frac{z(\frac{4}{5}z + 1)}{(z + \frac{1}{2})^2} \tag{55}$$

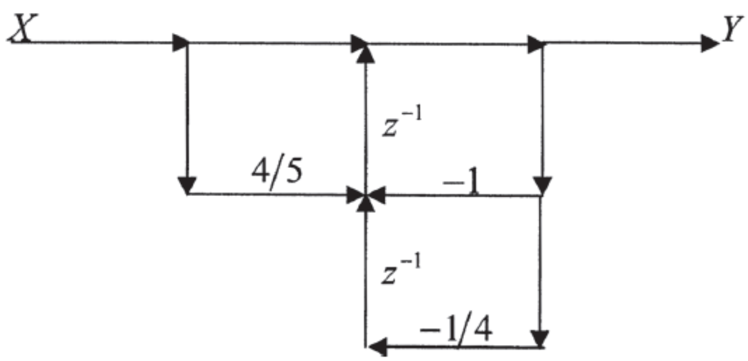


Σχήμα 5: *Σχήμα Άσκησης 3β - DFII.*

Το μηδενικό στο $z = 0$ κι ο διπλός πόλος στο $z = -1/2$ είναι εντός μοναδιαίου κύκλου. Όμως, το μηδενικό στο $z = -5/4$ δεν είναι. Ακυρώνουμε αυτό το μηδενικό σχεδιάζοντας το $H_1(z)$ ως ένα μοναδιαίου πλάτους all-pass σύστημα με εναν πόλο στο $z = -5/4$ και ένα μηδενικό στο $z = -4/5$, δηλ.

$$H_1(z) = \frac{z^{-1} + \frac{5}{4}}{1 + \frac{5}{4}z^{-1}} \tag{56}$$

(δ΄) Η ανάστροφη μορφή του Direct Form II γράφου του συστήματος $H_2(z)$ φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: *Σχήμα Άσκησης 3δ.*

Άσκηση 4.

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γενικευμένη γραμμική φάση και έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} \tag{57}$$

Η κρουστική απόκριση έχει μοναδιαία ενέργεια, $a \geq 0$, και ισχύει

- $H(e^{j\pi}) = 0$
- $H(e^{j0}) = 0$

(α΄) Η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1] + c\delta[n-2] \tag{58}$$

Μοναδιαία ενέργεια σημαίνει

$$\sum_{n=0}^{2} |h[n]|^2 = 1 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{59}$$

Στη συνέχεια

$$H(e^{j\pi}) = 0 \iff \sum_{n=0}^{2} h[n](-1)^n = 0 \iff a - b + c = 0 \tag{60}$$

και

$$H(e^{j0}) = 0 \iff \sum_{n=0}^{2} h[n] = 0 \iff a + b + c = 0 \tag{61}$$

Λύνοντας το σύστημα με τους τρεις αγνώστους θα έχουμε

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{62}$$

$$b = 0 \tag{63}$$

$$c = -a \tag{64}$$

Επειδή $a \geq 0$ από εκφώνηση, έχουμε τελικά

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta[n] - \frac{1}{\sqrt{2}}\delta[n-2] \tag{65}$$

(β΄) Μετασχηματίζοντας την κρουστική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j2\omega} \tag{66}$$

Παραγοντοποιώντας

$$H(e^{j\omega}) = j\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j\omega}\sin(\omega) \tag{67}$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{2}{\sqrt{2}}|\sin(\omega)| \tag{68}$$

και είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός στο $[0, \pi]$. Η απόκριση φάσης θα είναι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2} - \omega \tag{69}$$

στο $[0, \pi]$. Επειδή το σήμα είναι πραγματικό, η απόκριση πλάτους και φάσης θα είναι άρτια και περιττή, αντίστοιχα, ως προς ω. Δείτε το Σχήμα 7.

Άσκηση 5.

