HY370

Ασκήσεις 6

27/11/2020

Άσκηση 3.
Βρείτε τους συντελεστές του συστήματος FIR γραμμικής φάσης

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = b_0 X(e^{j\omega}) + b_1 X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega} + b_2 X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j2\omega} \quad (1)$$

με $b_0, b_1, b_2 \neq 0$, τέτοιο ώστε

(α') Αποκόπτει πλήρως μια συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/3$.

(β') $H(e^{j0}) = 1$

Υπολογίστε την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης του. $H(e^{j\omega})$, $\measuredangle H(e^{j\omega})$;

από (1) έχουμε $Y(e^{j\omega}) = \left(b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega} + b_2 \cdot e^{-j2\omega}\right) \cdot X(e^{j\omega})$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega} + b_2 \cdot e^{-j2\omega}$$

από εκφώνηση $H(e^{j0}) = 1$ οπότε $b_0 + b_1 \cdot e^{-j0} + b_2 \cdot e^{-j2\cdot 0} = 1$

άρα $b_0 + b_1 + b_2 = 1 \quad (2)$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega} + b_2 \cdot e^{-j2\omega}$$

απο εκφώνηση $H(e^{j0}) = 1$ οπότε $b_0 + b_1 \cdot e^{-j0} + b_2 \cdot e^{-j2\cdot 0} = 1$

αρα $b_0 + b_1 + b_2 = 1$ (2)

από το (α) εκφώνησης

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{3}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow b_0 + b_1 \cdot e^{-j2\pi/3} + b_2 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_0 + b_1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\right) + b_2\left(\cos\frac{4\pi}{3} - j\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow b_0 + b_1\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b_2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_0 + b_1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\right) + b_2\left(\cos\frac{4\pi}{3} - j\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_0 + b_1\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b_2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_0 - \frac{1}{2}b_1 - b_1 j\frac{\sqrt{3}}{2} - b_2\frac{1}{2} + b_2 j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2b_0 - b_1 - j b_1\sqrt{3} - b_2 + b_2 j\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b_0 - b_1 - b_2 = 0 \\ -\sqrt{3}b_1 + \sqrt{3}b_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = b_1 = b_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

από (2) $b_1 + b_2 + b_0 = 1$ οπότε $b_1 = b_2 = b_0 = \frac{1}{3}$

είχαμε βρει $H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega} + b_2 \cdot e^{-j2\omega}$

άρα $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{3} e^{-j2\omega}$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega} \cdot e^{j\omega} + \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{3} \cdot e^{-j2\omega}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega} \left(\underbrace{e^{j\omega}} + 1 + \underbrace{e^{-j\omega}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega} \left(2\cos\omega + 1 \right)$$

οπότε η απόκριση πλάτους είναι:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega} \right| \cdot \left| 2\cos\omega + 1 \right| = \frac{1}{3} \cdot 1 \left| 2\cos\omega + 1 \right|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\left(2\cos\omega + 1\right)$$

οπότε η απόκριση πλάτους είναι:

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\right| \cdot \left|2\cos\omega + 1\right| = \frac{1}{3} \cdot 1 \left|2\cos\omega + 1\right|$$

και η απόκριση φάσης είναι:

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \underbrace{\measuredangle \frac{1}{3}}_{\substack{\text{φάση } 0 \\ \text{(σταθερός θετικός)}}} + \underbrace{\measuredangle e^{-j\omega}}_{\text{φάση } -\omega} + \measuredangle(2\cos\omega + 1)$$

Η συνάρτηση $2\cos\omega + 1$ μηδενίζεται για $\omega = \pm\frac{2\pi}{3}$ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών και η απόκριση φάσης είναι:

$$\measuredangle H(e^{jw}) = \underbrace{\measuredangle \frac{1}{3}}_{\text{φάση } 0} + \underbrace{\measuredangle e^{-jw}}_{\text{φάση } -w} + \measuredangle(2\cos w + 1)$$

