ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος**
**Χειμερινό Εξάμηνο 2020**
**Διδάσκων: Γ. Στυλιανού**

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Θεωρήστε το παρακάτω αιτιατό σήμα πεπερασμένης διάρκειας:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 2\delta[n-2] - \delta[n-3] \tag{1}$$

(αʹ) Εφαρμόζοντας μετασχ. Fourier στο σήμα έχουμε

$$X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} - 2e^{-j2\omega} - e^{-j3\omega} \tag{2}$$

και βγάζοντας κοινό παράγοντα από τους δυο τελευταίους και τους δυο μεσαίους όρους έχουμε

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega/2}(e^{j3\omega/2} - e^{-j3\omega/2}) + 2e^{-j3\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \tag{3}$$
$$= e^{-j3\omega/2}(2j\sin(3\omega/2)) + 2e^{-j3\omega/2}(2j\sin(\omega/2)) \tag{4}$$
$$= 2je^{-j3\omega/2}(\sin(3\omega/2) + 2\sin(\omega/2)) \tag{5}$$

(βʹ) Το φάσμα πλάτους θα είναι

$$|X(e^{j\omega})| = 2|j||e^{-j\frac{3\omega}{2}}|\left|\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right| \tag{6}$$

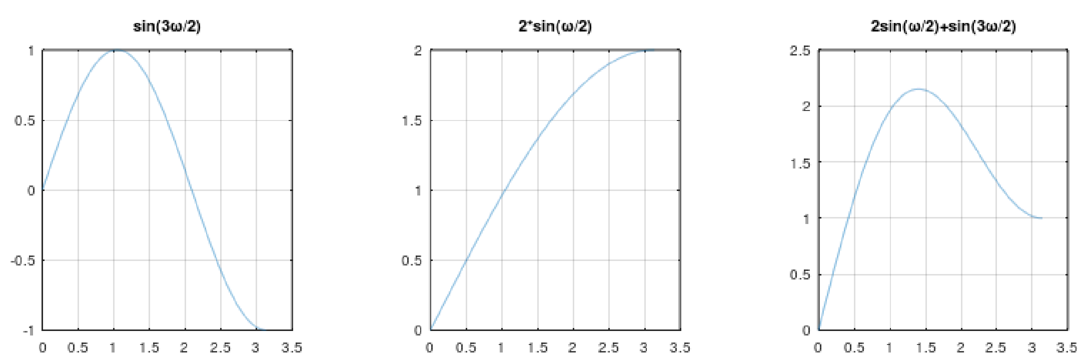
Ας βρούμε σημεία μηδενισμού στο $[0, \pi]$ για να σχεδιάσουμε τα δυο ημίτονα. Έχουμε

$$\sin(3\omega/2) = 0 \iff 3\omega/2 = k\pi \iff 3\omega = 2k\pi \iff \omega = 2k\pi/3, \ \ k \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

και

$$\sin(\omega/2) = 0 \iff \omega/2 = k\pi \iff \omega = 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

Στο Σχήμα 1 φαίνονται οι δυο ημιτονοειδείς όροι και το άθροισμα $\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Το σχήμα μπορεί να προκύψει στο χαρτί αν προσθέσετε τα δυο σήματα (σχεδόν) σημείο προς σημείο. Παρατηρήστε ότι είναι παντού θετικό εκτός του $\omega = 0$. Στο Σχήμα 2 φαίνεται το φάσμα πλάτους. Θα έχουμε άρτια συμμετρία στο




Σχήμα 1: *Ημιτονοειδείς όροι Άσκησης 1.*

$(-\pi, \pi]$.

(γ') Το φάσμα φάσης θα είναι

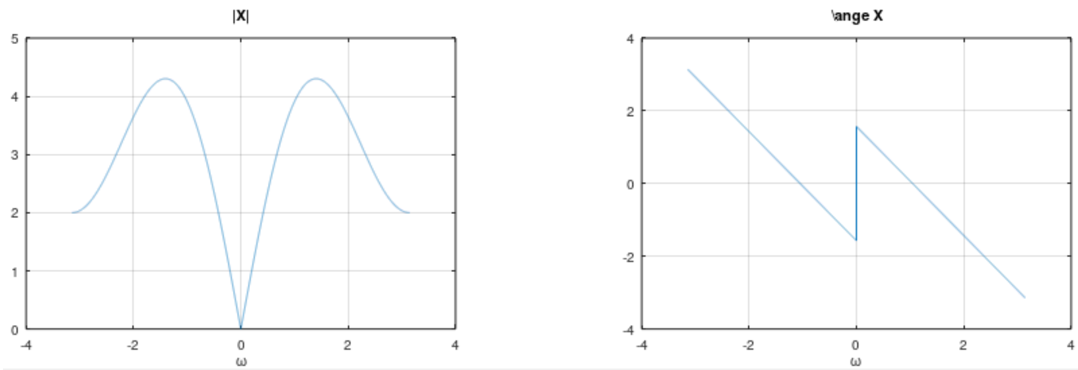
$$\angle X(e^{j\omega}) = \angle 2 + \angle j + \angle e^{-j3\omega/2} + \angle\Big[\sin\Big(\frac{3\omega}{2}\Big) + 2\sin\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big] \tag{9}$$

$$= \angle 2e^{j0} + \angle e^{j\pi/2} + \angle e^{-j3\omega/2} + \angle\Big[\sin\Big(\frac{3\omega}{2}\Big) + 2\sin\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big] \tag{10}$$