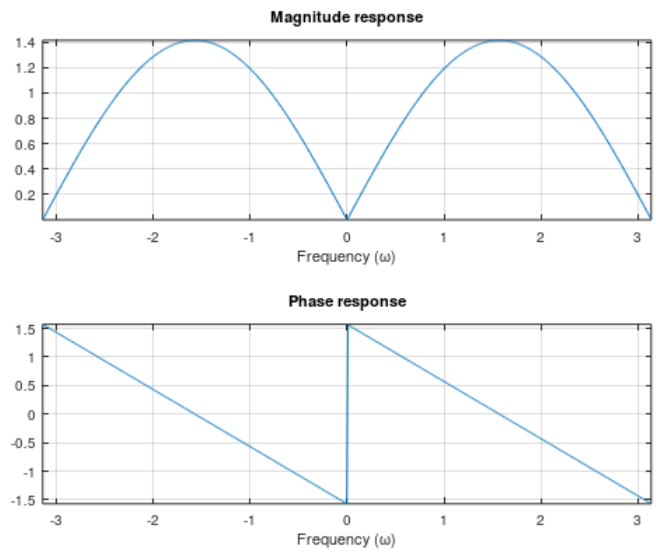
(α΄) Το σύστημα γράφεται

$$H(z) = \frac{(z^2-9)(z+\frac{1}{3})}{z^2(z-\frac{1}{3})} \tag{70}$$

Τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z = 3$, $z = -3$, $z = -1/3$ και οι πόλοι στις θέσεις $z = 0$, $z = 0$, $z = 1/3$. Τα μηδενικα στις θέσεις $z = 3$, $z = -3$ δεν μπορούν να πάνε στο σύστημα ελάχιστης φάσης, άρα θα πάνε στο all-pass. Για να είναι έγκυρο all-pass θα πρέπει να έχει πόλους στις θέσεις $z = 1/3$ και $z = -1/3$. Για να ισχύει η διάσπαση, πρέπει αυτοί οι δυο πόλοι να ακυρώνονται από το ελάχιστης φάσης, δηλ. πρέπει να βάλουμε δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 1/3$, $z = -1/3$ στο ελάχιστης φάσης σύστημα. Το μηδενικό που εισάγουμε στη θέση $z = 1/3$ ακυρώνει τον πόλο που είναι ήδη εκεί. Άρα

$$H_{min}(z) = -9\Big(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\Big)^2 \tag{71}$$

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1}-\frac{1}{3})(z^{-1}+\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} \tag{72}$$



Σχήμα 7: *Σχήμα Άσκησης 4.*

(β΄) Ναι, είναι FIR αφού έχει πόλους μόνο στο μηδέν.

(γ΄) Όχι, δεν είναι ελάχιστης φάσης γιατί η κρουστική του απόκριση

$$h[n] = -9\delta[n] - 3\delta[n-1] - \delta[n-2] \tag{73}$$

δεν τηρεί κάποια συμμετρία γύρω από κάποιο δείγμα. Για τη διάσπαση σε γραμμικής φάσης και all-pass, το σύστημα έχει δυο πόλους στο $z = 0$ και δυο μηδενικά στο $z = -1/3$. Το ένα μηδενικό θα πάει στο γραμμικής φάσης και το άλλο στο all-pass. Για να είναι έγκυρο all-pass πρέπει να έχει έναν πόλο στο $z = -3$, οπότε

$$H_{ap}(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} = \frac{1}{3}\frac{z^{-1} + 3}{1 + 3z^{-1}} \tag{74}$$

Πρέπει να ακυρώσουμε τον πόλο στο $z = -3$ βάζοντας ένα μηδενικό στην ίδια θέση στο γραμμικής φάσης. Τα μηδενικά του γραμμικής φάσης συστήματος είναι σε σωστές θέσεις πλέον (αμοιβαία πραγματικά), οπότε μεταφέροντας τη σταθερά $1/3$ στο γραμμικής φάσης, ώστε να είναι μοναδιαίου πλάτους το all-pass, θα έχουμε

$$H_{lp}(z) = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\Big)(1 + 3z^{-1}) \tag{75}$$