(σταθερός θετικός)

Η συνάρτηση $2\cos w+1$ μηδενίζεται για $w = \pm \frac{2\pi}{3}$ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών

Η φάση της $2\cos w + 1$ είναι

$$\measuredangle(2\cos w + 1) = \begin{cases} 0, & w \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ \pi, & w \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \\ -\pi, & w \in \left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$\left(\begin{matrix} 2\cos w + 1 < 0 \\ w > 0 \end{matrix} \right)$

συνολικά

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega, & \omega \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\omega + \pi, & \omega \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \\ -\omega - \pi, & \omega \in \left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Άσκηση 6.
Έστω το φίλτρο γραμμικής φάσης

$$H_1(z) = 1 - z^{-1}$$

(α') Γράψτε την απόκριση συχνότητας $H_1(e^{j\omega})$ ως

$$H_1(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\phi(e^{j\omega})}$$

με $A(e^{j\omega})$ μια πραγματική συνάρτηση του ω.

(β') Το σύστημα $H_1(z)$ συνδέεται σε σειρά με ένα σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_2(e^{j\omega}) = A_2(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$, τύπου II. Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα είναι γραμμικής φάσης τύπου III.

α)

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot \left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega/2}\right) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot j \cdot 2 \cdot \sin\frac{\omega}{2}$$

$$= e^{-j\omega/2} \cdot e^{j\pi/2} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= e^{j\overbrace{\left(-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}^{}}_{\varphi_1(e^{j\omega})} \cdot \underbrace{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{\text{πραγμ. συνάρτ. } A} = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\phi_1(e^{j\omega})}$$

με $A(e^{j\omega}) = 2\sin\frac{\omega}{2}$ και $\varphi_1(e^{j\omega}) = -\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}$

άρα είναι FIR σύστημα τύπου IV
(διάλεξη 17 πινακάκι)

$$H_2(e^{j\omega}) = A_2(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega M/2}$$ τύπου II

$$H_1(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}}$$

Συνολικό σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα το γινόμενο των συχνοτικών αποκρίσεων των δυο συστημάτων.

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$

$$= \underbrace{2\sin\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2} + j\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{A_2(e^{j\omega})} \cdot e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{\omega}{2} \cdot A_2(e^{j\omega}) \cdot e^{j\left(-\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega M}{2}\right)}$$

$$= \underbrace{2\sin\frac{\omega}{2}}\cdot e^{-j\frac{\omega}{2}+j\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{A_2(e^{j\omega})}\cdot e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{2\sin\frac{\omega}{2}\cdot A_2(e^{j\omega})}_{A_3(e^{j\omega})} \cdot e^{\underbrace{j\left(-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\omega M}{2}\right)}_{\varphi_3(e^{j\omega}) = -\frac{\omega(M+1)}{2}+\frac{\pi}{2}}}$$

πραγμ. συνάρτ.

· Αφού το $H_2(e^{j\omega})$ είναι τύπου II, το M είναι <u>περιττό</u>

Άρα το $\frac{M+1}{2}$ είναι ακέραιος.

οπότε το συνολικό σύστημα είναι γραμμ. φάσης τύπου III.

Άσκηση 1.
Σας δίνεται η απόκριση σε συχνότητα ενός ΓΧΑ συστήματος ως

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}\left(1 + \cos(\omega) + \frac{2}{5}\cos(2\omega) - \frac{1}{5}\cos(3\omega)\right)$$

(α') Αναγνωρίστε αν πρόκειται για FIR ή IIR φίλτρο.

(β') Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$.

(γ') Σχεδιάστε ένα κατάλληλο γράφο που υλοποιεί το σύστημα.

α) Είναι ένα FIR φίλτρο, αφού τα συνημίτονα αναλύονται σε μιγαδικά εκθετικά από τη σχέση του Euler, τα οποία αντιστοιχούν σε συναρτήσεις δέλτα στο χρόνο.

β) Είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}\left(1 + \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2} + \frac{2}{5}\,\frac{e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}}{2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{e^{j3\omega}+e^{-j3\omega}}{2}\right)$$

$$= +e^{-j3\omega} - 0,1\cdot\left[1+e^{-j6\omega}\right] + 0,2\left[e^{-j\omega}+e^{-j5\omega}\right] + 0,5\left[e^{-j2\omega}+e^{-j4\omega}\right]$$

$$= +e^{-j3\omega} - 0{,}1 \cdot \left[1 + e^{-j6\omega}\right] + 0{,}2\left[e^{-j\omega} + e^{-j5\omega}\right] + 0{,}5\left[e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}\right]$$

$$= e^{-j3\omega} - 0{,}1 - 0{,}1e^{-j6\omega} + 0{,}2e^{-j\omega} + 0{,}2e^{-j5\omega} + 0{,}5e^{-j2\omega} + 0{,}5 \cdot e^{-j4\omega}$$

οπότε η κρουστική απόκριση γράφεται:

$$h[n] = \delta[n-3] - 0{,}1\,\delta[n] - 0{,}1\,\delta[n-6] + 0{,}2\,\delta[n-1] + 0{,}2\,\delta[n-5] + 0{,}5\,\delta[n-2] + 0{,}5\,\delta[n-4]$$

$$= e^{-j3w} - 0{,}1 - 0{,}1e^{-j6w} + 0{,}2e^{-jw} + 0{,}2e^{-j5w} + 0{,}5e^{-j2w} + 0{,}5 \cdot e^{-j4w}$$

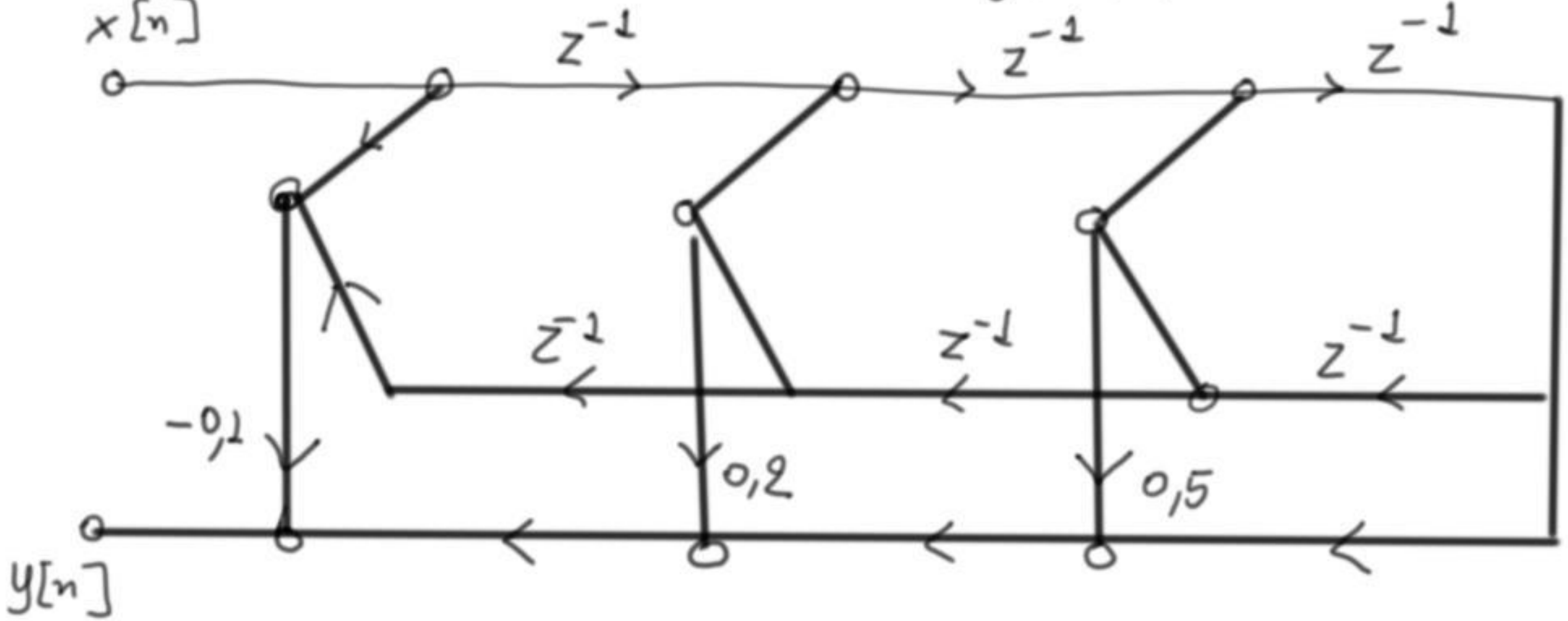
οπότε η κρουστική απόκριση γράφεται:

$$h[n] = \delta[n-3] - 0{,}1\,\delta[n] - 0{,}1\,\delta[n-6] + 0{,}2\,\delta[n-1] + 0{,}2\,\delta[n-5] + 0{,}5\,\delta[n-2] + 0{,}5\,\delta[n-4]$$

$$= -0{,}1\,\delta[n] + 0{,}2\,\delta[n-1] + 0{,}5\,\delta[n-2] + \delta[n-3] + 0{,}5\,\delta[n-4] + 0{,}2 \cdot \delta[n-5] - 0{,}1\,\delta[n-6]$$

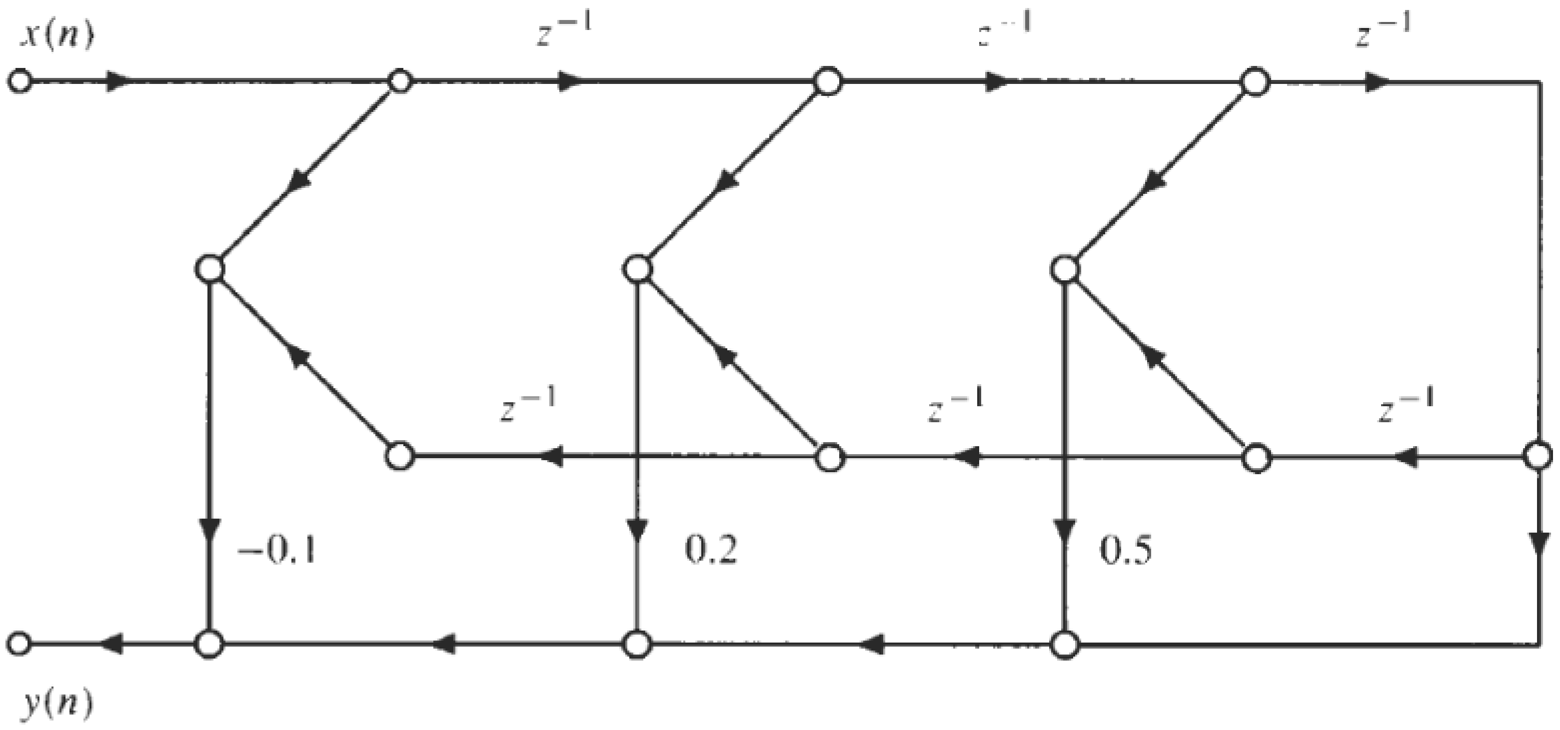
$$= -0{,}1\,\delta[n] + 0{,}2\,\delta[n-1] + 0{,}5\,\delta[n-2] + \delta[n-3] + 0{,}5\,\delta[n-4]$$
$$+\ 0{,}2 \cdot \delta[n-5] - 0{,}1\,\delta[n-6]$$