Στο διάστημα $[0, \pi]$, το άθροισμα ημιτόνων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, άρα η φάση είναι $0$.

$$\angle X(e^{j\omega}) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} \tag{11}$$

Η φάση είναι γραμμική, εκτός από τα σημεία μηδενισμού όπου δεν ορίζεται. Στο Σχήμα 2 φαίνεται το φάσμα φάσης με περιττή συμμετρία στο $(-\pi, \pi]$.




Σχήμα 2: *Φάσματα Άσκησης 1.*

**Άσκηση 2.** Η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος $h_1[n]$ θα είναι

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \tag{12}$$

Αφού τα συστήματα είναι σε παραλληλία, ισχύει

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) \iff H_2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) - H_1(e^{j\omega}) \tag{13}$$

οπότε

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \tag{14}$$

$$= \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \tag{15}$$

$$= \frac{-1 + \frac{5}{12}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} - \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \tag{16}$$

$$= \frac{-1 + \frac{5}{12}e^{-j\omega} - 1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \tag{17}$$

$$= \frac{-2 + \frac{2}{3}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \tag{18}$$

$$= \frac{-2(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \tag{19}$$

$$= -2\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \tag{20}$$

οπότε

$$h_2[n] = -2\Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \tag{21}$$

**Άσκηση 3.**

(α΄) Γνωρίζουμε ότι

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}} \tag{22}$$

και

$$y[n] = nx[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) = \frac{4}{5}\frac{e^{-j\omega}}{(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega})^2} \tag{23}$$

Οπότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{4}{5}\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}} \tag{24}$$

(β΄) Αναδιατάσσοντας την παραπάνω σχέση

$$Y(e^{j\omega})(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})\frac{4}{5}e^{-j\omega} \tag{25}$$

και γυριζοντας στο χρόνο

$$y[n] - \frac{4}{5}y[n-1] = \frac{4}{5}x[n-1] \tag{26}$$

**Άσκηση 4.** Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα το

$$X(z) = \frac{3}{1-\frac{2}{5}z^{-1}-\frac{8}{25}z^{-2}} = \frac{A}{1-0.8z^{-1}} + \frac{B}{1+0.4z^{-1}} \tag{27}$$

παίρνουμε

$$X(z) = \frac{2}{1-0.8z^{-1}} + \frac{1}{1+0.4z^{-1}} \tag{28}$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$x[n] = 2(0.8)^n u[n] + (-0.4)^n u[n] \tag{29}$$

Το σήμα $x[2n]$ είναι το

$$y[n] = x[2n] = [2(0.64)^n + (0.16)^n]u[n] \tag{30}$$

Εύκολα βρίσκουμε από γνωστά ζεύγη ότι

$$Y(z) = \frac{2}{1-0.64z^{-1}} + \frac{1}{1-0.16z^{-1}} = \frac{3-\frac{24}{25}z^{-1}}{1-\frac{4}{5}z^{-1}+\frac{64}{625}z^{-2}},\ \ |z| > \frac{16}{25} \tag{31}$$

**Άσκηση 5.** Γνωρίζουμε ότι

$$\Big(\frac{1}{4}\Big)^n x[n] \longleftrightarrow X(4z),\ \ \frac{R}{4} \tag{32}$$

και

$$\Big(\frac{1}{8}\Big)^n x[n] \longleftrightarrow X(8z),\ \ \frac{R}{8} \tag{33}$$

με $R$ το πεδίο σύγκλισης του $X(z)$. Αφού το $\frac{R}{4}$ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο και το $X(z)$ έχει έναν πόλο στο $z = 1/2$, συμπεραίνουμε ότι το $R$ βρίσκεται εκτός του κύκλου με ακτίνα $1/2$. Το μόνο ερώτημα τώρα που πρέπει να απαντηθεί είναι αν το $R$ εκτείνεται ως το άπειρο, έξω από τον κύκλο ακτίνας $1/2$. Αφού το $\frac{R}{8}$

δεν περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, είναι σαφές ότι αυτό δεν ισχύει. Άρα το $R$ είναι ένας δακτύλιος στο $z-$επίπεδο. Τέτοια πεδία σύγκλισης έχουν τα αμφίπλευρα σήματα.

**Άσκηση 6.** Από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$a^n u[-n-n_0] \longleftrightarrow \frac{z^{-n_0}}{1-az^{-1}},\ \ |z|<|a| \tag{34}$$

και

$$(-1)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1+z^{-1}},\ \ |z|>1 \tag{35}$$

και άρα

$$X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{-z^{-n_0-1}}{1-az^{-1}},\ \ 1<|z|<|a| \tag{36}$$

Οπότε $|a|=2$ και το $n_0$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.