ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Γ. Στυλιανού

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1. Μπορούμε εναλλακτικά να γράψουμε το σήμα μας ως

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}[u[n-3] - u[n-10]] \tag{1}$$

Το σήμα είναι μη μηδενικό μόνο στο διάστημα $-3 \leq n \leq 9$. Άρα το σήμα $h[-n]$ θα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $-9 \leq n \leq 3$. Αν ολισθήσουμε το σήμα $h[-k]$ κατά n δεξιά, δηλ. φτιάξουμε το $h[n-k]$, αυτό θα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $(n-9) \leq k \leq (n+3)$. Άρα

$$A = n - 9 \tag{2}$$

$$B = n + 3 \tag{3}$$

Άσκηση 2. Προφανώς

$$h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \tag{4}$$

Αφού

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_2[n] \tag{5}$$

θα είναι

$$h[n] = h_1[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2] \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας τιμές έχουμε

$$h[0] = h_1[0] \Longrightarrow h_1[0] = 1 \tag{7}$$

$$h[1] = h_1[1] + 2h_1[0] \Longrightarrow h_1[1] = 3 \tag{8}$$

$$\vdots = \vdots \tag{9}$$

$$h[5] = h_1[5] + 2h_1[4] + h_1[3] \Longrightarrow h_1[5] = 0 \tag{10}$$

και από κει και μετά είναι πάντα μηδέν. Άρα η κρουστική απόκριση $h_1[n]$ ισούται με

$$h_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \text{ και } n = 2 \\ 2, & n = 3 \\ 1, & n = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11}$$

Άσκηση 3.

i. $y[n] = x[4n+1]$: έστω το ζεύγος εισόδου-εξόδου $x[n] \longrightarrow y[n]$.

- Γραμμικό: για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$ax_1[4n+1] + bx_2[4n+1] = ay_1[n] + by_2[n] \tag{12}$$

  αρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Ευσταθές: αν $|x[n]| < B_x$ τότε $|y[n]| = |x[4n+1]| < B_x$, άρα είναι ευσταθές.
- Αιτιατό: για $y[0]$ χρειαζόμαστε το $x[1]$, άρα δεν είναι αιτιατό.
- Χ.Α.: για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος θα είναι

$$T\{x[n-n_0]\} = x[4n+1-n_0] \tag{13}$$

  Η καθυστερημένη κατά n_0 έξοδος θα είναι

$$y[n-n_0] = x[4(n-n_0)+1] = x[4n-4n_0+1] \neq T\{x[n-n_0]\} \tag{14}$$

  άρα δεν είναι Χ.Α.
- Δυναμικό: το σύστημα είναι δυναμικό, αφου χρειάζεται αποθηκευμένες τιμές της εισόδου για να υπολογίσει την έξοδο (π.χ. $y[1]$ χρειάζεται το $x[5]$).

ii. $y[n] = (n+1)x[n]$: έστω το ζεύγος εισόδου-εξόδου $x[n] \longrightarrow y[n]$.

- Γραμμικό: για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$a(n+1)x_1[n] + b(n+1)x_2[n] = ay_1[n] + by_2[n] \tag{15}$$

  αρα το σύστημα είναι γραμμικό.
- Ευσταθές: αν $|x[n]| < B_x$ τότε $|y[n]| = |(n+1)x[n]| = |n+1||x[n]| < (n+1)B_x$, άρα δεν είναι ευσταθές γιατί όταν $n \to \infty$, $|y[n]| \to \infty$.
- Αιτιατό: η έξοδος εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου, άρα ειναι αιτιατό.
- Χ.Α.: για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος θα είναι

$$T\{x[n-n_0]\} = (n+1)x[n-n_0] \tag{16}$$

  Η καθυστερημένη κατά n_0 έξοδος θα είναι

$$y[n-n_0] = (n-n_0+1)x[n-n_0] =\neq T\{x[n-n_0]\} \tag{17}$$

  άρα δεν είναι Χ.Α.
- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό, αφου δε χρειάζεται αποθηκευμένες τιμές της εισόδου για να υπολογίσει την έξοδο.

iii. $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases} = x[n]u[n-1] + x[n]u[-n-1] + 0\delta[n]$: έστω το ζεύγος εισόδου-εξόδου $x[n] \longrightarrow y[n]$.