γ) Το σύστημα αυτό είναι γραμμ. φάσης Τύπου I,



(ο γράφος αυτός δεν είναι μοναδικός)

(γ') Το σύστημα είναι φίλτρο γραμμικής φάσης Τύπου Ι, και ένας γράφος που το περιγράφει είναι αυτός του Σχήματος 1. χωρίς να είναι φυσικά ο μοναδικός.



Σχήμα 1: Γράφος Συστήματος Άσκησης 1.

Άσκηση 4.
Σχεδιάστε το γράφο του ΓΧΑ συστήματος

$$H(z) = \frac{16 + 9z^{-1} - z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

ως παράλληλη μορφή με υποσυστήματα πρώτης τάξης σε Direct Form.

Για να υλοποιήσουμε ένα σύστημα ως παράλληλη μορφή από πρωτοβάθμια υποσυστήματα θα πρέπει να το εκφράσει μέσω αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα. Επειδή η τάξη του αριθμητή είναι ίση με αυτή του παρονομαστή, θα πρέπει να εκτελέσουμε διαίρεση πολυωνύμων.

$$H(z) = 8 + \frac{8 + 7z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = 8 + \frac{8 + 7z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$$

Θα πρέπει να εκτελέσουμε διαίρεση πολυωνύμων.

$$H(z) = 8 + \frac{8+7z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = 8 + \frac{8+7z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε:

$$H(z) = 8 + \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{με} \quad A=12, \; B=-4.$$

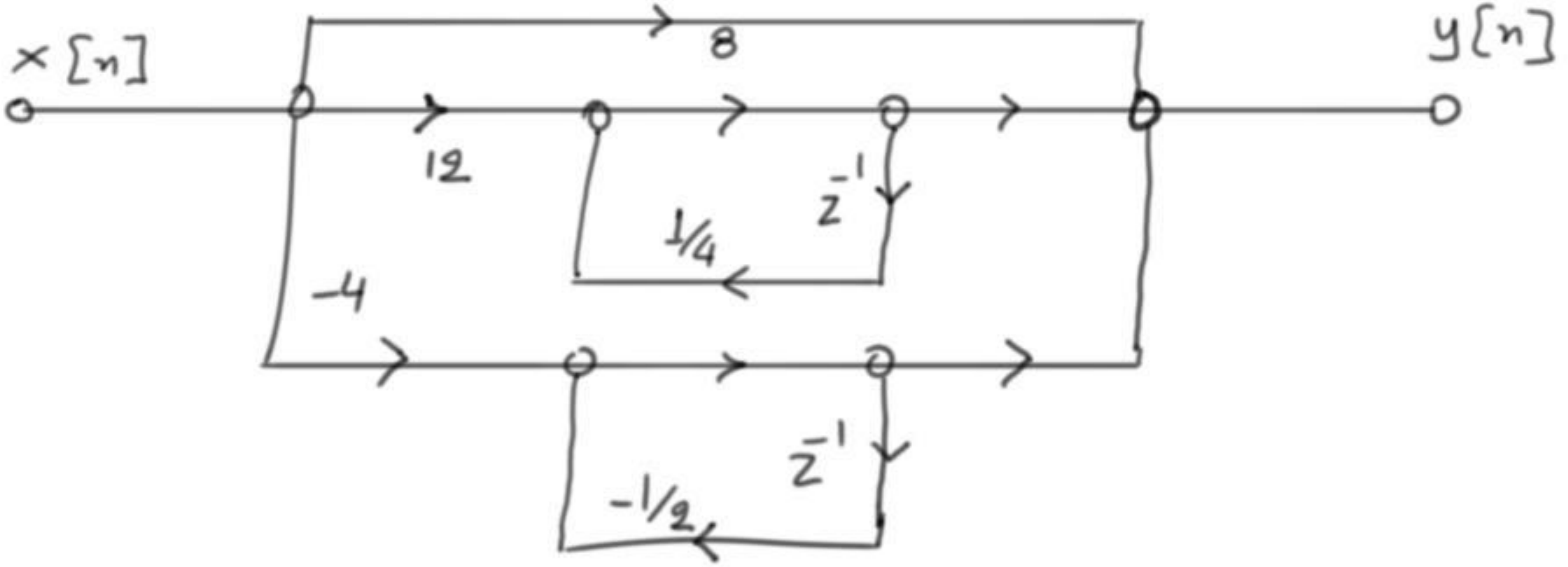
Άρα

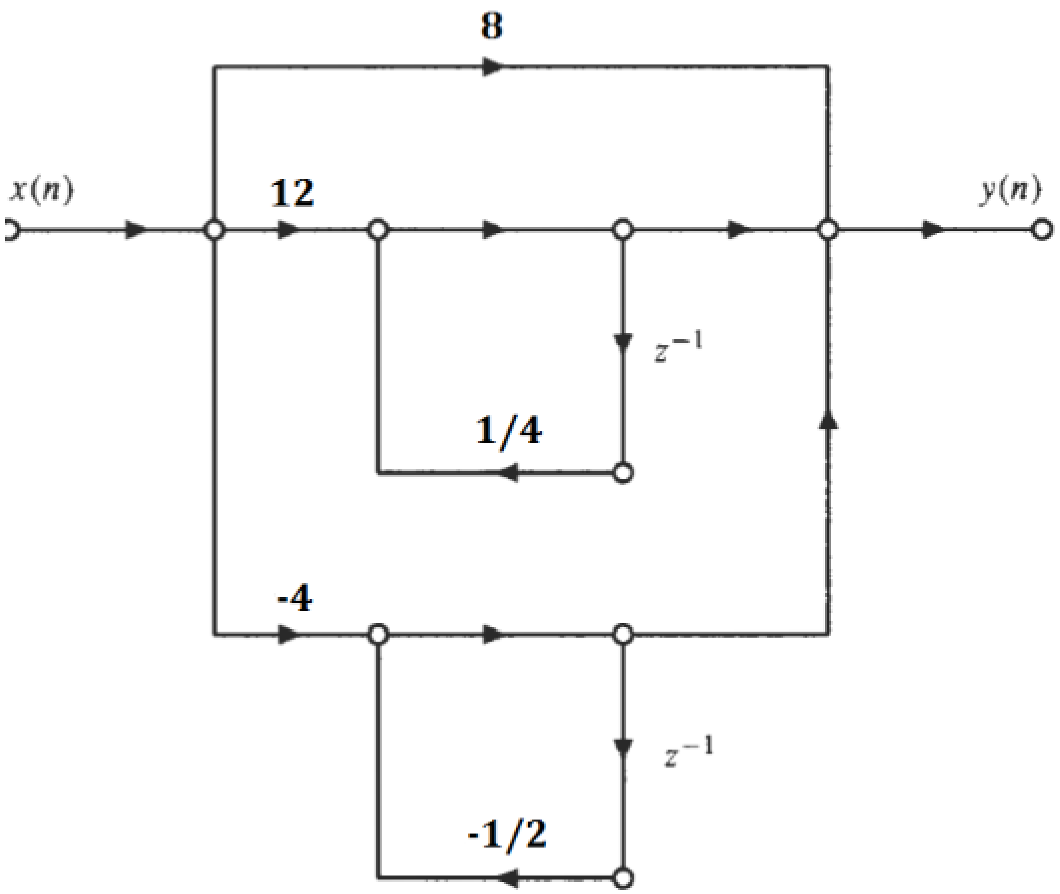
$$H(z) = 8 + \frac{12}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Άρα