- Γραμμικό: για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$ax_1[n]u[n-1]+ax_1[n]u[-n-1]+0\delta[n]+bx_2[n]u[n-1]+bx_2[n]u[-n-1]+0\delta[n] = ay_1[n]+by_2[n] \tag{18}$$

  αρα το σύστημα είναι γραμμικό.
- Ευσταθές: αν $|x[n]| < B_x$ τότε $|y[n]| = |x[n]u[n-1] + x[n]u[-n-1] + 0\delta[n]| = |x[n](u[n-1] + u[-n-1])| = |x[n]| < B_x$, άρα είναι ευσταθές.
- Αιτιατό: η έξοδος εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου, άρα ειναι αιτιατό.
- Χ.Α.: για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος θα είναι

$$T\{x[n-n_0]\} = x[n-n_0]u[n-1] + x[n-n_0]u[-n-1] + 0\delta[n-n_0] \tag{19}$$

  Η καθυστερημένη κατά n_0 έξοδος θα είναι

$$y[n-n_0] = x[n-n_0]u[n-n_0-1] + x[n-n_0]u[-n-n_0-1] + 0\delta[n-n_0] \neq T\{x[n-n_0]\} \tag{20}$$

  άρα δεν είναι Χ.Α.

- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό, αφου δε χρειάζεται αποθηκευμένες τιμές της εισόδου για να υπολογίσει την έξοδο.

Άσκηση 4. Έχουμε

$$c[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] \tag{21}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u[k-2]u[n+2-k] \tag{22}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \tag{23}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2-2+1}}{1-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

$$= 2\Big[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big]u[n] \tag{25}$$

αφού $2 \leq k \leq n+2 \Longleftrightarrow n \geq 0$.

Άσκηση 5. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\lambda - \frac{1}{4} = 0 \tag{26}$$

και προφανώς έχει ρίζα το $\lambda_0 = \frac{1}{4}$, οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\Big(\frac{1}{4}\Big)^n, \ \ n \geq 0 \tag{27}$$

Για $y[-1] = 2$, η παραπάνω σχέση δίνει $c = \frac{1}{2}$.

Η κρουστική απόκριση του συστήματος $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$ προκύπτει από την εξίσωση

$$h_o[n] - \frac{1}{4}h_o[n-1] = \delta[n] \tag{28}$$

και θα είναι της μορφής

$$h_o[n] = c\Big(\frac{1}{4}\Big)^n, \ \ n \geq 0 \tag{29}$$

και επειδή $h_o[0] = \delta[0] = 1$, η σταθερά $c = 1$. Για το σύστημα της εκφώνησης, ως ΓΧΑ, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h[n] = -2h_o[n] = -2\Big(\frac{1}{4}\Big)^n u[n] \tag{30}$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται από τη συνέλιξη

$$
\begin{aligned}
y_{zs}[n] = h[n] * x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} u[k-1] \Big(-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k] \Big) && (31) \\
&= -6\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{-k} u[n-k]u[k-1] && (32) \\
&= -6\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{3}\right)^{k} && (33) \\
&= -6\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \left[\frac{\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3}} \right] && (34) \\
&= 18\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \left(\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \right) && (35) \\
&= 18\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \right) && (36) \\
&= 24\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \right) && (37) \\
&= 24\left(\frac{1}{4}\right)^{n} - 24\left(\frac{1}{3}\right)^{n} && (38) \\
&= 8\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n} - 1 \right] && (39)
\end{aligned}
$$

για $1 \le k \le n \Longrightarrow n \ge 1$, οπότε

$$
y_{zs}[n] = 8\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n} - 1 \right] u[n-1] \tag{40}
$$