$$H(z) = 8 + \frac{12}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Η παράλληλη μορφή είναι:





Σχήμα 8: Γράφος Συστήματος Άσκησης 4.

Άσκηση 3. Ένα φίλτρο FIR τρίτης τάξης έχει συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$

$$G(z) = (6 - z^{-1} - 12z^{-2})(2 + 5z^{-1})$$

(α΄) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_i(z)$ όλων των FIR φίλτρων που οι αποκρίσεις πλάτους τους, $|H_i(e^{j\omega})|$, είναι ίδιες με αυτή του $G(z)$.

(β΄) Ποιά από αυτές τις συναρτήσεις μεταφοράς είναι ελάχιστης φάσης και ποιά είναι μέγιστης φάσης;[1]

Άσκηση 3.

1. Είναι
$$G(z) = (6 - z^{-1} - 12z^{-2})(2 + 5z^{-1}) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(\frac{2}{5} + z^{-1})$$

   Οι άλλες συναρτήσεις μεταφοράς με το ίδιο $|G(e^{j\omega})|$ είναι οι:

   - $H_1(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(\frac{2}{5} + z^{-1})$
   - $H_2(z) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(\frac{2}{5} + z^{-1})$
   - $H_3(z) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_4(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_5(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_6(z) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_7(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$

2. Προφανώς, η $H_7(z)$ είναι ελάχιστης φάσης και η $G(z)$ της εκφώνησης είναι μέγιστης φάσης.

Άσκηση 4. Τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών του Σχήματος (1) περιγράφουν έξι διαφορετικά *αιτιατά* ΓΧΑ συστήματα. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. Η απάντηση "κανένα" ή "όλα", θεωρείται αποδεκτή όπου χρειάζεται.

(α') Ποιά συστήματα είναι IIR;

(β') Ποιά συστήματα είναι FIR;

(γ') Ποιά συστήματα είναι ευσταθή;

(δ') Ποιά συστήματα είναι ελάχιστης φάσης;

(ε') Ποιά συστήματα είναι γενικευμένης γραμμικής φάσης;

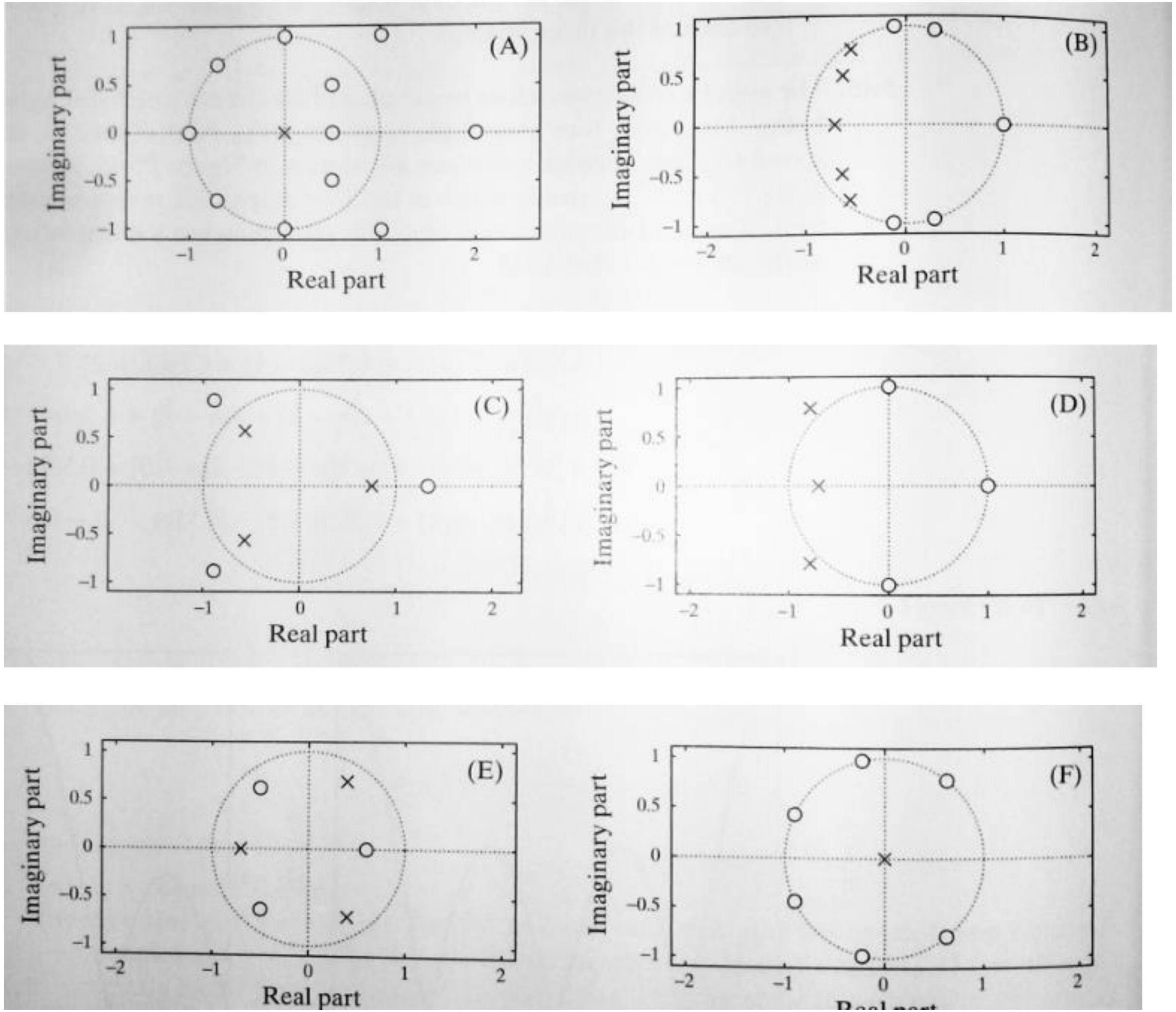
(ϛ') Ποιά συστήματα έχουν $|H(e^{j\omega})| =$ σταθερή, για κάθε ω;

(ζ') Ποιά συστήματα έχουν ευσταθή και αιτιατά αντίστροφα συστήματα;

(η') Ποιό σύστημα έχει την ελάχιστη - σε διάρκεια - κρουστική απόκριση;

(θ') Ποιά συστήματα έχουν φασματική απόκριση που έχει χαμηλοπερατή συμπεριφορά;

(ι') Ποιά συστήματα έχουν ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας;



α) B, C, D, E

β) A, F

γ) A, B, C, E, F

δ) E

ε) A, F

ϛ) C

ζ) E

η) F

θ) C, F

ι) E

Thank you!